О. Морачковський, С. Шипулін
(Харківський Державний Політехнічний університет)

ПОВЗУЧІСТЬ ТОНКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ВИСОКОЧАСТОТНОМУ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розглядається проблема повзучості оболонок, що деформуються з руйнуванням в умовах циклічного навантаження. Робота присвячена математичній постановці задачі та її розв'язанню на базі методу скінчених елементів.

Розглянута важлива проблема повзучості оболонок, що деформуються з руйнуванням в умовах циклічного навантаження. Традиційні розрахунки на повзучість враховують лише статичну частину зовнішнього навантаження, або еквівалентне навантаження, за яке звичайно приймають суму статичної та максимальної амплітудної складової зовнішнього навантаження.

Робота присвячена математичній постановці задачі та її розв'язанню на базі методу скінчених елементів, поширеного у розрахунках осесиметричних оболонок. Надано алгоритм методу розв'язання задачі на підставі [1]. Крайові задачі розв'язувались за допомогою методу скінчених елементів, а початкові - методом чисельного інтегрування (рівняння стану та кінетичне рівняння пошкоджень) за схемами методів Ейлера та прогнозу-корекції.

1. Постановка задачі. Розглянуто осесиметрично навантажені, замкнені оболонки обертання, що деформуються в умовах повзучості.

Як метод дослідження напружено-деформованого стану оболонки при повзучості прийнято метод скінчених елементів (МСЕ) [2].

Переміщення точки серединної поверхні оболонки, що є під дією осесиметричного навантаження в умовах повзучості, однозначно визначається двома компонентами u = u (s,t), w = w (s,t), що направлені по дотичній та нормалі до поверхні у будь-який момент часу t. Розглянуто малі переміщення ($w/h < 1/4$), тонкі оболонки ($h/r < 1/20$), для яких при повзучості повні деформації в точці складаються з термопружних та незворотних внаслідок повзучості деформацій. Приймаємо, як і завжди, що для тонкої оболонки є справедливими гіпотези Кірхгофа-Лява та твірна оболонки розбита на низку зрізаних конусів.

Далі будемо користуватись векторним виразом для повних деформацій $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \chi_s, \chi_\theta)^T$ та відомими геометричними співвідношеннями теорії оболонок:

$$\varepsilon = \left(u', \left(w\cos\varphi + u\sin\varphi\right)/r, -w'', -(\sin\varphi/r)w'\right)^T,$$

де s, θ - координати точки вздовж твірної та у коловому напрямку; ε_s, ε_0 - деформації у точках, а χ_s, χ_0 - зміни кривизн в обраних напрямках у серединної поверхні оболонки при деформуванні. Координату z прийнято нормальною до твірної.

Для пружних складових повної деформації приймається закон Гука. Рівняння, що пов'язують внутрішні силові фактори з деформаціями, мають наступний вигляд:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}\underline{\varepsilon} - \underline{d}_m - \underline{\sigma}_0, \qquad (1)$$

де $\underline{\sigma} = \left(N_s, N_\theta, M_s, M_\theta\right)^T$, $\underline{d}_m = \left(d_1, d_2, d_3, d_4\right)$, $\underline{\sigma}_0 = \left(N_s^c, N_\theta^c, M_s^c, M_\theta^c\right)^T$,

$$d_1 = d_2 = \frac{E}{1-\nu}\alpha T_0, \quad d_3 = d_4 = \frac{E}{1-\nu}\alpha T_1.$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2/12 & h^2\nu/12 \\ 0 & 0 & h^2\nu/12 & h^2/12 \end{bmatrix},$$

Вектор додаткових напружень σ_0 повністю визначений деформаціями повзучості й може бути одержаний з наступних рівнянь:

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{\underline{P}}_m \underline{c}_m, \tag{2}$$

де матриця $\underline{\underline{P}}_m$ та вектор $\underline{c}_m$ мають вигляд:

$$\underline{\underline{P}}_m = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_m = \left(c_s^0, c_\theta^0, c_s^1, c_\theta^1\right)^T,$$

$$c_s^0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_s dz, \quad c_s^1 = \int_{-h/2}^{h/2} c_s z dz, \quad c_0^0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_0 dz, \quad c_0^1 = \int_{-h/2}^{h/2} c_0 z dz.$$

Вектор $\underline{\sigma}_0$ визначено у точках твірної оболонки, а c_s, c_θ - незворотні, внаслідок повзучості, складові повних деформацій, що відповідають поточному моменту, для підрахунку яких необхідні рівняння стану.

Далі розглянуто рівняння стану повзучості типу течіння, що потребує для підрахунків у (2) конкретизації цих рівнянь й подальшого їхнього інтегрування за часом.

Для цієї мети процес деформування розглядається покроково за часом. Якщо у момент t_k відомі $\underline{c}_{(k)}$, $\underline{c}_{(k-1)}$, $\dot{\underline{c}}_{(k)}$ та $\dot{\underline{c}}_{(k-1)}$, тоді розв'язок при $t_{k+1} = t_k + \Delta_k t$ знаходять за формулами методу прогнозу-корекції третього порядку:

$$\underline{c}^p_{(k+1)} = c_{(k-1)} + 2\dot{\underline{c}}_{(k)}\Delta_k t, \qquad \underline{c}^c_{(k+1)} = \underline{c}_{(k)} + 0.5\left(\dot{\underline{c}}^p_{(k+1)} + \dot{\underline{c}}_{(k)}\right)\Delta_k t,$$

$$\underline{c}_{(k+1)} = \underline{c}^c_{(k+1)} + \alpha\left(\underline{c}^p_{(k+1)} - \underline{c}^c_{(k+1)}\right).$$

Коефіцієнт α у розрахунках прийнято рівним 0.2.

Далі розглянемо вивод рівнянь МСЕ, дотримуючись схеми, що описана у [2].

У кожній вузловій точці задамо радіальне, осьове зміщення та поворот $\left\{\delta_i\right\}_{(k)} = \left\{\overline{u}_{i(k)}, \overline{w}_{i(k)}, \beta_{i(k)}\right\}^T$. Отже, елемент з двома вузлами i, j має шість степеней свободи, якими є переміщення елементу

$$\left\{\delta\right\}^e_{(k)} = \left\{\delta_{i(k)}, \delta_{j(k)}\right\}^T.$$

Приймаючи

$$u_{(k)} = \alpha_{1(k)} + \alpha_{2(k)}s, \qquad w_{(k)} = \alpha_{3(k)} + \alpha_{4(k)}s + \alpha_{5(k)}s^2 + \alpha_{6(k)}s^3 \tag{3}$$

за умов сумісності переміщень у вузлах, знайдемо:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}_{(k)} = \left[N'\right]\begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix}\left\{\delta\right\}^e_{(k)} = \left[\left[N'_i\right][\lambda], \left[N'_j\right][\lambda]\right]\left\{\delta\right\}^e_{(k)} = \left[N\right]\left\{\delta\right\}^e_{(k)}, \tag{4}$$

де $[N']$ - матриця перетворень розміром 2 × 6:

$$[N']=\begin{bmatrix} 1-s' & 0 & 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & L\left(s'-2s'^2+s'^3\right) & 0 & 3s'^2-2s'^3 & L\left(s'^3-s'^2\right) \end{bmatrix}$$

$s' = s/L$, а функції, що входять до матриці перетворень з (4), є поліномами Ерміта [2].

Для повних деформацій в елементі запишемо:

$$\{\varepsilon\}_{(k)} = [B]\{\delta\}^e_{(k)} = \left[[B_i][\lambda], [B_j][\lambda]\right]\{\delta\}^e_{(k)}, \qquad (5)$$

де $[B]$ - матриці деформацій (у термінології МСЕ) [2].

Отримані у матричної формі геометричні залежності дозволяють записати фізичні рівняння (1) у наступному вигляді:

$$\{\sigma\}_{(k)} = [D][B]\{\delta\}^e_{(k)} - \{d_m\}_{(k)} - \{\sigma_0\}_{(k)}, \qquad (6)$$

$$\{c_m\}_{(k)} = \left(c^0_s, c^0_0, c^1_s, c^1_\theta,\right)^T_{(k)},$$

$$c^0_{s(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{s(k)}(s', z)dz, \quad c^0_{0(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{\theta(k)}(s', z)dz,$$

$$c^1_{s(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{s(k)}(s', z)zdz, \quad c^1_{0(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{0(k)}(s', z)zdz.$$

Тут компоненти вектора $\{c\}_{(k)}$ - це компоненти незворотних деформацій повзучості $\{c\}_{(k)} = \left(c_{s(k)}, c_{\theta(k)}\right)^T$, що залежать від координат s' та z точки оболонки.

Далі розглянемо вивід матриць жорсткості, векторів навантаження, переміщень, напружень й додаткових напружень на основі варіаційної постановки задачі.

Нехай вектор $\{F\}_{(k)} = \left\{F_i, F_j, F_m, \ldots\right\}^T_{(k)}$ визначає вузлові сили, які в момент t_k статично еквівалентні заданим зовнішнім силам (об'ємним й поверхневим навантаженням). Кожна компонента $\{F_i\}_{(k)}$ має мати стільки ж компонент, скільки й відповідне вузлове переміщення $\{\delta_i\}^e_{(k)}$ й діяти у відповідному напрямку. Тоді маємо $d\{f\}_{(k)} = [N]d\{\delta\}^e_{(k)}$, $d\{\varepsilon\}_{(k)} = [B]d\{\delta\}^e_{(k)}$. Робота, що виконується вузловими силами, дорівнює $\left(d\{\delta\}^e_{(k)}\right)^T\{F\}^e$, аналогічно для одиниці площі елементу оболонки внутрішня робота може бути підрахована як:

$$\left(d\{\varepsilon\}_{(k)}\right)^T\{\sigma\}_{(k)} = \left(d\{\delta\}^e_{(k)}\right)^T[B]^T\{\delta\}_{(k)}.$$

Згідно з варіаційним принципом Лагранжа маємо:

$$\left(d\{\delta\}^e_{(k)}\right)^T\{F\}^e_{(k)} = \left(d\{\delta\}^e_{(k)}\right)^T\left(\oint_A [B]^T\{\sigma\}_{(k)}ds\right).$$

Зважаючи на те, що ці співвідношення є справедливими для будь-яких кінематично можливих виртуальних переміщень, коефіцієнти у правої та лівої частинах рівняння будуть рівними. Після підстановки до них фізичних рівнянь (6) у матричній формі, одержуємо:

$$\{F\}^e = \left(\iint_\Lambda [B]^T [D][B] ds \right) \{\delta\}^e_{(k)} - \iint_\Lambda [B]^T \{d_m\}_{(k)} ds - \iint_\Lambda [B]^T \{\sigma_0\}_{(k)} ds.$$

Як відомо, у МСЕ це рівняння переписується як

$$\{F\}^e_{(k)} = [K]^e \{\delta\}^e_{(k)} - \{F\}^e_{T(k)} - \{F\}^e_{\sigma_0(k)}, \qquad (7)$$

де $\{F\}^e_{T(k)}$ - сили у вузлах, зумовлені температурними деформаціями у момент часу t_k; $\{F\}^e_{\sigma_0(k)}$ - сили у вузлах, зумовлені додатковими напруженнями, які у випадку, що розглядається, мають місце внаслідок повзучості.

Матриця жорсткості елемента не залежить від поточного значення часу й визначається рівністю:

$$[K]^e = \iint_\Lambda [B]^T [D][B] dv. \qquad (8)$$

2. Повзучість оболонок. Оболонкові конструкції широко використовуються у техніці як трубопроводи, корпуси обладнання й машин, обшивки літаючих апаратів тощо. Умови експлуатації таких конструкцій часто призводять до високотемпературної повзучості в умовах циклічного навантаження. Наприклад, для літаючих апаратів це пов'язано з високотемпературними параметрами робочих середовищ газу чи рідини, гідродинамічними й акустичними діями. Для корпусу камери згорання ракетної техніки такі умови є характерними внаслідок нерівномірності горіння палива.

Розглянута вище математична постановка задачі повзучості й довготривалої міцності оболонок має конкретизуватись у кожному конкретному випадку розрахунку заданням рівнянь стану матеріалу оболонки при повзучості. У випадку статичного навантаження використовуються рівняння стану:

$$\dot{c}_{ij} = \Phi_m(\sigma_i, \omega; T) S_{ij}; \quad \dot{\omega} = \Omega_m(\sigma_e^\omega, \omega; T); \qquad (9)$$
$$\omega(0) = 0; \quad \omega(t_*) = \omega_*,$$

що описують повзучість з накопиченням пошкоджень за схемою Работнова-Качанова [3]. Конкретизація рівнянь є у виборі функцій Φ_m й Ω_m, що залежать від еквівалентних напружень та скалярного параметра пошкодженості ω.

Так, наприклад, функція Φ_m при еквівалентных напруженнях Мізеса приймає вигляд $\Phi_m = B\sigma_i^{n-1}$ - для повзучості без зміцнення, та $\Phi_m = mB^{1/m}\sigma_i^{n/m-1}(c_i)^{\frac{m-1}{m}}$ - зі зміцненням, де параметр зміцнення - інтенсивність накопиченої деформації повзучості.

Узагальнений закон типу Нортона для повзучості матеріалів з пошкодженням випливає з (9) при

$$\Phi_m = B\frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m}, \quad \Omega_m = B\frac{\sigma_e^k}{(1-\omega^r)^L}. \qquad (10)$$

де $\sigma_e = \sigma_i(1-\alpha) + \sigma_{max}\alpha$, A, B, n, k, r, m, L - матеріальні сталі.

Для моделювання динамічної повзучості на основі рівнянь (9), (10) використано асимптотичні розкладення методу двох масштабів часу [1]. Розв'язок проблеми зводиться до розв'язку двох пов'язаних рівняннями стану задач: задачі "статичної" повзучості для осередненого процесу, що розвивається у масштабі "повільного" часу, та задачі вимушених періодичних коливань розглянутого тіла, які відбуваються у масштабі "швидкого" часу. Рівняння стану для циклічної повзучості приймають вигляд:

$$\dot{c}^0_{ij} = \Phi_0(\sigma_i, A, \omega^0; T) S^0_{ij}; \quad \dot{\omega}^0 = \Omega_0(\sigma_e^\omega, A, \omega^0; T); \qquad (11)$$

$$\omega^0(0)=0;\quad \omega^0(t_*)=\omega_*;$$

$$\Phi_0=H(A)\Phi_m;\quad \Omega_0=K(A)\Omega_m;\quad A=\frac{\sigma_c^a}{\sigma_i^0}.$$

Ці рівняння відрізняються від відомих статичних тим, що функції Φ_0 та Ω_0 залежать від коефіцієнту асиметрії циклу напружень, який представляє відношення інтенсивностей амплітудних напружень при вимушених коливаннях до інтенсивності напружень Мізеса, що змінюється внаслідок повзучості. Функції H(A) та K(A) визначаються таким чином:

$$H(A)=\left\langle\left(1+A(t)\sin\xi\right)^n\right\rangle,\quad K(A)=\left\langle\left(1+A(t)\sin\xi\right)^k\right\rangle,$$

де $\langle * \rangle$ - оператор осереднення за період циклу навантаження.

Для встановлення ступеня адекватності запропонованих рівнянь стану в роботі проведено порівняння розрахункових кривих повзучості з експериментальними. З цією метою виконано роботи по модифікації стандартних машин для випробувань статичної повзучості матеріалів AIMA 5-2.

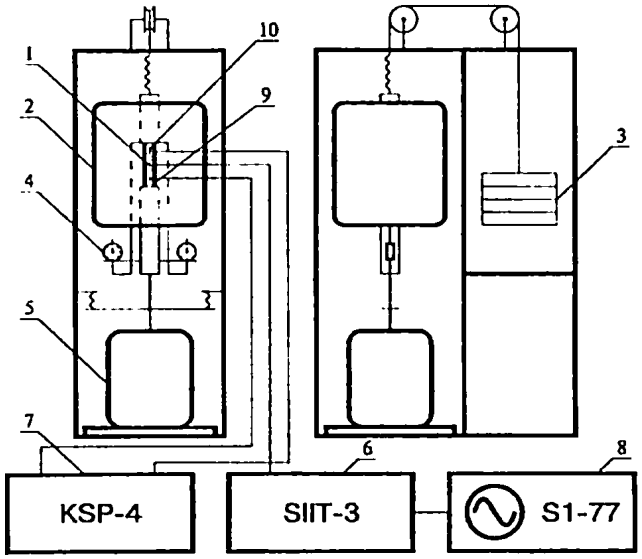

Рис. 1

У машині циклічна складова навантаження підтримується за допомогою вібратора, як показано на рис. 1, де позначено: 1 - тензодатчики; 2 - трьохсекційна електрична піч; 3 - статичне навантаження; 4 - датчики переміщень годинникового типу; 5 - вібратор ВЕДС 10А; 6 - інформаційно-вимірювальна система СІІТ-3; 7 - катодний осцілограф С1-77; 8 - автоматична система контролю температури КСП-4; 9 - зразок; 10 - термопари. Засоби випробувань та контролю пройшли тестування, що дозволило встановити їхню надійність для проведення досліджень.

Зразки з алюмінієвого сплаву Д16АТ при температурі T = 573 K досліджено як при статичному розтязі, так й при сумісної дії постійної розтягуючої складової навантаження, що гармонічно змінюється. Експерименти на статичну повзучість (рис. 2) проводились при трьох різних рівнях напружень у матеріалі: 63.6 МПа (крива 1), 52.8 МПа (2) и 42.3 МПа (3).

Осереднені для кожного рівня навантаження експериментальні дані позначені точками на рис. 2. Для опису кривих повзучості при математичному моделюванні на ПЕОМ прийняті рівняння стану з функціями Φ_m та Ω_m виду (9), (10). За

експериментальними даними знайдені значення констант: $B = 0.34 \cdot 10^{-7}$ МПа$^{-n}$ /г; $D = 1.9 \cdot 10^{-7}$ МПа$^{-n}$ /г; $n = 2.93$; $r = 1.38$. Дані, що одержані математичним моделюванням, показані на рис. 3 суцільними лініями.

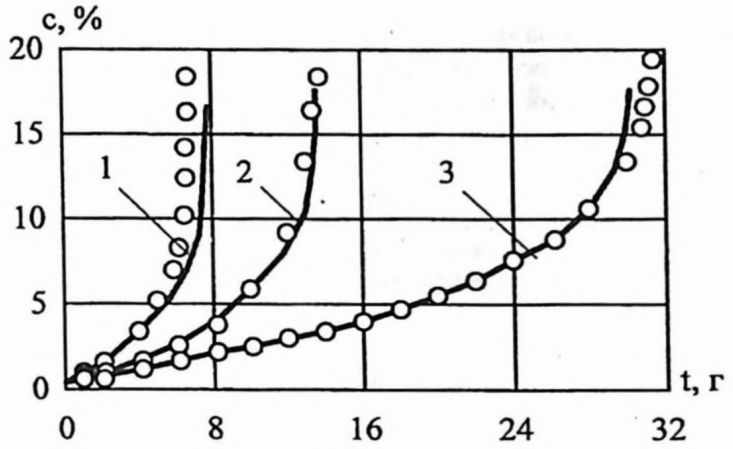

Рис. 2

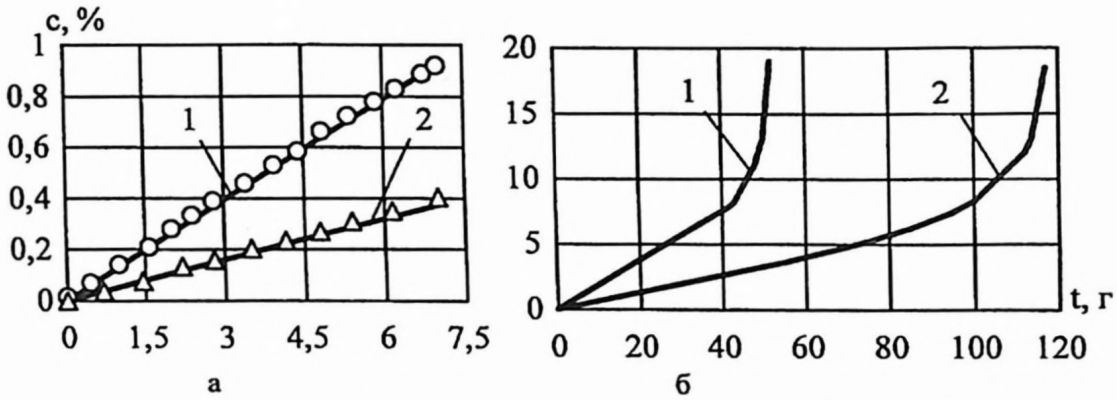

Рис. 3

На рис. 3,а наведені розрахункові та експериментальні дані по повзучості у перші сім годин, а на рис. 3,б - до руйнування зразків, що випробувались на циклічну повзучість. Прикладене навантаження змінювалось за законом $\sigma = \sigma_m (1 + \sigma_a/\sigma_m \sin 2\pi ft)$, де $\sigma_m = 27$ МПа, $\sigma_a = 13.5$ МПа, $f = 290$ Гц. Вплив циклічної складової є дуже помітним. У випадку, коли параметр асиметрії циклу навантаження $A = 0.5$ (криві 1), швидкість циклічної повзучості істотно зростає у порівнянні зі статичною (криві 2), а час до руйнування скорочується майже вдвічі.

Виконані окремі тестові розрахунки, які дозволили встановити достовірність результатів шляхом порівняння розрахункових даних, одержаних з використанням запропонованого методу розрахунку, з даними, що є в літературі, та одержані іншими авторами.

Як приклад наведемо дані з порівняння розрахунків з результатами експериментальних досліджень повзучості й руйнування циліндричних оболонок зі сталі 20, що виконані Ш.Н. Кацем в ЦКТІ (Санкт-Петербург) [4]. Використовуючи рівняння стану з функціями Φ_m та Ω_m виду (10), по кривих повзучості й довготривалої міцності, що наведені у роботі [4], визначені такі значення матеріальних сталих: $E = 1.643 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $B = 3.19 \cdot 10^{-17}$ МПа$^{-n}$ /г, $D = 1.78 \cdot 10^{-17}$ МПа$^{-n}$ /г, $n = k = m = 6.12$, $r = q = 1$, $L = 11.513$.

Виконано розрахунки циліндричних оболонок, що знаходяться під тиском 10.9 МПа в умовах повзучості при $T = 500°C$ з середнім радіусом 17.9 мм, товщиною стінки 1.8 мм та довжиною 370 мм. Встановлено, що експериментальні та розрахункові дані

найкраще відповідають одне одному у випадку, коли еквівалентні напруження у кінетичному рівнянні пошкоджень відповідають критерію максимальних нормальних напружень. При цьому розрахунковий час до руйнування складає 1189 годин, а експериментальний - 1176 годин.

Порівняння розрахункових та експериментальних даних для кільцевих деформацій повзучості наведено на рис. 4, де суцільними лініями показано експериментальні значення деформацій повзучості у двох перетинах (А, В) оболонки під внутрішнім тиском, а пунктиром - розрахункові. При розрахунках приймалось, що до статичного внутрішнього тиску додається циклічна складова навантаження вздовж оболонки (крива 1 - 0 кН, 2 - 3 кН, 3 - 9 кН, 4 - 15 кН). Видно, що результати розрахунків цілком задовільно відповідають експериментальним, а вплив циклічної складової є суттєвим.

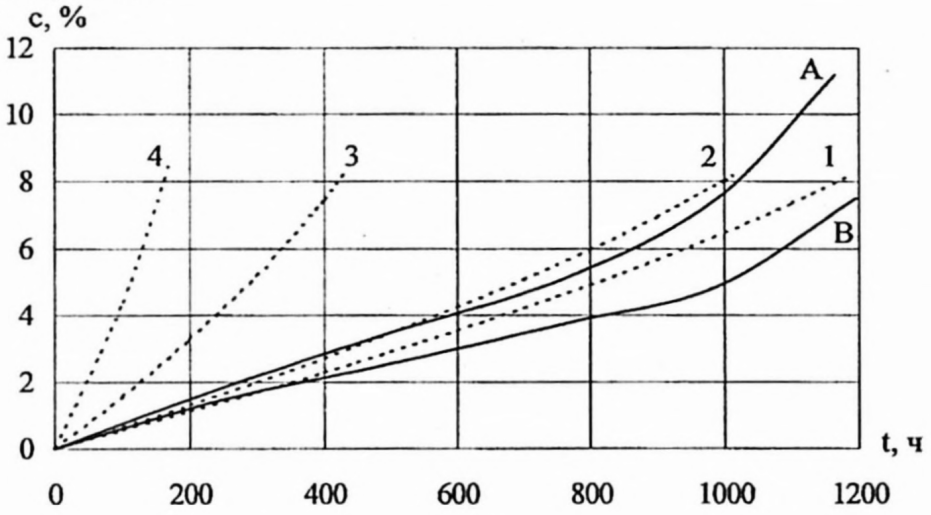

Рис. 4

Summary. Creep of shells deformed and destructed under cyclic loading is considered. Limited elements method is used.

Література

1. Морачковский О.К. О нелинейных задачах ползучести тел при воздействии быстро осциллирующего поля // Прикл. Механика.- 1992.- Т.28.- №8. - С. 17-23.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. - М.: Мир, 1975. - 539 с.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 752с.
4. Кац Ш.Н. Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика.- 1955.- №11.- С. 37 - 40.