УДК. 519.21:621.319.44

Я. Драган, Л. Сікора, Л. Чорна, Б. Яворський,

ЕНЕРГЕТИЧНА ТЕОРІЯ - ЛОГІЧНА ПІДСТАВА ВИОКРЕМЛЕННЯ КЛАСІВ СТОХАСТИЧНИХ СИГНАЛІВ ТА СПЕЦИФІКАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЇХ ОПРАЦЮВАННЯ

Обгрунтовано принципи виокремлення класів стохастичних сигналів на підставі і засобами енергетичної теорії стохастичних сигналів з метою специфікації в сенсі Кнута-Єршова алгоритмів статистичного опрацювання та тлумачення отримуваних при цьому результатів.

ВСТУП

При вивченні перетворень сигналів з метою отримання відомостей та даних, обгрунтуванні алгоритмів статистичного опрацювання останніх для формування з них інформації про досліджувані об'єкти, яка служить підставою для прийняття рішень, істотну роль відіграють зображення моделей сигналів, покладених в основу випрацювання методів перетворень і аналізу. Модель - це математичний об'єкт, який у стислій, зручній і конструктивній формі втілює у своїй структурі суттєві для розв'язання певного класу задач сторони (ознаки, властивості) досліджуваного об'єкта. У випадку сигналів, загальними моделями є ті чи інші, адекватні об'єктам і задачам водночас, види випадкових процесів (ВП). ВП за означенням поєднує в одному математичному об'єкті з одного боку випадковість (в сенсі теорії ймовірностей) конкретних значень, а з другого - мінливість цих випадкових величин, яка описується закономірностями зміни їхніх імовірнісних характеристик. З формального погляду випадковий процес - це абстрактна в сенсі Бохнера функція часу зі значеннями у просторі випадкових величин, вимірна щодо добутку мір: лебегової на осі часу і ймовірнісної в області значень. Такий погляд дає підставу для енергетичної концепції, коли енергетичні характеристики сигналу: його (повна) енергія чи середня (за час існування) потужність є скінченні і трактуються як норми у відповідних гільбертових просторах, що їх елементами є згадані абстрактні функції. Цей факт визначає апарат аналізу і дає засоби його створення [17].

Широке впровадження технічних засобів для обчислень, з одного боку, полегшило доступ до теоретичних результатів спеціалістів найрізноманітніших областей науки, техніки тощо. З іншого боку, виникла небезпека некоректних обчислень, з точки зору узгодженого вибору методів і алгоритмів, інтерпретації отримуваних результатів, автоматизації цих процесів. Для розв'язку цієї проблеми й потрібна специфікація [1,19] алгоритмів перетворень і статистичного опрацювання сигналів з метою отримання із них даних. Остання можлива при запровадженні класифікації [8] моделей сигналів.

При такому підході отримуємо суттєве доповнення, розвій і завершення кореляційної теорії, яку ще називають теорією другого порядку, оскільки кореляційна функція (або, як скорочено називатимемо її, коваріація) є мішаним другим центральним моментом розподілу $r(t,s) = \int_{\Omega^2} \xi_t(\omega)\overline{\xi_s(\omega)}P(d\omega) = \mathrm{E}\overset{0}{\xi}(t)\overline{\overset{0}{\xi}(s)}$. Тут E - символ (обчислення) матсподівання, а ^{0} - центрування: $\overset{0}{\xi} = \xi - \mathrm{E}\xi$.

Кореляційна теорія є повною для стаціонарних процесів і вичерпною, коли вони до того ж гаусові. У випадку стаціонарності, характеристики процесу не залежать від часу. Матсподівання і дисперсія сталі величини, а коваріація є функцією одного

аргументу $t\text{-}s$, тобто $r(t,s)=R(t-s)$. І стаціонарність рівносильна зображності процесу у вигляді суперпозиції гармонік з некорельованими коефіцієнтами: модулі їх як комплексних чисел дають амплітуди гармонік, а аргументи - їх фази.

Для нестаціонарних процесів розвинуте М.Лоевом [10] числення загальних випадкових функцій другого порядку рівносильне дослідженню властивостей коваріацій як функцій додатньо означеного типу (д.о.т.), тобто таких, що

$$\sum_{k,j=\overline{1,N}} c_k \overline{c_j} r(t_k,t_j) \geq 0 \qquad (1)$$

при всяких $t_k \in R$, $c_k \in C$ і цілих $N \in Z$ (R,C,Z - множини відповідно дійсних, комплексних і цілих чисел). Підставою такої термінології є факт, що в разі стаціонарності процесу коваріація буде додатньо означеною (д.о.)

$$\sum_{k,j=\overline{1,N}} c_k \overline{c_j} R(t_k - t_j) \geq 0 \qquad (2)$$

тобто д.о.т. зводиться до додатньої означеності. Ці факти, встановлені Лоевом упродовж 1945-46 рр., були узагальненням праць А.Колмогорова та Г.Крамера 1940-1942 рр. про гармонічний розклад коваріяцій і самих процесів, введений А.Хінчином (1934 р.) та Є. Слуцьким (1937 р.).

Лоев показав замкнутість, як він називає, класу коваріацій, тобто загальних функцій д.о.т. щодо додавань, множень і граничного переходу. І що найважніше, під назвою гармонізовності показав можливість гармонічного розкладу нестаціонарних випадкових процесів і рівносильність його до гармонізовності коваріації процесу, а ця гармонізовність означає зображеність її у вигляді (зрозуміло, що в даному разі, подвійного) інтегралу Фур'є-Стільтьєса:

$$r(t,s)=\iint_{R^2} e^{i(\lambda-s\mu)} d\lambda d\mu \Gamma(\lambda,\mu) \qquad (3)$$

за умови його абсолютної збіжності - обмеженості варіації розподілу

$$\iint_{R^2} \left| d\lambda d\mu \Gamma(\lambda,\mu) \right| < \infty \qquad (4)$$

А щодо того, коли це має місце, він поставив проблему: охарактеризувати гармонізовні коваріації, тобто гармонізовні функції д.о.т.

Безперечно, на ніяку фізичну інтерпретацію у Лоева навіть натяків немає. Хоч зрозуміло, що інваріантний ("гармонічний") фільтр із сигналу вибере відповідно до його "прозорості", вузьку смугу гармонік, бо він "не знає" як трактується поданий на його вхід сигнал: як реалізація стаціонарного випадкового процесу чи нестаціонарного. До речі, такі "спектральні вирізки" за допомогою ідеальних фільтрів, не називаючи їх явно, і використовував Лоев при вивченні гармонізовності. Лоев як математик відчув потребу розповсюдити гармонічні розклади на нестаціонарні процеси і навіть ввести термін, що описує властивість - мати такий розклад, який "законно", як думали на той час, притаманний тільки стаціонарним процесам: наявність спектру - автоматичний наслідок статистичної стаціонарності, як твердив А. Колмогоров [9], "не помітивши" праць Лоева і їх відношення до теорії коливань, так само як і результату Крамера [16] про рівносильність (логічну еквівалентність) стаціонарності і некорельованості складових гармонік. Отже, Лоев зробив рішучий крок, але власне означення гармонізовності процесів, як годиться у кореляційній теорії, через властивості коваріацій, опису відповідного їх класу дати йому не вдалося. Тому справи класифікації ці спроби не просунули вперед, бо не прояснилось, що таке нестаціонарний, нехай і гармонізовний, випадковий процес. А введення ним в один час з К.Каруненом відомого розкладу Карунена - Лоева тільки усугубило неясність. Проблему гармонізовності дещо покращив Ю.Розанов [13], давши інше розуміння інтегралу (3) як збіжного за умови скінченності варіації

$$\sup_{|\varphi|\le 1,|\psi|\le 1}\left|\iint\varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}d\lambda d\mu F(d\lambda,d\mu)\right|<\infty \qquad (5)$$

в дусі Радона. Ця умова слабша за Лоевову, тому справедлива для ширшого кола процесів. Але тут знову постала дилема, бо Розанов у праці [13] розглянув, як твердив, два класи нестаціонарних випадкових процесів, на які (очевидно, що по-різному) узагальнюється кореляційна теорія стаціонарних: поряд з гармонізовними у його розумінні, виокремив у розвій ідей А.Блан-Лап'єра та Р.Форте [15] ще клас процесів, що мають спектр, тобто для яких існує при всіх значеннях $u \in R$ границя

$$B(u)\doteq\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}r(t+u,t)dt, \qquad (6)$$

а про фізичний сенс такого "подвійного усереднення" ставив питання вже пізніше О.Харкевич [14].

Хоч остання умова вираженf у термінах властивостей коваріацій, але умови гармонізовності, ще раз підкреслbмо, Розанова як і Лоева - подані у термінах властивостей спектральних розподілів, тому "проблема Лоева" і тут не вирішується і справа класифікації не прояснюється. Вона ще більше заплутана введенням "класу" процесів, що мають спектр.

Оскільки зображення моделей стохастичних сигналів - випадкових процесів, тобто вираження їх як суперпозицій (лінійних комбінацій) елементарних складових, які є добутками невипадкових координатних функцій на випадкові коефіцієнти (своєрідне розділення змінних) описує, як показали Є.Слуцький та П.Леві, лінійна теорія у термінах властивостей коваріацій процесів (і матсподівань, які для спрощення аналізу покладемо рівними нулеві, бо для аналізу їх досить методів звичайної теорії функцій), то достатні засоби класифікації слід шукати, виходячи з кореляційної теорії. Згадане "розділення змінних" є по суті спеціальним варіантом первісної ідеї покладеної в основу методу Фур'є - розділення у зображеннях функцій двох аргументів залежностей від змінних, що мають відмінні між собою інтерпретації. В разі випадкових процесів їхні два аргументи не рівноправні: час упорядкований і фіксується на числовій осі, а множина елементарних подій не впорядкована. Хоч випадкові процеси можна, як це робили А.Колмогоров і В. Пугачов, вивчати засобами теорії гільбертового простору випадкових величин як функцій на просторі елементарних подій, але для фізичної інтерпртації природніше часове подання. Теорія другого порядку в розвиток концепції введення випадкових величин як числових функцій (замість подій) "виключає" з розгляду цей невпорядкований аргумент процесу і зводить вивчення процесів до вивчення їхніх коваріацій - д.о.т. функцій двох упорядкованих аргументів, для чого застосовні методи сучасного функціонального аналізу, як це показано у працях [4,5,7]. Цим класифікація випадкових процесів зводиться до класифікації їхніх коваріацій.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

Існуюча кореляційна теорія, що бере початок з праць Є.Слуцького, А.Хінчина в разі стаціонарних процесів і числення коваріацій М.Лоева в загальному випадку недостатня для класифікації за винятком виокремлення класу стаціонарних процесів. Критерієм його є умова, що коваріація є фактично функцією однієї змінної, що нею стає різниця її аргументів: $r(t,s)=R(t-s)$. А цей факт є наслідком принципу інваріантності щодо всяких можливих зсувів у часі в застосуванні до коваріації, тобто $r(t+v,s+v)=r(t,s)$ для всіх $v\in R$, що є вираженням незмінності режиму породження процесу. І тоді при $v=-s$ матимемо, що $r(t,s)=r(t-s,0)\overset{\Delta}{=}R(t-s)$. Недоліком такого підходу є слабкість критерію, яка проявляється в тому, що він усіх решту, нестаціонарних, процесів не класифікує. Тут можна б подумати, що ця решта є теж класом. Але як чітко підкреслював В.Налімов [12], нестаціонарні процеси класу

творити не можуть, бо не існує ніякої спільної властивості, яка стала б критерієм, що їх об'єднує. Ніякої теорії, а тим більше методів статистичного аналізу таких процесів існувати не може. Відсутність властивості, в даному разі стаціонарності, критерієм бути не може. Тим більше, що Налімов у розвиток ідей (див. [2]) ряду інших авторів відстоює тезу про потребу виокремлення з нестаціонарних процесів таких класів їх, що до них могли б бути застосовані належним чином змодифіковані методи аналізу стаціонарних. Очевидно, таке виокремлення може бути конструктивним ствердним критерієм.

Теза Налімова цілковито узгоджується з загальним принципом класифікації: в основу її кладуть поняття еквівалентності та півкільця підмножин $P(X)$ певної множини X. Півкільцем називають сім'ю $S \subset X$ підмножин, що є замкнутою щодо перетинів і має властивість: якщо $A, B \in S$, то існують такі підмножини $C_j \in S,\ j = \overline{1,n},$ що $A \setminus B = \bigsqcup_{j=\overline{1,n}} C_j$, де $\setminus$ - символ різниці, а $\bigsqcup$ - диз'юнктного об'єднання, тобто об'єднання безперетинних множин. А відношення еквівалентності означують аксіомами: транзитивності, симетричності та рефлексивності. Воно виокремлює (вибирає із множини) підмножини під певним оглядом рівноцінних (рівноправних щодо критерію), тобто еквівалентних елементів, розбиваючи початкову множину на безперетинні підмножини, які вичерпують усю множину. Їх і називають класами еквівалентності (щодо критерію) елементів C_j, $j=\overline{1,n}$. Таким чином, в загальному класифікація дає виокремлення класів, що визначаються відношенням еквівалентності щодо певного критерію, і ще один $(n + 1)$–ий залишок ("решту") $B = A \setminus \bigsqcup_{j=\overline{1,n}} C_j$, що є свого роду резервом, аналогом "невикористаних можливостей".

А сенс виокремлення класів C_j в тому, що кожен з класів можна трактувати як один абстрактний об'єкт, який описується відповідною кожен своєю теорією. Поодинокі елементи, утотожнені з погляду класу, індивідуалізуються в ньому тільки конкретними (числовими як правило) значеннями своїх характеристик.

Наголосімо спеціально на можливості існування у цій системі виродженого випадку, коли критерій виокремлює один-єдиний клас, а все решта є "залишком". Так за звичай буває. Зокрема так означено стаціонарні ВП, виокремивши їх від решти, яку творять усі можливі нестаціонарні. До множини-залишку так само, як до класів, можна далі стосувати подібну процедуру і виокремлювати підкласи.

В разі випадкових процесів класи їх визначаються критеріями (ознаками), які задають класи коваріацій, як функцій д.о. типу. З визначальної для них умови (1) випливає нерівність Буняковського-Коші:

$$\left|r(t,s)\right|^2 \le r(t,t)r(s,s) = d(t)d(s), \qquad (7)$$

де $d(t)=r(t,t)$ - дисперсія процесу як діагональна функція його коваріації. Тому властивості квадрату коваріації (зокрема існування інтегралу від нього) визначаються властивостями дисперсії.

Оскільки звідси видно, що можливі три види подання (розкладів) коваріацій як функцій двох змінних

$$r(t,s) = \sum_{k,j\in Z} f_{kj}\psi_k(t)\overline{\psi_j(s)} \vee \iint_{D^2} f(\lambda,\mu)\psi(t,\lambda)\overline{\psi(s,\mu)}d\lambda d\mu \vee \iint_{R^2} \psi(t,\lambda)\overline{\psi(s,\mu)}F(d\lambda,d\mu), \qquad (8)$$

де в силу властивості (1) $\left[f_{kj}\right]$ - д.о. матриця*, $f(\lambda,\mu)$ - д.о.типу функція, а $F(\Delta,\Delta')$ - д.о. міра (біміра) відповідно для випадків $t,s\in D\subset R\vee D\subseteq R$, то, в якому б сенсі ці розклади не розуміти, на підставі ізоморфізму $\xi_t\leftrightarrow\psi(t)$ просторів: колмогорівського K і Фрідріхса $H[f]$ та аналогів останнього доводиться, що цим розкладам рівносильні розклади процесів

$$\xi(t)=\sum_{k\in Z}\zeta_k\psi_k(t)\vee\int_D\zeta(\lambda)\overline{\psi(t,\lambda)}dx\vee\int_R\psi(t,\lambda)Z(d\lambda) \qquad (9)$$

з випадковими коефіцієнтами (функціями, мірами) такими, що $E\zeta_k\overline{\zeta_j}=f_{kj}$, $E\zeta(\lambda)\overline{\zeta(\mu)}=f(\lambda,\mu)$, $EZ(\Delta)\overline{Z(\Delta')}=F(\Delta,\Delta')$.

Можливі 4 види таких зображень у відповідності з тим, що як координатні функції можуть бути ортогональними чи ні, так випадкові коефіцієнти - корельованими чи ні [5]. Історично склалося так, що вводились такі зображення, виходячи з різних дочасних потреб, тому і критерії виокремлення їх не тільки ніякої системи не творили, але їх автори в такому напрямку навіть не думали.

2. ПРИНЦИПИ КЛАСИФІКАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ СИГНАЛІВ

Оскільки дисперсія процесу як миттєва потужність визначає, будучи функцією часу, енергетичні властивості сигналу, то на базі енергетичної теорії стохастичних сигналів (ЕТСС), можна показати, що виокремлення типів зображень (8) випливає з традицій функціонального аналізу, коли розглядають функційний гільбертів простір (ГП) типу $L^2(D)$ чи $L^2(R)$ та ізоморфний їм простір послідовностей l^2, а також принципово різний від них [29] несепарабельний ГП B^2 з метрикою Бора-Безиковича

$$\|f\|^2_{B^2}=M_t\left\{|f(t)|^2\right\}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2dt,$$

який широко використовують у теорії майже періодичних функцій. Умовами існування зображень (8) тоді є скінченність норм

$$\|r\|^2_{L^2(D^2)}=\iint_{D^2}|r(t,s)|^2dtds<\infty,\ D\subseteq R$$

у перших двох випадках, а в третьому

$$\|r\|^2_{B^2(R^2)}=M_tM_s\left\{|r(t,s)|^2\right\}<\infty,$$

з чого і випливає критерій класифікації. Далі, що істотно для формування цього критерію, в силу співвідношення (7) скінченність цих норм коваріацій є наслідком скінченності енергетичних характеристик самих сигналів: енергії

$$E=\int_D d(t)\,dt<\infty \qquad \text{(клас ε)}$$

чи відповідно – середньої потужності

$$P=M_t\{d(t)\}<\infty \qquad \text{(клас π)}.$$

А ці величини, у свою чергу, можна подати у вигляді норм у спеціального виду ГП абстрактних (зі значеннями в колмогорівському гільбертовому просторі $K=L_0(\Omega,P)$ центрованих величин скінченної дисперсії) функцій: або вже відомих з

---

* тут є, неузгодженість термінології: д.о. функція - коли вона залежить від різниці аргументів, а в загальному випадку буде функція д.о.т. В разі ж матриць д.о. матриця - це загальна, хоча (для збереження відповідності термінів) так слід би назвати тільки циркулянтні матриці, коли $\sum_{k,j=\overline{1,K}}c_k\overline{c_j}a_{kj}\geq 0$, а не $\sum_{k,j=\overline{1,N}}c_k\overline{c_j}a_{kj}\geq 0$ (пор. (1) і (2)).

праць А.Балакрішнана та Т.Талдикіна типу L^2 або ж означених у праці [4] типу B^2, тобто:

$$E = \int_D E|\xi_t|^2 dt = \int_D \|\xi_t\|_K dt = \|\xi_t\|^2_{L^2(D,K)},$$

$$P = M_t\left\{E|\xi_t|^2\right\} = M_t\left\{\|\xi_t\|^2_K\right\} = \|\xi\|^2_{B^2(K)}.$$

Тому в силу принципової відмінності L^2 та B^2–метрик, що відповідає сепарабельності чи несепарабельності отримуваних просторів, а також фізичного сенсу їх бачимо, що введені за енергетичним критерієм класи є та π справді є класами ВП зі своєю теорією і своїм математичним апаратом аналізу кожен [7]. Звідси зрозуміло, що звичайна кореляційна теорія, базована винятково на методах ГП K, нічого не може дати для такої класифікації. Тільки ЕТСС, будучи природнім, хоч і далеко не очевидним, розширенням і завершенням кореляційної, відкрила таку можливість.

Енергетичний критерій є складним: виділяє два класи коваріацій і ВП на осі, але в разі задання їх на циклічній групі (типу кола), він дискримінантним не є, бо тоді отримується один клас. Дисперсія в разі неперервного часу скінченною всюди бути не мусить, а тільки майже всюди. Аналогічно розглядаються і сигнали з дискретним часом.

В рамках ЕТСС природнє місце знаходять виокремлені для специфічної потреби (щоб знайти формальну логічну причину ефективності виділення інваріантного класу, що охоплює стаціонарні ВП та інваріантні у часі оператори) класи. Їх об'єднує в один клас та обставина, що вони мають спільну власну систему координатних функцій, що в разі інваріантного класу ними є гармоніки $e^{i\lambda}$, $\lambda \in R$. Узагальнення цього факту будується так, що означуються класи варіантності, визначувані операторами узагальненого зсуву (ОУЗ) [3]. Оскільки коваріації як ядра д.о.т. породжують позитивні оператори у відповідних ГП, то сім'ї комутативних таких операторів творять класи варіантності. Вони мають спільну систему власних функцій, тому можна означити для кожної сім'ї свій ОУЗ T як такий, що його власні числа для різних значень параметра дорівнюють значенням цих власних функцій при значеннях аргументів, рівним значенням параметрів ОУЗ $T^s\varphi(\cdot,\lambda) = \varphi(s,\lambda)\varphi(\cdot,\lambda)$.

А коваріації тоді виражаються за допомогою ОУЗ через функцію однієї змінної:

$$r(t,s) = \widetilde{T}^s R(t),$$

де $R(t)$ – функція з невід'ємним Фур'є–образом щодо перетворення з ядром $\varphi(t,\lambda)$, тобто:

$$R(t) = \int \varphi(t,\lambda) S(d\lambda), \quad S(\Delta) \geq 0.$$

Зокрема, коли $\varphi(t,\lambda) = e^{it\varphi}$, то отримується клас стаціонарних ВП. Його коваріація є д.о. функцією і задовільняє умову (2). Аналогічно досліджуються T класи. коли ОУЗ породжений оператором Штурма-Ліувіля [3].

Іншим важливим класом є ізостаціонарні [6] або, як їх ще називають [18,20], локально-стаціонарні ВП, виділені за цілком іншим критерієм: це ВП з коваріаціями вигляду:

$$r(t,s) = a\left(\frac{t+s}{2}\right) R(t-s),$$

де $a(\cdot) \geq 0$ – невід'ємна функція, а $R(\cdot)$ – д.о., що має властивість (2) коваріації стаціонарного процесу. Означення цього класу задовільняє потребу опису повільної еволюції рівноважного (стаціонарного) стану системи і дають одну з можливостей застосування до аналізу їх стаціонарної теорії.

Зрозуміло, що класи варіантності і так само ізостаціонарні ВП можна означити двох типів як підкласи в кожному з енергетичних класів: є та π. А з цього випливає, що

невинне на перший погляд припущення [20] про існування спектральної густини локально стаціонарного ВП означає перехід до розгляду процесів класу ε, чого напевно навіть не підозрював автор цієї роботи.

3. ПІДКЛАСИ КЛАСУ π.

Трактування скалярного добутку в просторі B^2 як середнього на групі дає змогу виокремлювати підкласи класу π за груповими критеріями. Оператор трансляції, тобто звичайного унітарного зсуву U на всій осі як на адитивній абелевій групі такий, що $U^s f(t) = f(t+s)$, пов'язаний із групою характерів цієї групи, що її творять гармоніки співвідношенням $U^s e^{it\lambda} = e^{i(t+s)\lambda} = e^{it\lambda} e^{is\lambda}$.

Він не тільки відіграє визначальну роль у всьому гармонічному аналізі, але і дає змогу означати (виокремити) природні підкласи класу π та встановити подальшу їх підпорядкованість (ієрархію).

1. Майже періодично корельовані випадкові процеси (майже ПКВП), тобто такі, що зсуви їхніх коваріацій $r(t+\nu,s+\nu)$ є майже періодичними (МП) із класу B^2 функціями величини трансляції $\nu \in R$ і тому мають зображення:

$$r(t,s) = \sum_{k,j \in Z} D_{kj}(t-s) e^{i(\lambda_k t - \lambda_j s)},$$

де $\bar{\lambda} = [\lambda_k]$ – множина (вектор) показників Фур'є цієї МП функції; $[D_{kj}(\cdot)]$ – матриця коваріації нескінченно вимірного векторного ВП стаціонарних компонент, що входять у рівносильне цьому виразові зображення процесу (класу $\pi^{\bar{\lambda}}$),

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{i\lambda_k t},$$

середня потужність якого $P_\xi = tr\, D_{(0)} = \sum_{k \in Z} D_{kk}(0)$, тобто дорівнює значенню сліду цієї матриці-функції в нулі.

2. Полі- (N- кратно) ПКВП такі, що їхні множини $\bar{\lambda}$ мають скінченний теоретико-числовий базис (базис Боля), тобто:

$$\lambda_k = \sum_{j=\overline{1,N}} n_{kj} \Lambda_j, k \in Z,$$

де $n_{kj} \in Z$ – цілі числа, а $\Lambda_j \in R$ – несумірні фундаментальні частоти, $\bar{\Lambda} = [\Lambda_j]$ – їхній базис (клас $\pi^{\bar{\Lambda},N}$).

3. ПКВП – вироджений випадок попереднього (N=1), тобто це такі ВП, що в даному разі показники Фур'є творять арифметичну прогресію $\lambda_k = k\Lambda$, $k \in Z$ з різницею $\Lambda = \frac{2\pi}{T}$, а їхні коваріації – періодичні періоду T щодо сумісних зсувів: $r(t+T, s+T) = r(t,s)$. Останній факт за звичай беруть за критерій означення цього класу – класу π^T.

Якщо ж тепер ще через σ позначимо клас гільбертових стаціонарних ВП, тобто ВП скінченної дисперсії $d(t)=R(0)$, то з цих означень бачимо, що справедлива така ієрархія входження класів

$$\pi \supset \pi^{\vec{\lambda}} \supset \pi^{\vec{\lambda},N} \supset \pi^T \supset \sigma.$$

ВП класів $\pi^T, \pi^{\vec{\lambda},N}, \pi^{\vec{\lambda}}$ служать моделями стохастичних коливань (ритміки) – відповідно простої, N–кратної і складної [7]. Цим зумовлений інтерес до них.

4. СПЕЦИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМІВ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Структури моделей класу ε та класу π та їхніх підкласів внаслідок розпрацьованості їхньої теорії – підстава обгрунтування адекватних кожному з них методів аналізу і специфікації алгоритмів статистичного опрацювання сигналів, а також оцінювання якості алгоритмів та інтерпретації результатів, що здійснюється в термінах властивостей (ознак) моделі.

При цьому, в силу того, що засоби опрацювань сигналів мисляться як пристрої зі сталими параметрами, використовують частинний випадок зображення (8) і (9), коли $\varphi(t,\lambda) = e^{it\lambda}$, тобто

$$r(t,s) = \iint_{R^2} e^{i(t\lambda - s\mu)} F(d\lambda, d\mu), \quad \xi(t) = \int_R e^{it\lambda} Z(d\lambda), \tag{10}$$

що їх з ініціативи М.Лоева називають гармонізовністю (пор. 3-5). А за концепцією ЕТСС звідси для середньої потужності отримуємо вираз:

$$P = M_t\{d(t)\} = M_t\{r(t,t)\} = \int_R F(d\lambda, d\lambda) = \int_R S_D(d\lambda) = S_D(R), \tag{11}$$

де $S_D(\Delta) - = F(\Delta,\Delta)$ – діагональна міра спектральної біміри $F(\Delta,\Delta)=E|Z(\Delta)|^2$, що є дисперсією стохастичної міри $Z(\Delta)$, і є водночас мірою спектрального розподілу потужності (розподілу потужності за гармоніками). Це співвідношення є вираженням закону збереження потужності при розкладі: середня потужність процесу дорівнює сумі потужностей його гармонічних складових.

Аналогічно для процесів класу ε з зображень

$$r(t,s) = \iint_{R^2} f(\lambda,\mu) e^{i(t\lambda - s\mu)} d\lambda d\mu, \quad \xi(t) = \int_R e^{it\lambda} z(\lambda) d\lambda \tag{12}$$

випливає закон збереження енергії:

$$E = \int_R d(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_R f(\lambda,\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_R f_D(\lambda)d\lambda. \tag{13}$$

і що в даному разі існує густина $f_D(\lambda)$ спектрального розподілу потужності, а енергія є інтегралом від цієї густини.

Ці факти показують, що в метриці ЕТСС всі процеси класів ε та π гармонізовні і що спеціального класу гармонізовних процесів не існує, як вважав М.Лоев (і ще категоричніше Ю.Розанов), а інколи навіть говорять про перетин класів ПКВП та гармонізовних [11]), а вирази (10), (11) – варіанти ортогональних розкладів.

Крім того, процеси класів ε та π у ГП над ГП $h^\varepsilon = L^2(R,K)$ та $h^\pi = B^2(K)$ стаціонарні (точніше такими є своєрідні гіперпроцеси, що їх творять множини всіх можливих транслянт процесів)

$$(\xi(t),\xi(s))_{h^\varepsilon} = \int_R r(t+\upsilon, s+\upsilon)d\upsilon = B^\varepsilon(t-s), \quad (\xi(t),\xi(s))_{h^\pi} = M_\upsilon\{r(t+\upsilon,s+\upsilon)\} = B^\pi(t-s).$$

Тому для таких процесів означується поняття h – ергодичності, яке приводить до таких естиматорів коваріацій – інтегральної та середньої

$$\hat{B}^\varepsilon(u) = \int_R \xi(t+u)\overline{\xi(t)dt}, \quad \hat{B}^\pi(u) = M_t\{\xi(t+u)\overline{\xi(t)}\}.$$

Звідси виводяться естиматори коефіцієнтів розкладів коваріацій як інваріантів процесів і алгоритми опрацювання сигналів, моделями яких вони є. А для ПКВП та споріднених з ними - зумовлені їх пов'язанням зі стаціонарними процесами і характером часової зміни характеристик ще й алгоритми, які дають змогу оцінювати цю часову зміну.

ВИСНОВКИ

Енергетична теорія, яка реалізує природнє з погляду фізики виокремлення класів випадкових процесів, узгоджується з давно підміченим фактором, що не всі аспекти гармонічного аналізу краще всього трактувати уніфіковано. Бо вже Ж.-Б.-Ж.Фур'є у своєму відомому трактаті розглядав окремо випадки рядів Фур'є та інтегралів Фур'є. Розкриваючи справжній сенс гармонізовності, стаціонаризовності, лінійності, наявності спектра ЕТСС показує, що випрацювання двох паралельних варіантів теорії виокремлення енергетичних класів є та π розкриває різні аспекти проблеми, будучи кульмінацією і завершенням ідей та результатів багатьох і багатьох дослідників.

Summary. Principles of stochastic signal classes separatrion on the base of the energy theory and by means of this theory with the aim of specification of statistical processing algorithms in the sense of Knuth and Yershov are stated.

Література:

1. Агафонов В.Н. Спецификация программ: понятийные средства и их организация. -Новосибирск: Наука, 1987. -240с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. - М.: Мир, 1974. -454с.
3. Драган Я.П. Модели сигналов в линейных системах. -К.: Наукова думка, 1972. -302с.
4. Драган Я.П. Гармонізовність і спектральний розклад випадкових процесів зі скінченною середньою потужністю // Доповіді АН УРСР. - 1978. - №8. - С.679-683.
5. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. - К.: Наукова думка, 1980. -384с.
6. Драган Я.П. Изостационарно коррелированные случайные процессы // Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов: Тез. докл. Всес. н.-т. конф. -Новосибирск: Изд. Сиб.НИИИ метрологии, 1991. - С.8-9.
7. Драган Я.П. та ін. Прикладна теорія випадкових процесів і полів -Вид.Терноп. приладобуд. ін-ту, Харків-Львів-Тернопіль, 1993. -248с.
8. Драган Я.П., Яворський Б.І. Класифікація та розпізнавання сигналів // Праці третьої всеукраїнської міжнародної конф. Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів "УкрОБРАЗ'96". - Київ: Вид. Укр. асоц. з обробл. інформ. та розпізнав. обр. -1996. С.47-49.
9. Колмогоров А.Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром // Юбил.сбор. -М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. -С.242-252.
10. Лоев М. Теория вероятностей. -М.: ИИИЛ, 1962. -718с.
11. Мыслович М.В., Приймак Н.В., Щербак Л.Н. Периодически коррелированные случайные процессы. - К: Знание, 1980. -25с.
12. Налимов В.В. Теория эксперимента. -М.: Наука, 1971. -207с.
13. Розанов Ю.А. Спектральный анализ абстрактных функций // Теория вероятностей и ее применение. - 1959. - Т.4, вып.3 - С.291-310.
14. Харкевич А.А. Спектры и анализ. -М.: Физматиздат, 1962. -134с.
15. Blanc-Lapierre A., Fortet R. Theorie de function aleatoires. - Gauthier-Villars, Paris. 1953.
16. Cramer H. On harmonic analysis in certain functional spaces // Arkiv for math.astr.och.fysic. - 1942, Bd.28B. - №12. - P.1-7.
17. 17. Dragan Ya., Yavorskyi B., Chorna L., Sikora L. Energy theory of stochastic signals, classes separation and statistical algorithms specification // Proc. 1st conf. of signal analysis and prediction. – Prague: ICT Press. - 1997. - P.129–132.
18. Hurd H.L. Stationarizing properties of random shifts // SIAMJ. Appl.math. - 1974. - v.26, N1. - P.203–212.
19. E.Knuth, Demetrovics Z., P.Rado Computer Aided Specification Technique. - Word Scientific Publishing Co.: Ptc. Ltd. - 1985. - 123p.
20. Silverman R.A. Locally stationary random process // IRE Trans.of inf.th. - 1957. - V.IT–3, №8. - P.182–187.