УДК 621.3.01

В. Чабан, Р. Гущак

КОМП'ЮТАЦІЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОМАҐНІТНОГО ПОЛЯ НА МЕЖІ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Пропонується метод обчислення вектор-потенціалу електромагнітного поля на межі двох середовищ за алгебричними виразами, не звертаючись до усередження параметрів середовища, як це вживається на практиці.

Відомі алгоритми аналізу електромагнетних полів на основі рівнянь вектор-потенціалу передбачають обчислення усереднених релактивностей на межі двох середовищ і покриття зони інтегрування просторово дискретизаційною сіткою, одержаною за формулами диференціювання. Разом з тим, з точки зору класичної електродинаміки, рівняння електромагнітного поля не можуть бути застосовані. Їх необхідно замінити крайовими умовами. А це значить, що вектор-потенціал у граничних вузлах повинен визначатися

через його значення у сусідніх, не граничних, вузлах. Такому розв'язанню проблеми присвячена дана праця.

Вектори **B** і **H** магнетного поля знаходимо за просторово -часовим розподілом вектор-потенціалу **A**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B}, \tag{1}$$

де ν - стала релактивність.

Розглянемо практичний випадок, коли задовольняється умова $\mathbf{A}=x_0 A$. Тоді перший вираз (1) у декартових координатах набуває вигляду

$$B_y = \frac{\partial A}{\partial z}; \quad B_z = -\frac{\partial A}{\partial y} \tag{2}$$

Для вертикальної межі середовищ (рис.1), згідно з (1), (2) можемо записати рівність тангенціальних (y-вих) компонентів вектора **H**

$$\nu^L \frac{\partial A^L}{\partial z} = \nu^R \frac{\partial A^R}{\partial z}. \tag{3}$$

Тут верхні індекси L і R вказують на причетність до межі при підході зліва і справа відповідно.

Замінивши в (3) частинні похідні для i,k-го вузла однокроковими формулами диференціювання зліва назад, а справа - вперед і розв'язавши отримані рівності відносно $A_{i,k}$, одержимо остаточно [3]

$$A_{i,k} = \frac{\nu^L_{i,k} A_{i-1,k} + \nu^R_{i,k} A_{i+1,k}}{\nu^L_{i,k} + \nu^R_{i,k}}. \tag{4}$$

Вираз (4) дає змогу обчислити значення вектор-потенціалу у граничних вузлах за їх значеннями у сусідніх (негранічних). На його підставі можна сформулювати правило. *Вектор-потенціал електромагнітного поля у граничному вузлі на межі двох середовищ визначається часткою від ділення суми добутків релактивностей цього вузла і вектор-потенціалу сусіднього вузла в кожному середовищі зокрема на суму цих релактивностей.*

У випадку нелінійного ізотропного середовища ν^L, ν^R у формулах (4) виражаються так:

$$\nu^j_{i,k} = \nu^j_{i,k}(\sqrt{B_y^2 + B_z^2}), \qquad j = L, R.,$$

де B_y і B_z обчислюємо за формулами (2) проводячи просторову дискретизацію так, щоб вузли $A_{i,k}$ належали лише середовищу, що відповідає індексу j, або його межі. Наприклад:

$$\nu^L_{i,k} = \nu^L_{i,k}(\sqrt{B_y^2 + B_z^2}); \quad B_y = \frac{A_{i,k} - A_{i-1,k}}{\Delta z}; \quad B_z = -\frac{A_{i,k+1} - A_{i,k-1}}{2\Delta y}.$$

Тут Δz, Δy - просторовий крок за осями z та y відповідно.

На підставі (4) можна знайти вираз для вектор-потенціалу у вершині прямого кута розподілу двох середовищ, межа яких збігається з його сторонами.

Застосовуючи (4) для горизонтальної і вертикальної меж в i,k-му вузлі (рис.1) можемо записати [3]

$$A_{i,k} = \frac{A_{i,k-1}A_{i+1,k} - A_{i,k+1}A_{i-1,k}}{(A_{i,k-1} + A_{i+1,k}) - (A_{i,k+1} + A_{i-1,k})}. \qquad (5)$$

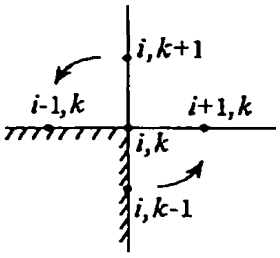


Рис. 1. Сітка для побудови різницевого рівняння

Вираз (5) одержано для випадку, коли прямий кут меж середовища займає нижній лівий квадрант. Для решти трьох квадрантів у (5) індекси зазнають переадресації. Тому, щоб кожен раз не звертатися до математичних побудов, скористаємось одержаним для цього правилом.

Вектор-потенціал електромагнітного поля у вершині прямокутного кута, сторони якого належать межі розподілу двох середовищ, визначаються часткою від ділення різниці двох попарних добутків значень вектор-потенціалу сусідніх вузлів, якщо обходити ці вузли проти годинникової стрілки, починаючи з граничного вузла назовні, на різницю відповідних попарних сум значень вектор-потенціалу у цих вузлах.

Практика комп'ютації квазістаціонарних електромагнітних полів у рухомих і нерухомих середовищах підтвердила, що вирази (4) і (5) не тільки сприяють підвищенню точності, але й що найважливіше, забезпечують вищу стійкість обчислювального процесу.

Розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають внаслідок просторової дискретизації рівнянь електромагнітного поля, методом Ньютона тут практично важко, оскільки він потребує обчислення матриці Якобі надзвичайно високого порядку. Ми використовували методи нульового порядку, зокрема метод Зейделя. Однак, тут неминуче виступає відома проблема чисельної збіжності обчислювального процесу. Збіжність ітераційного процесу залежить від багатьох факторів, зокрема від конфігурації розрахункової зони, розмірів просторової сітки, величини часового кроку дискретизації, параметрів середовища, ступеня насичення феромагнетика, швидкості переміщення середовища. У кожній конкретній задачі слід заново знаходити оптимальну взаємозалежність цих факторів. Задовільні можливості для регулювання збіжності методу простої ітерації показав метод релаксації. Згідно з цим методом, значення невідомих на новій ітерації обчислюємо так:

$$A^{j+1} = A^j + w(A_z^{j+1} - A^j)$$

де w - параметр релаксації, A^j - значення невідомого на j-ій ітерації, A_z^{j+1} - значення невідомого на j+1-ій ітерації за методом Зейделя. На рис. 2 показано просторовий розподіл вектор-потенціалу на зубцевому діленні електричної машини з рухомим ротором в одному з електромеханічних процесів. Тут можливі різні комбінації магнітопроводів, шихтованих і нешихтованих. Усі ці комбінації нами досліджені, але в даній праці використані результати для

випадку шихтованого статора і ротора. Результат ліворуч отримано за запропонованим шаблоном. Результат посередині одержано за традиційним різницевим шаблоном на межі двох середовищ за законом повного струму [1,2]. Для наочності покращання точності праворуч показано різницю одержаних результатів між запропонованим та традиційним шаблонами. Як бачимо, вона є суттєвою. Цікаво відмітити, що відомий приблизний метод усереднення релактивностей на межі двох середовищ у зубчастих структурах взагалі неприйнятний із-за розбіжності процесу.

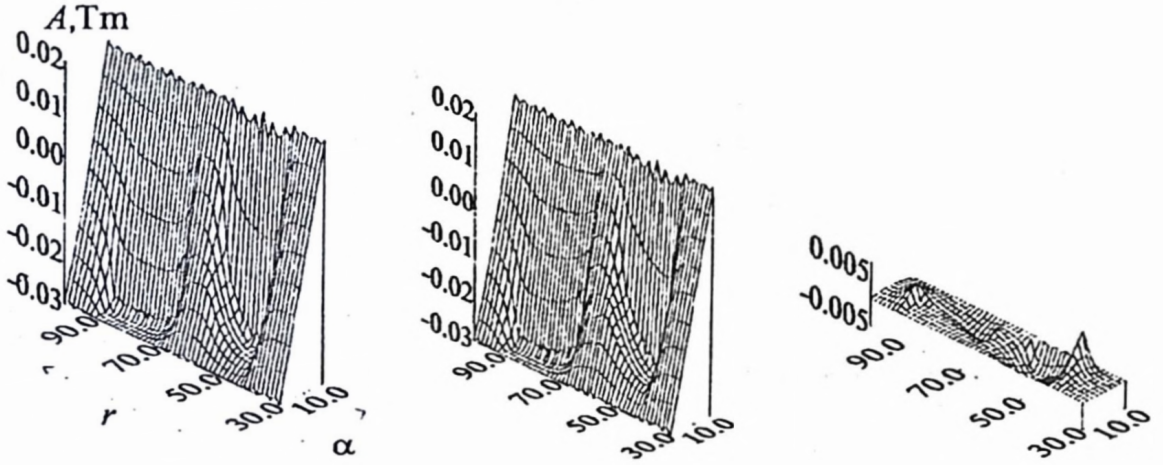


Рис. 2. Просторовий розподіл вектор-потенціалу

Summary. Method of calculation of electromagnetic field vector-potential on the two media border by means of algebraic equations is proposed. Absence of use of average values of media parameters is the main difference of this work from other known in this field.

Література

1. Binns K.J, Lawrenson P.J. Analysis and computation of electric and magnetic field problems. - Pergamon Press, Oxford, 1963.- 370 p.
2. Демирчян К.С., Чечурин В.А. Машинный расчет электромагнитных полей. - М.: Высшая школа. 1986.- 240 с.
3. Чабан В.Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів. -Львів, 1997.- 340 с.