УДК 621.37:519.21

О. Маляренко, Б. Марченко

ПУАСОНІВСЬКІ СПЕКТРИ СТРИБКІВ ЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У статті сформульовано та розв'язано задачу визначення пуасонівського спектра стрибків нестаціонарного лінійного випадкового процесу. Проведено детальний аналіз цієї характеристики для одного класу лінійних процесів з експоненціально-синусним ядром.

Вступ

Лінійні випадкові процеси (ЛВП) [1] знайшли широке застосування як математичні моделі різноманітних інформаційних сигналів та перешкод [2, 3, 4, 5]. Будучи функціоналами від стохастично неперервних випадкових процесів з незалежними приростами, ЛВП з неперервним часом мають безмежно подільні розподіли і характеризуються у відповідності з

канонічними формами зображення характеристичних функцій цих розподілів [6], спектрами стрибків. Розгляду властивостей цієї хактеристики: ЛВП та питанням її практичного використання присвячено такі роботи як, наприклад, [7, 8]. Ми продовжимо ці дослідження у даній статті і наведемо спочатку деякі загальні для ЛВП результати, що включають і нестаціонарний випадок, а потім розглянемо один клас процесів з експоненціально-синусним ядром, які називають ще експоненціально-синусними шумами.

Постановка та розв'язок задачі

Постановка задачі. На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \Im, P_T\}$, де $T \subset R$ - параметрична множина в евклідовому просторі, задано лінійний випадковий процес:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in T, \tag{1}$$

де $\{\eta(\tau), \ \eta(0) = 0, \ \mathbf{P}[\eta(\tau) = -\eta(-\tau)] = 1, \ \tau \in R\}$ - породжуючий процес, гільбертовий стохастично неперевний випадковий процес із незалежними приростами[1]; $\varphi(\tau, t)$ - невипадкова числова функція, для якої $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^p(\tau, t) d\kappa_p(\tau) \right| < \infty, \quad p = 1,2$, де $\kappa_p(\tau)$ - кумулянтна функція p-го порядку процесу $\eta(\tau)$.

Згідно з [6] одновимірна характеристична функція (ХФ) породжуючого процесу у формі Колмогорова має вигляд

$$f_\eta(u; t) = \exp\left\{ i\hat{u} m_\eta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\hat{u}z} - 1 - i\hat{u}z) \frac{d_z K_\eta(z, \tau)}{z^2} \right\}, \tag{2}$$

де $\hat{u} = u \cdot sign(\tau); \quad m_\eta(\tau) = \mathbf{M}\eta(\tau); \quad K_\eta(z, \tau), \ z \in R$ - спектр стрибків процесу $\eta(\tau)$ у формі Колмогорова, є неспадна неперервна зліва обмежена функція, відносно якої звичайно вважають: $\forall \tau, \ K_\eta(-\infty, \tau) = 0$, звідки $K_\eta(\infty, \tau) = \mathbf{D}\eta(\tau)$.

Згідно з [1] одновимірна ХФ процесу $\xi(t)$ в цьому випадку має вигляд:

$$f_\xi(u; t) = \exp\left\{ iu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) dm_\eta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iuz\varphi(\tau,t)} - 1 - iuz\varphi(\tau, t)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{d_{z\tau} K_\eta(z, \tau)}{z^2} \right\}. \tag{3}$$

Постає питання, як визначити спектр стрибків процесу $\xi(t)$. По суті це задача про приведення ХФ вигляду (3) до канонічної форми безмежно подільних ХФ.

Розв'язок. Виходячи з умов задачі, можна показати, що процес $\xi(t)$ є гільбертовим, тому розв'язок будемо шукати у формі Колмогорова. Тоді

[1]Нас цікавитиме тільки випадок породжуючого процесу без гаусівської компоненти.

шуканий спектр стрибків $K_\xi(x,t)$ процесу $\xi(t)$ у всіх точках неперервності по x визначається [9]:

$$K_\xi(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iuy}-e^{-iux}}{iu}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t)\,du. \quad (4)$$

У точках розриву ця формула визначає середнє арифметичне значення границь $K_\xi(x,t)$ зліва і справа за x.

Для ХФ (3) маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln f_\xi(u;t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau,t)e^{iuz\varphi(\tau,t)}d_{zt}K_\eta(z,\tau). \quad (5)$$

Тому, підставляючи (5) у (4) та, зважаючи на рівномірну збіжність інтегралу, змінюючи порядок інтегрування, переписуємо (4) таким чином:

$$K_\xi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau,t)\lim_{y\to-\infty}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iuy}-e^{-iux}}{iu}\times \quad (6)$$
$$\times\ e^{iuz\varphi(\tau,t)}\,du d_{z\tau}K_\eta(z,\tau).$$

З урахуванням [10] маємо:

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iuy}-e^{-iux}}{iu}\,e^{iuz\varphi(\tau,t)}\,du =$$
$$= \pi\{sign(x-z\varphi(\tau,t)) - sign(y-z\varphi(\tau,t))\}.$$

Тоді

$$\lim_{y\to-\infty}\pi\{sign(x-z\varphi(\tau,t)) - sign(y-z\varphi(\tau,t))\} = \quad (7)$$
$$= \pi\{sign(x-z\varphi(\tau,t)) + 1\}$$

Враховуючи, що (7) перетворюється в нуль при $x < z\varphi(\tau,t)$, остаточно можемо записати:

$$K_\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau,t)U(x-z\varphi(\tau,t))d_{z\tau}K_\eta(z,\tau), \quad (8)$$

де $U(y)$, $y\in R$ - одинична функція Хевісайда.

Вираз (8) є узагальненням на нестаціонарний випадок отриманих у [8] результатів і дає загальний розв'язок задачі, якщо функції $\varphi(\tau,t)$ та $K_\eta(z,\tau)$ є заданими.

Досить часто на практиці породжуючими виступають гільбертові узагальнені процеси Пуасона з незалежними приростами, які характеризуються такими властивостями:

- усі стрибки процесу $\eta(\tau)$ є одинаково розподіленими випадковими величинами з функцією розподілу $F(z,\tau)$;
- розподіл стрибків не залежить від моменту їх виникнення.

Для таких процесів

$$d_{z\tau}K_\eta(z,\tau) = z^2 dF(z,\tau)d\beta(\tau),$$

де $\beta(\tau)$ - провідна функція розподілу Пуасона [11], і тоді вираз (8) приймає такий вигляд:

$$K_\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau,t) \int_{-\infty}^{\infty} z^2 U(x - z\varphi(\tau,t)) dF(z,\tau) d\beta(\tau). \quad (9)$$

Перетворимо внутрішній інтеграл. Для цього введемо позначення

$$k(y,\tau) = \int_{-\infty}^{y} z^2 dF(z,\tau), \ y \in R. \quad (10)$$

Для процесів, що розглядаються, $k(y,\tau)$ є функцією розподілу в широкому розумінні.

Тоді внутрішній інтеграл виразу (9) є $k\left(\frac{x}{\varphi(\tau,t)},\tau\right)$. У точках, де $\varphi(\tau,t) = 0$ при $x \neq 0$, приймаємо $k\left(\frac{x}{\varphi(\tau,t)},\tau\right) = k(\infty,\tau)$.

Тепер вираз (9) остаточно можна записати так:

$$K_\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau,t) k\left(\frac{x}{\varphi(\tau,t)},\tau\right) d\beta(\tau), \quad (11)$$

при цьому функція $\varphi(\tau,t)$ може тотожньо дорівнювати нулеві на будь-якому інтервалі з R.

Отже, вираз (8) та його окремий випадок (11) дають можливість досліджувати спектри стрибків ЛВП в залежності від виду ядра інтегрального зображення (1) та характеристик породжуючого процесу.

Приклад та аналіз результатів

Тепер розглянемо один із можливих підходів до такого дослідження на прикладі експоненціально-синусних (ЕС) шумів, тобто процесів виду (1), для яких

$$\varphi(\tau,t) \equiv \varphi(s) = \gamma \cdot e^{-\beta s} \sin(\theta s) U(s), \ s = t - \tau, \ s \in R,$$

де β, θ - додатні дійсні константи; $\gamma = (\beta^2 + \theta^2)/\theta$ - нормуючий множник. Такі процеси використовувались нами для математичного опису, наприклад, шумів у каналах модуляції [3], сигналів акустичної емісії [4], різного роду вібросигналів [5] та інш., тобто сфера їх використання досить широка. Для визначеності розглянемо ЕС-шум, породжений однорідним узагальненим процесом Пуасона, який заданий густиною розподілу стрибків:

$$p(z) = \begin{cases} b \cdot e^{-bz}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

та провідною функцією розподілу Пуасона $\beta(\tau) = \lambda|\tau|$.

В умовах прикладу

$$k(y,\tau) = \int_{-\infty}^{y} z^2 p(z) dz = \begin{cases} \frac{2}{b^2} - e^{-by}\left(y^2 - \frac{2y}{b} + \frac{2}{b^2}\right), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Підставивши в (11) і позначивши $\phi(s) = \varphi(s)/b$, отримуємо:

$$K_\xi(x) = \begin{cases} \mathbf{D}\xi(t) - \lambda \int\limits_{s:\phi(s)\geq 0} \Phi(x,s)ds, & x \geq 0; \\ \lambda \int\limits_{s:\phi(s)<0} \Phi(x,s)ds, & x < 0, \end{cases} \qquad (14)$$

де $\Phi(x,s) = e^{-\frac{x}{\phi(s)}}\left[(x+\phi(s))^2 + \phi^2(s)\right]$.

Вираз (14) є розв'язком поставленої задачі. Тепер зупинимося на дослідженні спектра стрибків (14) при зміні параметрів ядра (β, θ) і породжуючого процесу (b, λ). На рис.1 та 2 зображена множина функцій $K(x)$, обчислених для кількох значень одного із згаданих параметрів при фіксованих інших. Аналіз кривих дає можливість зробити такі висновки.

1. Збільшення коефіцієнта згасання β (нагадаємо, що діапазон його змінювання - $0 < \beta \leq \theta$) приводить до зменшення потужності процесу і зменшення кількості та величини від'ємних стрибків у спектрі (рис. 1). При $\beta = \theta$ від'ємні стрибки відсутні, оскільки $\varphi(s)$ згасне швидше, ніж встигне перетнути вісь абсцис.
2. Збільшення частоти $\theta\,(\theta \geq \beta)$ приводить до збільшення потужності процесу і зростання кількості та величини стрибків у спектрі (рис. 2). Це пояснюється збільшенням кількості осциляцій функції $\varphi(s)$ до її згасання.
3. Із збільшенням параметра b розподілу стрибків породжуючого процесу, що приводить до зменшення ймовірності стрибків великих значень, потужність ЕС-шуму зменшується .
4. Зміна інтенсивності λ стрибків породжуючого процесу не впливає на структуру спектра стрибків досліджуваного ЕС-шуму, прямопропорційно змінюючи лише внесок цих стрибків у спільну потужність процесу .

Таким чином, ми бачимо, що зміна будь-якого з параметрів ядра $\varphi(s)$ або породжуючого процесу знаходить відображення у спектрі стрибків ЕС-шуму, що свідчить про інформативність даної характеристики процесу.

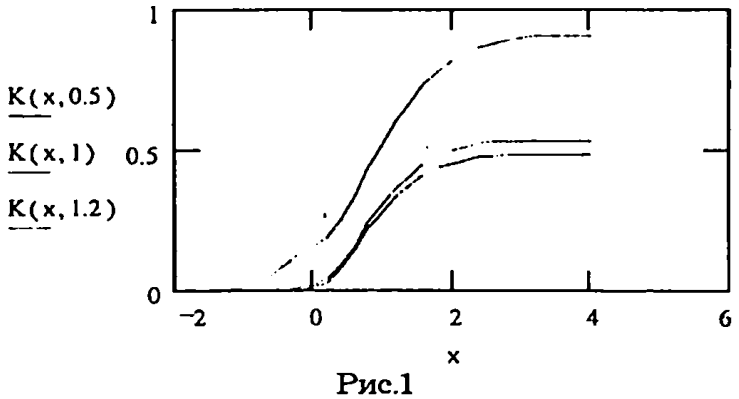


Рис.1

Рис. 1. 0=2, λ=2, b=3, β=0,5; 1; 1,2

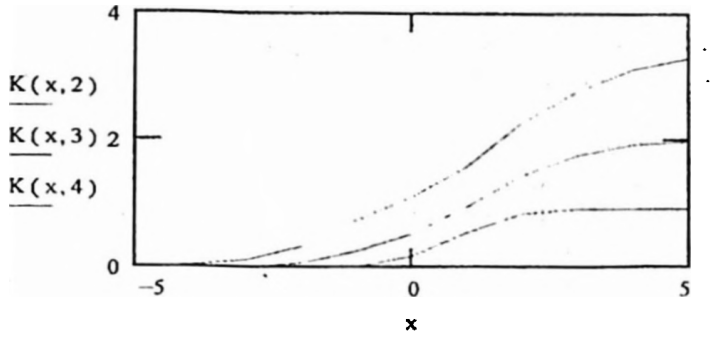


Рис.2

Рис. 2. β=0,5., λ=2, b=3, 0= 2; 3; 4

Summary. A problem of finding of Poisson jump spectra of linear stochastic processes has been formulated and solved in the paper. Analysis of the characteristic for one class of the linear processes with exponential-sine kernel has been carried out in detail as an example.

Література

1. Марченко Б. Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. -К.: Наукова думка, 1973. - 192 с.
2. Марченко Б. Г., Щербак Л. Н. Линейные случайные процессы и их приложения. -К.: Наукова думка, 1975.-144 с.
3. Маляренко А. П., Марченко Б. Г. Корреляционный анализ стохастически модулированных сигналов// Изв. ВУЗов. Радиоэлектроникаю- 1995.- №5.- С. 38-46.
4. Маляренко А. П., Марченко Б. Г. Моделирование сигналов акустической эмиссии на основе стохастических интегральных представлений//Техническая диагностика и неразрушающий контроль.- 1994.- №3-4.- С. 10-16.
5. Марченко Б. Г., Мыслович М. В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. -К.: Наукова думка, 1992. - 194 с.
6. Лукач Е. Характеристические функции. -М.: Наука, 1979. - 424 с.
7. Красильников А. И. Нахождение пуассоновского спектра скачков отклика линейной системы на воздействие белого шума/ Простр.-временная обработка сигналов и учет влияния среды их распространения. -Харьков: ХАИ, 1980. -С. 38-40.
8. Krasilnikov A. I., Martchenko B. G., Mislovitch M. V. A Mathematical Model of Linear Random Processes in Substantiation of Diagnostics Criteria of Rolling-Contact Bearings//Vibration Engineering, 3: 205-211, 1989.
9. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука, 1986. - 534 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1970. - Т.2. - 800 с.
11. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1965. - 400 с.