КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК. 539.3
Н. Гащин

НАГРІВ КІЛЬЦЕВИХ ДИСКІВ ЗМІННОЮ В ЧАСІ ПОТУЖНІСТЮ

Визначено режим нагріву тонкого в'язкопружного диска з метою створення необхідного переміщення по радіусу диска за заданий час.

Умовні позначення:

R_1, R_2 – відповідно внутрішній і зовнішній радіус диска,
$2h$ – товщина диска,
u – радіальне переміщення диска,
r – полярна координата в будь-якій точці диска,
$\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}$, – компонти тензора напружень та швидкостей їх зміни,
$\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненти тензора деформацій та швидкостей їх зміни,
$T, \dot{T}$ – температура і її швидкість зміни,
τ – час термообробки,
τ_n – час релаксації напружень,
E – модуль пружності,
G – модуль зсуву,
K – об'ємний коефіцієнт,
μ – коефіцієнт Пуассона,
a – коефіцієнт температуропровідності,
c, γ – питома теплоємність і густина матеріалу диска,
Bi – критерій Біо,
α, λ – коефіцієнти тепловіддачі і теплопровідності матеріалу диска,
α_T – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу диска,
$J_0(x), Y_0(x), J_1(x), Y_1(x)$ – функції Бесселя дійсного аргументу.

Нагрів кільцевих дисів для посадки їх на круглі осі або в циліндричні отвори з метою досягнення економії енергії доцільно проводити змінною в часі потужністю теплових джерел.

Математичну модель посадки можна описати з допомогою рівнянь термов'язкопружності, які враховують режими нагріву, теплові, пружні та в'язкі характеристики матеріалу диска [1],[2].

Рівняння рівноваги круглого диска в полярній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0 \qquad (1)$$

Переміщення і деформації зв'язані співвідношенням

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{u}{r} \qquad (2)$$

Реологічні властивості матеріалу опишемо з допомогою моделі Максвелла

$$\dot{\sigma}_{11} + \tau_n^{-1}\sigma_{11} = 2G\dot{\varepsilon}_{11} + K\tau_n^{-1}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \\ + (K - \frac{2}{3}G)(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + 3K(\dot{T} + \tau_n^{-1}T) \tag{3}$$

$$\dot{\sigma}_{22} + \tau_n^{-1}\sigma_{22} = 2G\dot{\varepsilon}_{22} + K\tau_n^{-1}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \\ + (K - \frac{2}{3}G)(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + 3K(\dot{T} + \tau_n^{-1}T)$$

$$K = \frac{E}{3(1+\mu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Рівняння теплопровідності для випадку конвективного теплообміну на поверхні диска

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - m^2 T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_g}W = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_g = ca\gamma, \qquad m^2 = \frac{Bi}{2h^2}, \qquad Bi = \frac{2\alpha h}{\lambda},$$

причому температура відраховується від температури середовища. Зауважимо, що в рівнянні (4), T, W - усереднені по товщині диска характеристики.

Граничні силові умови задачі для диска запишемо у вигляді

$$\sigma_{11} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{і} \quad r = R_2 \tag{5}$$

Умови конвективного теплообміну на торцях запишуться так

$$\frac{\partial T}{\partial r} - kT = 0 \quad \text{при } r = R_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial r} + kT = 0 \quad \text{при } r = R_2 \tag{6}$$

$$k = \frac{\alpha}{\lambda}$$

В початковий момент часу температура диска рівна температурі зовнішнього середовища

$$T = 0 \tag{7}$$

В кінцевий момент часу переміщення внутрішнього радіусу диска досягають заданого значення

$$u(R_1) = u_{зад} \qquad \text{при} \qquad t = \tau \tag{8}$$

Ставиться задача нагріву диска з допомогою теплових джерел, які мають теплову потужність $W(t)$, так щоб за час термообробки переміщення на внутрішньому контурі стало рівним необхідному. Для цієї мети потрібно знайти залежність переміщення від питомої потужності теплових джерел, які прикладені до диска.

Розв'язавши рівняння теплопровідності при граничних (6) і часових умовах (7), одержимо вираз для визначення температури

$$T = a\sum_{i=1}^{\infty} e^{-a\lambda_i^2 t}\int_0^t f_i(t)e^{a\lambda_i^2 t}dt[MJ_0(\nu_i r)+Y_0(\nu_i r)], \tag{9}$$

де $$f_i(t)=\frac{\frac{W(t)}{\lambda_g}\int_{R_1}^{R_2}[MJ_0(\nu_i r)+Y_0(\nu_i r)]rdr}{\int_{R_1}^{R_2}[MJ_0(\nu_i r)+Y_0(\nu_i r)]^2 rdr} \tag{10}$$

ν_i -корені трансцендентного рівняння

$$\begin{aligned}&(\nu_i J_1(\nu_i R_1)+kJ_0(\nu_i R_1))*(-\nu_i Y_1(\nu_i R_2)+kY_0(\nu_i R_2))\\ &-(-\nu_i J_1(\nu_i R_2)+kJ_0(\nu_i R_2))*(\nu_i Y_1(\nu_i R_1)+kY_0(\nu_i R_1))=0\end{aligned} \tag{11}$$

$$M=-\frac{-Y_1(\nu_i R_2)\nu_i+kY_0(\nu_i R_2)}{-J_1(\nu_i R_2)\nu_i+kJ_0(\nu_i R_2)} \tag{12}$$

Задачу термов'язкопружності (1), (2), (3), (5) розв'язуємо, використовуючи метод малого параметру, в якості якого вибираємо величину τ_n^{-1}.

Опускаючи громіздкі викладки, приведемо розв'язок задачі в нульовому наближенні

$$u(R_1)=\frac{2\alpha_T a}{(1+\frac{4G}{9K})R_1}\sum_{i=1}^{\infty}Fe^{-a\lambda_i^2 t}\int_0^t f_i(t)e^{a\lambda_i^2 t}dt\ , \tag{13}$$

де

$$F=\frac{[MJ_1(\nu_i R_1)+Y_1(\nu_i R_1)]R_1}{\nu_i^2}+\frac{R_1^2 I_1(\nu_i)}{\frac{4G}{9K}(R_2^2-R_1^2)}+ \tag{14}$$

$$+\frac{R_1^2 I_2(\nu_i)-R_2^2 I_3(\nu_i)}{R_2^2-R_1^2}$$

$$I_1(\nu_i)=I_2(\nu_i)-I_3(\nu_i) \tag{15}$$

$$I_2(\nu_i)=\frac{R_2}{\nu_i}[MJ_1(\nu_i R_2)+Y_1(\nu_i R_2)] \tag{16}$$

$$I_3(\nu_i)=\frac{R_1}{\nu_i}[MJ_1(\nu_i R_1)+Y_1(\nu_i R_1)] \tag{17}$$

Рівняння (13) зв'язує переміщення на внутрішньому краю диска з питомою потужністю джерел (10),яка залежить від часу термообробки. Підставляючи (13) в умову (8), отримуємо інтегральне рівняння для знаходження закону зміни в часі питомої потужності теплових джерел, яка забезпечує створення необхідного переміщення на внутрішньому контурі диска за заданий час τ.

Summary. *The regime of heating of thin visco-plastic discs in order to create the necessary transition on the disc radius during the certain time is determined.*

Література

1. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. - Киев:Наук. думка,1988.-312 с.
2. Фрейденталь С. и Гейрингер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды.М.: Физматгиз,1962.-432 с.