УДК 504.4.054.064.

І. Коноваленко

НАБЛИЖЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ВІДСТОЮВАННЯ

Запропоновано наближену математичну модель процесу відстоювання, яка описує вплив фізико-хімічних параметрів відстоюваного середовища на динаміку даного процесу. Розроблена модель дозволяє визначати швидкість відстоювання напівпродуктів у залежності від їх фізичних характеристик та концентрацію завислих часток в заданий момент часу.

Умовні позначення:

G	- сила тяжіння, яка діє на завислу в рідині тверду частинку, Н;
F_a	- архімедова сила, яка діє на завислу в рідині тверду частинку, Н;
F_{on}	- сила опору середовища рухові твердої частинки, Н;
G, F_a, F_{on}	- відповідно вектори сил G, F_a, F_{on};
F	- рівнодіюча сила, Н;
m	– маса твердої частинки, кг;
g	– прискорення вільного падіння, м/с^2;
ρ_p	– питома густина рідини, кг/м^3;
ρ_m	– питома густина речовини твердої частинки, кг/м^3;
V	– об'єм твердої частинки, м^3;
ζ	– коефіцієнт опору при обтіканні частинки рідиною;
v	– швидкість руху частинки у рідині, м/с;
Ω	– міделевий переріз твердої частинки, м^2;
Re	- критерій Рейнольдса;
$k_ф$	- динамічний коефіцієнт форми;
f	- статичний коефіцієнт форми;
F	– площа поверхні твердої частинки, м^2;
$F_к$	- площа поверхні кулі, об'єм якої рівний об'єму твердої частинки, м^2;
d	– середній діаметр твердої частинки, м;
r	– середній радіус твердої частинки, м;
μ	– динамічна в'язкість рідини, Па·с;
λ	– приєднана маса рідини, кг;
ρ_0	– густина води при температурі T=0°С, кг/м^3;
μ_0	– в'язкість води при температурі T=0°С, Па·с;
β_T	– коефіцієнт температурного розширення, °С$^{-1}$;
T	– температура, °С;
ρ_M	– масова концентрація частинок, г/м^3;
V_p	- об'єм відстоюваної рідини, м^3;
t	- час, с;
$p(m_i)$	– імовірність знаходження у рідині при t=0 частинки масою m_i;
n_i	– кількість частинок з масою m_i у всьому об'ємі рідини при t=0;
M	- загальна маса всіх частинок, кг;
N	– загальна кількість всіх частинок;
n_i^v	- кількість частинок масою m_i в одиниці об'єму;
M^v	- маса завислих частинок в одиниці об'єму контрольного шару, кг.

Вступ

У багатьох технологічних процесах харчової та переробної промисловості використовують процес відстоювання рідин. Одним із

найважливіших параметрів, за яким оцінюють процес очистки, є концентрація завислих частинок у досліджуваній рідині. Проте, цей параметр не враховує динамічні особливості процесу. Як наслідок – неможливо прогнозувати кінетику процесу, і тим більше його оптимізувати.

Із закордонної та вітчизняної інформації [1,2,3], яка поступає від фірм, що займаються цією проблемою, видно відсутність єдиного підходу до її вирішення.

З наших досліджень [4] встановлено, що найбільш прогресивним методом контролю за процесом відстоювання є вимір швидкості протікання цього процесу, оскільки вона, незалежно від якості та виду напівпродукту, дозволяє однозначно оцінити його спроможність до відстоювання, що дає можливість встановити оптимальний режим процесу.

При проведенні оптимізації процесу відстоювання особливе місце займають теоретичні дослідження цього процесу, оскільки вони дають можливість кількісно оцінити вплив тих чи інших факторів на його динаміку. Математична модель процесу відстоювання дозволяє прослідкувати вплив фізико-хімічних параметрів відстоюваного середовища на його поведінку без проведення значної кількості лабораторних аналізів.

Розробка наближеної математичної моделі процесу відстоювання

Для того, щоб вивести рівняння руху твердої частинки у рідині під дією сили тяжіння, розглянемо сили, які діють на неї (рис.1).

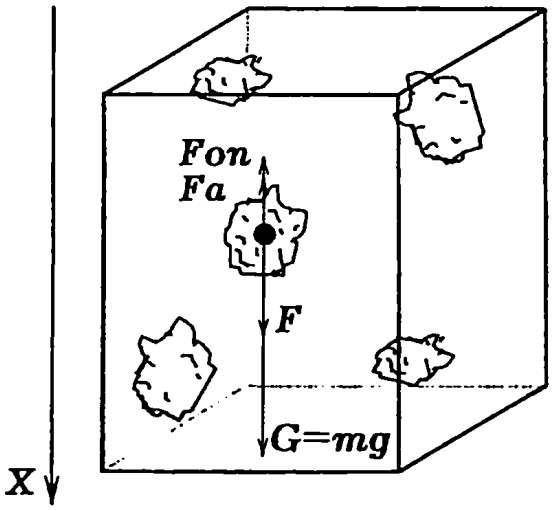


Рис. 1.
Тверда частинка в одиничному об'ємі рідини та сили, що діють на неї

Очевидно, що

$$F = G - F_a - F_{оп} \tag{1}$$

Оскільки всі розглянуті сили направлені вздовж однієї осі X, то ми можемо розглядати лише проекції вказаних сил на цю вісь. Сила тяжіння становить:

$$G=mg=\rho_m V g. \tag{2}$$

Архімедова сила:

$$F_a=\rho_p V g. \tag{3}$$

Сила взаємодії між рідиною та рухомою частинкою F_{on} визначається за допомогою такого виразу [5]:

$$F_{on}=\zeta\rho_p v^2\Omega/2. \quad (4)$$

Коефіцієнт опору ζ при обтіканні частинки рідиною є функцією критерію Рейнольдса. Для частинок з формою кулі при $10^{-4}<Re<2$ цей коефіцієнт становить [6]:

$$\zeta_к = \frac{24}{Re} \quad (5)$$

Для характеристики форми неправильних частинок використовують динамічний коефіцієнт форми $k_ф$ та статичний коефіцієнт форми f:

$$k_ф = \left(\frac{\zeta}{\zeta_к}\right)_{Re=iden}; \; f = \left(\frac{F}{F_к}\right)_{V_m=iden}. \quad (6)$$

З формул (6) видно, що коефіцієнт опору частинки неправильної форми залежить не лише від виду взаємного руху частинки і рідини (тобто від числа Re), але і від її геометрії (тобто від f). Залежність між динамічним та статичним коефіцієнтами форми встановлено дослідно [7]. Згідно цих даних, для $Re<0.2$:

$$k_ф=(1+0.862\ lg\ f)^{-1}. \quad (7)$$

За експериментальними даними [8], статичний коефіцієнт форми f для частинок з формою типу окатаного піску становить: f=1.16... 1.17.

Знайшовши з першої формули (6) коефіцієнт опору ζ і підставивши в отриманий вираз формули (5), (7), отримаємо:

$$\zeta = \frac{24}{Re(1+0.862\,lg\,f)}. \quad (8)$$

Так як $Re = \frac{vd\rho_p}{\mu}$, то вираз для коефіцієнту опору (8) можна записати у такому вигляді:

$$\zeta = \frac{24\mu}{vd\rho_p(1+0.862\,lg\,f)}. \quad (9)$$

Міделевий переріз твердої частинки $\Omega = \pi r^2$.

Підставивши вираз для коефіцієнта опору (9) у формулу для визначення сили опору (4), отримаємо:

$$F_{on} = \frac{12\mu\,\Omega}{d(1+0.862\,lg\,f)}v. \quad (10)$$

Запишемо другий закон Ньютона для твердої частинки:

$$F = (m+\lambda)\frac{dv}{dt} = (\rho_m V+\lambda)\frac{dv}{dt}. \quad (11)$$

Для частинки з формою кулі приєднана маса рідини обчислюється за такою формулою [5]:

$$\lambda = \frac{2}{3}\pi d^3\rho_p. \quad (12)$$

Тоді для рівнодіючої сили F отримаємо такий вираз:

$$F = \left(\rho_m V + \frac{2}{3}\pi d^3 \rho_p\right)\frac{dv}{dt}. \qquad (13)$$

З врахуванням виразів (2), (3), (10), (13) головне рівняння руху частинки у рідині (1) запишеться так:

$$\left(\rho_m - \rho_p\right)Vg - \frac{12\mu\Omega}{d_m\left(1+0.862\lg f\right)}v - \left(\rho_m V + \frac{2}{3}\pi d^3\rho_p\right)\frac{dv}{dt} = 0. \qquad (14)$$

При зміні температури такі фізичні параметри відстоюваної речовини, як густина та в'язкість, можуть змінюватись. Густина твердих тіл при зміні температури змінюється незначно, тому будемо вважати, що $\rho_m = const$. Для води питома густина при зміні температури змінюється за такою залежністю [9]:

$$\rho\left(T\right) = \frac{\rho_0}{1+\beta_T T}. \qquad (15)$$

Для води $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\beta_T = (1.4...6.61)\cdot 10^{-4}$ °C^{-1}.

Залежність в'язкості води від температури описується таким виразом [10]:

$$\mu(T) = \mu_0\left(1+0.0337T+0.000221\,T^2\right)^{-1}. \qquad (16)$$

Для води $\mu_0 = 17.9\cdot 10^{-4}$ Па·с.

Якщо розглядати густину та в'язкість рідини як функції температури, то рівняння руху твердої частинки (14) запишеться у такому вигляді:

$$\left(\rho_m - \rho_p(T)\right)Vg - \frac{12\mu(T)\Omega}{d_m\left(1+0.862\lg f\right)}v - \left(\rho_m V + \frac{2}{3}\pi d^3\rho_p(T)\right)\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (17)$$

Якщо осадження твердих частинок проходить у воді, то залежності $\rho(T)$ та $\mu(T)$ описуються виразами (15) та (16).

Введемо такі позначення:

$$\chi_1 = \left(\rho_m - \rho_p(T)\right)Vg;\ \chi_2 = \frac{12\mu|T|\Omega}{d_m|1+0.862\lg f|};\ \chi_3 = \rho_m V + \frac{2}{3}\pi d_m^3\rho_p(T). \qquad (18)$$

Тоді рівняння (17) прийме вигляд:

$$\chi_1 - \chi_2 v - \chi_3 v' = 0 \qquad (19)$$

Рівняння (19) є лінійним диференційним рівнянням першого порядку. Припустимо, що коефіцієнти χ_i (i=1, 2, 3) постійні в часі. Розв'язавши рівняння (19) відносно швидкості v при нульових початкових умовах, отримаємо:

$$v(t) = \frac{\chi_1}{\chi_2}\left(1 - exp\left(-\frac{\chi_2}{\chi_3}t\right)\right). \qquad (20)$$

Знаючи закон зміни швидкості твердої частинки у часі, можна обчислити відстань, яку пройде ця частинка за час $t=\tau$:

$$X(\tau) = \int_0^\tau v(t)dt = \frac{\chi_1}{\chi_2}\left(\tau + \frac{\chi_3}{\chi_2}\left(exp\left(-\frac{\chi_2}{\chi_3}\tau\right) - 1\right)\right). \qquad (21)$$

Найчастіше при відстоюванні промислових чи природніх рідких середовищ доводиться мати справу з твердими частинками, геометричні розміри яких (а отже, і маса) змінюються у певному діапазоні. Розглянемо

рідину із завислими у ній твердими частинками різної маси, яка заливається у посудину для відстоювання. Припустимо, що ця рідина перед відстоюванням зазнала інтенсивного перемішування, тому розподіл частинок будь-якої маси по всьому об'єму посудини в початковий момент відстоювання (при t=0) можна вважати рівномірним. Якщо відома масова концентрація твердих частинок у рідині ρ_M, то загальна маса частинок

$$M=\rho_M V_p. \tag{22}$$

Розіб'ємо весь діапазон мас частинок на L дрібних інтервалів. Тоді вираз для загальної маси всіх частинок можна записати так:

$$M = \sum_{i=1}^{L} m_i n_i . \tag{23}$$

Кількість частинок з масою m_i в об'ємі рідини на початку відстоювання становить:

$$n_i = Np(m_i). \tag{24}$$

Тоді вираз (23) прийме вигляд:

$$M = \sum_{i=1}^{L} m_i Np(m_i) = N\sum_{i=1}^{L} m_i p(m_i). \tag{25}$$

Звідси загальна кількість частинок у рідині:

$$N = \frac{M}{\sum_{i=1}^{L} m_i p(m_i)}. \tag{26}$$

Тепер знайдемо кількість частинок масою m_i в об'ємі V:

$$n_i = Np(m_i). \tag{27}$$

Кількість частинок масою m_i в одиниці об'єму:

$$n_i^V = \frac{n_i}{V} = \frac{Np(m_i)}{V}. \tag{28}$$

Знайдемо концентрацію частинок у шарі товщиною Δl посудини (рис.2) через проміжок часу t після початку відстоювання. Для того, щоб частинка пройшла через середину контрольного шару за час t, треба, щоб її швидкість була більшою або рівною такому значенню:

$$v_0 = \frac{l + \Delta l/2}{t}.$$

Вираз в дужках у правій частині формули (20) характеризує значеня швидкості лише в початковий період процесу відстоювання, поки швидкість частинки не набере встановленого значення. Як правило, цей початковий період набагато коротший від часу відстоювання всієї рідини (так, для частинок з діаметром ≈5 мкм та густиною ≈4000 кг/м^3 при русі у воді він не перевищує кількох секунд). Тому швидкість руху частинки можна прийняти сталою і рівною встановленій швидкості:

$$v = \frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{(\rho_m - \rho(T))(1 + 0.862\lg f)g}{18\mu(T)} d^2. \tag{29}$$

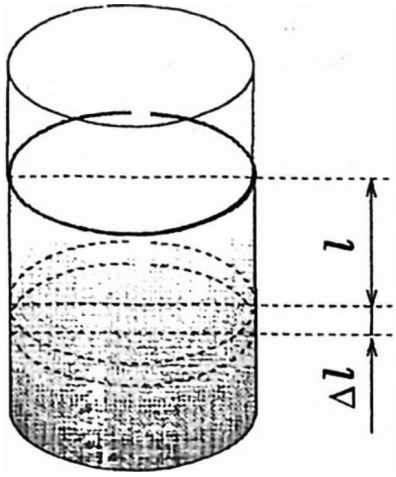


Рис. 2.
До обчислення концентрації частинок у шарі Δl на відстані l від верхньої межі рідини

Звідси $$d = \sqrt{\frac{18\mu(T)v}{(\rho_m - \rho(T))(1+0.862\lg f)g}}. \quad (30)$$

Тоді за час t нижче середини контрольного шару пройдуть частинки, для яких діаметр буде більший або рівний деякому граничному значенню $d_{гр}$, що отримується з формули (30) при $v=v_0$. Частинки з таким діаметром впливати на концентрацію в контрольному шарі не будуть, так як в цьому шарі будуть присутні лише частинки меншого розміру.

Маса частинки з діаметром d рівна:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m = \frac{\pi}{6}\rho_m d^3. \quad (31)$$

У контрольному шарі будуть присутні лише частинки з масами

$$m < \frac{\pi}{6}\rho_m d_{гр}^3.$$

Маса завислих частинок в одиниці об'єму контрольного шару (тобто масова концентрація) становитиме:

$$M^V = \sum_{i=1}^{L} n_i^V m_i \quad (\text{для } m_i < \frac{\pi}{6}\rho_m d_{гр}^3). \quad (32)$$

Висновки

Розроблена математична модель процесу відстоювання дозволяє визначати швидкість руху завислих частинок (формула (20)) в залежності від таких фізико-хімічних параметрів відстоюваного середовища, як густина та в'язкість рідини, густина твердих частинок, температура середовища; розглянуто також вплив геометричної форми частинок на швидкість відстоювання. Формула (32) дозволяє визначати масову концентрацію частинок у контрольному шарі, якщо відомо розподіл мас твердих частинок.

При розробці моделі не враховувався вплив на рух твердих частинок горизонтальних сил, які виникають при перемішуванні рідини. Знехтувано також впливом на рух частинок стінок резервуару, в якому відбувається відстоювання. Відкритим залишається питання про адекватність розробленої математичної моделі фізичній моделі. За попередніми розрахунками,

зробленими на основі порівняння результатів розробленої моделі з приведеними у літературі [2] даними, відносна похибка моделі становить ≈8%.

Summary. Settling process approximate mathematical model which describes the influence of physicochemical parameters of the settling medium on the dynamics of the process is proposed here. The developed model allows to determine settling rate of the semiproducts according to their physical characteristics and concentration of the handing particles at the given period of time.

Література

1. Phillip C. Wankat. Rate-Controlled Separations. N.-Y.: Elsevier Science Publisher Ltd., 1990.- 873p.
2. Физико-химические процессы сахарного производства./ Гулий И. С. и др. М.: Агропромиздат, 1987.-264с.
3. Автоматизированные системы управления в пищевой промышленности./ Под ред Воронова В.Г. - М.: Агропромиздат, 1991.- 144с.
4. Буняк А.М., Коноваленко І.В. Розроблено прилад для вимірювання швидкості відстоювання напівпродуктів. //Харчова та переробна промисловість.- №5.- 1997р.- С. 22-23.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.- 736с.
6. Физико-химические процессы сахарного производства./ ГулийИ.С. и др. М.: Агропромиздат, 1987.-264с.
7. Фукс Н.А. Успехи механики аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1982.
8. Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970.- 424с.
9. Дейч М.Е., Заренкин А.Е. Гидрогазодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1984.- 384с.
10. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987.- 440с.