УДК. 551.463.2:519.21

Я. Драґан, В. Яскілка

ТЕОРІЯ СИГНАЛІВ І ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ОПТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Аналізується теорема відліків для плоских ізотропних зображень.

Вступ

Першим етапом цифрового опрацювання зображень є дискретизація, тобто заміна поля спостереження на сукупність його значень у певній гратці точок цього поля (див [1]). З математичного погляду тут постає задача означення такого класу полів, для яких при такому переході не буде втрати відомостей, тобто дискретні відліки міститимуть всі відомості, що їх містить і вихідне початкове континуальне поле. Для одновимірних сигналів ця задача вперше чітко була сформульована 50 років тому у праці фундатора математичної теорії комунікації (що її називають ще теорією інформації) К.Шенона. А бере вона свій початок з проблеми інтерполяцій функцій, над якою у минулому столітті працювали Ж. Лагранжа та О. Коші. Стисло історію теореми відліків наведено у книзі [1]. У ній також показано можливість узагальнень цієї теореми: "звичайна" теорема відліків стосується зображень сигналів з обмеженим носієм їхнього гармонічного Фур'є-образу (іншими словами, з фінітним спектром), а узагальнення переносить концепцію відліків на сигнали з обмеженим спектром за іншими координатними функціями - не гармоніками, пов'язуючи їх не з оператором звичайного зсуву $U^{\nu}(x) = f(x+\nu)$, а з оператором узагальненого зсуву, означеним вперше Ж.Дельсартом стосовно функцій Беселя. Такий підхід систематизовано у книзі [1] і з цього приводу вона цитується в огляді [2].

Відповідна теорема відліків має вигляд:

$$f(t) = \sum_{k=\overline{0,\infty}} f(t_k) \frac{2t_k J_p(\Lambda t_k)}{\Lambda J_{p-1}(\Lambda t_k)(t^2 - t_k^2)},$$

де відлікову послідовність $\{t_k, k = 0, \infty\}$ утворюють корені рівняння $J_p(\Lambda t_k) = 0$ функції Беселя р-го порядку, а Λ - найвища "частота" у зображені функції у вигляді інтегралу за функціями Беселя цього самого порядку.

Покажемо далі застосовність цієї теореми для оцінювання інформаційного вмісту зображень у разі їх ізотропності.

Аналіз двовимірних сигналів

Перетворення оптичних сигналів лінійними середовищами найпростіше аналізувати методами теорії сигналів, поширеної на двовимірний випадок, як це зроблено у працях Дж. Гудмена [4] та А. Папуліса [3]. Оскільки теорія сигналу більше уніфікована, ніж оптика, то такий підхід веде до ширшого розуміння основних фізичних принципів, на яких базується аналіз. Тому у подальшому викладі дотримуватимемось концепцій теорій сигналу[4,1,3].

Якщо позначити через A оператор, що описує дію оптичної системи [4], то вхідний сигнал $f(x,y)$ буде пов'язаний з вихідним $g(x,y)$ співідношенням

$$g(x,y)=(Af(\bullet,\bullet))(x,y).$$

Коли система лінійна (для неї справедливий принцип суперпозицій), тобто вона повністю характеризується відгуком на дію точкового джерела одиничної інтенсивності, сигнал якого запишемо за допомогою δ - функції як

$$f_0(x,y)=\delta(x-u)\delta y-v),$$

де (u,v) - точка, у якій розмішено джерело. Цей відгук

$$h(x,y;u,v)=A_{x,y}\delta(x-u)\delta(y-v) \qquad (1)$$

називають імпульсною реакцією системи (функцією розсіяння точки).

Вхідний сигнал можна подати як суперпозицію точкових імпульсів, інтенсивність яких пропорційна до значень вхідного сигналу у точках розмішення імпульсів:

$$f(x,y)=\iint_S f(u,v)\delta(x-u)\delta(y-v)dudv,$$

де S - область, в якій вхідний сигнал різниться від нуля. Правильність цього запису підтверджує така формула , що виходить з теорії δ - функції:

$$\iint_S f(u,v)\delta(x-u)\delta(y-v)dudv=\chi_S(\mathrm{B}x,y)f(x,y),$$

де $\chi_S(x,y)$ - індикатор множини S, тобто фунція точки, яка дорівнює 1, коли точка (x,y) належить множині S і O, коли не належить ξ.

Тоді для лінійної системи вихідний сигнал запишемо як

$$g(x,y)=\iint_S h(x,y;u,v)f(u,v)dudv. \qquad (2)$$

Остання формула істотно спроститься , якщо допустити, що оператор системи інваріантний по відношенню до зсуву, тобто:

$$A_{x,y}U_{x,y}^{u,v}=U_{x,y}^{u,v}A_{x,y}, \qquad (3)$$

де $U_{x,y}^{u,v}$ - оператор зсуву у площині точки (x,y) на вектор $(u,v)=U_{x,y}^{u,v}f(x,y)=f(x+u,y+v)$.

Реальні системи не мають такої інваріантності. Проте, коли розглядати малі зсуви, то це припушення слід вважати розумним наближенням [3,4]. Тим більше, що саме й воно веде до істотного спрощення аналізу, бо записуючи формулу (1) як

$$h(x,y;u,\upsilon)=A_{x,y}U_{x,y}^{u,v}\delta(x)\delta(y),$$

використовуючи співідношення (3) і позначивши

$A_{x,y}\delta(x)\delta(y) = h(x,y;0,0) \equiv h(x,y)$ - відгук на імпульс розташований у початку координат, отримаємо, що

$$h(x,y;u,v) = U_{x,y}^{u,v} h(x,y) = h(x-u, y-v).$$

А це співідношення, у свою чергу, дозволяє записати формулу (2) у вигляді двовимірної згортки:

$$g(x,y) = \iint_S h(x-u, y-v) f(u,v) du dv = (h \otimes f)(x,y). \qquad (4)$$

Тут якраз проявляє себе той кардинальний факт, що власними функціями оператора зсуву є експоненти [1], а тому, як вперше зауважив Н.Вінер, вони будуть власними функціями усякого інваріантного оператора. В наслідок цього дія оператора найпростіше запишеться у тому разі, коли будемо використовувати розклад цієї функції за цими власними функціями, тобто розклади Фур'є, які у двохвимірному випадку мають вигляд:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\mu) e^{i(\lambda x + \mu y)} d\lambda d\mu, \qquad (5)$$

при цьому

$$F(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy. \qquad (6)$$

Справді, підставляючи вираз для вхідного сигналу з формули (5) у формулу (4) і користуючись формулою (6), отримаємо, що

$$d(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x + \mu y)} F(\lambda,\mu) H(\lambda,\mu) d\lambda d\mu,$$

тобто, що Фур'є-образ такої складної операції як двовимірна згортка дорівнює добуткові Фур'є-образів. Отже, Фур'є-образ відгуку системи

$$G(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu) H(\lambda,\mu), \qquad (7)$$

дорівнює добуткові Фур'є-образів вхідного сигналу на Фур'є-образ імпульсної реакції, тобто на частотну характеристику системи.

Особливим класом системи є лінійні інваріантні ізотропні системи (системи з круговою симетрією), для яких функції двох змінних залежать не від положення точки на площині, а від її відстані від початку координат, або, іншими словами, тільки залежать від квадратичного кореня з суми їх квадратів

$$f(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r),$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для них Фур'є-образи теж мають кругову симетрію, а подвійне перетворення Фур'є замінюється одновимірним перетворенням Ганкеля [5,3].

Справді, переходячи до полярних координат

$$x = r\cos\vartheta, \qquad \lambda = \rho\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\vartheta, \qquad \mu = \rho\sin\varphi,$$

(звідки $\lambda x + \mu y = r\rho$, $dxdy = rdrd\vartheta$) у формулі (6), отримаємо:

$$F(\lambda,\mu) = \int_0^{\infty} r f(r) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho\cos(\vartheta-\rho)} d\vartheta dr = 2\pi \bar{f}(\rho), \tag{8}$$

де

$$\bar{f}(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr, \tag{9}$$

- перетвір Ганкеля функції $f(r)$, а (див. [7])

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos(\vartheta-\alpha)} d\vartheta,$$

- функція Беселя нульового порядку (внаслідок періодичності функції $\cos x$ величина інтеграла не залежить від α).

Із співідношення (8) видно, що Фур'є-образ ізотропної функції є функція ізотропна і з точністю до множника 2π дорівнює перетворові Ганкеля від вихідної функції. Тут фактично розділяються змінні (у полярних координатах) [5].

Зворотнє перетворення має вигляд:

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho \bar{f}(\rho) J_0(r\rho) d\rho, \tag{10}$$

тобто цілком такий самий вигляд, як і пряме (див. формулу (9)). Це дозволяє значно розширити можливості використання таблиць трансформант.

Формула (7) в ізотропному випадку набуває вигляду

$$\bar{g}(\rho) = 2\pi \bar{f}(\rho)\bar{h}(\rho) . \tag{11}$$

Тут перетворення Ганкеля виступає як частинний випадок двовимірного перетворення Фур'є. Властивості цього перетворення описано в книгах [1,3], скорочені таблиці у книгах [3,4,6]. Зауважимо тільки, що означення трансформанти Ганкеля у книзі [4,6] відрізняються від означення (9) множниками.

Із вище сказаного виходить, що ті самі таблиці можна використовувати як для знаходження прямого, так і зворотнього перетворення Ганкеля: вони відрізнятимуться тільки позначенням змінної .

Не слід забувати при використанні цих трансформант, що в ізотропному випадку, як і в загальному, згортка залишається двовимірною:

$$(f \otimes h)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{u^2+v^2}) h(\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}) du dv = g(r). \tag{12}$$

Зауважимо також, що у частинних випадках буде простіше знайти згортку, ніж обернення добутку трансформант Ганкеля. Цим користуватимемося у подальшому.

Для отримання пар трансформант Ганкеля також використовують [3] ще Фур'є-образи січень функцій двох змінних, які будуть функціями однієї змінної. При цьому x -січенням функції $f(x,y)$ називають функцію:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy. \qquad (13)$$

Тоді з формули (4), поклавши $\mu = 0$, отримаємо:

$$F(\lambda,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} s(x)dx = S(\lambda) \qquad (14)$$

де $S(\lambda)$ - одновимірний Фур'є-образ функції $s(x)$ або в символах: $(\Phi_s)(\lambda) = S(\lambda)$ (Φ - тут символ Фур'є-перетворення. Застосуємо ці факти тепер до перетворення ізотропних функцій. З формули (8) при $\mu = 0$ (згадуючи що $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$)маємо:

$$F(\lambda,0) = 2\pi\bar{f}(\lambda)$$

Але з формули (14)

$$F(\lambda,0)=S(\lambda)=(\Phi s)(\lambda)$$

тобто

$$2\pi\bar{f}(\lambda)=(\Phi s)(\lambda)$$

де на цей раз, як видно з формули (13),

$$s(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2+y^2})dy \qquad (15)$$

Ці формули показують, що для ізотропних функцій трансформанта Ганкеля з точністю до множника (2π) дорівнює одновимірній Фур'є - трансформанті x - січення.

Дискретизація ізотропних зображень

З наведеного аналізу пов'язання перетворень - двохвимірного Фур'є та Ганкеля теорема відліків для ізотропних полів і зображень матиме вигляд:

$$f(r) = \sum_{k=\overline{0,\infty}} f(r_k)\frac{2r_k J_0(\Lambda\nu_k)}{\Lambda J_{-1}(\Lambda\nu_k)(r^2-\nu_k^2)}, \qquad (16)$$

а точки відліків будуть коренями рівняння $J_0(\Lambda\nu_k) = 0$ для функції Беселя нульового порядку.

Отже, відліки в даному разі будуть не еквідистантними, а масштаб відстаней між ними визначає "частота" зрізу образу Генкеля зображення. Точки відліків визначають положення інформативних ознак розглядуваного тут типу полів і тому задання значень поля у цих точках повністю його відтворює згідно з формулою (16).

У силу симетрії перетворення Ганкеля ця формула справедлива і для обмежених кругових полів.

Summary. The sampling theorem for isotropic plane images is discussed.

Література

1. Драган Я.П. Модели сигналов в линейных системах. К.: Наукова думка, 1972.-348 с.
2. 2.Хургин Я.И., Яковлев В.П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее приложение в физике и технике// Труды института инженеров по электронике и радиотехнике, 1979.-.№ 7.-С.16.
3. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1974.-492 с.

4. Гудмен Дж. Введение в Фурье - оптику. М.: Мир, 1970.-528 с.
5. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. М.:Мир, 1966.-257 с.
6. Диткин В.А.,Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. - 407 с.
7. Таблицы интегральных преобразований. Ч.2 Перевод книги Г.Бейтмена и А.Эрдейи в серии СМБ. М.: Наука, 1970. - 473 с.
8. Харкевич А.А.Спектры и анализ. М.: Физматгиз.,1962.- 276 с.