УДК. 681.325.36

І. Кисляк

МЕТОДИ ГЕНЕРУВАННЯ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сформульовані вимоги до генерування випадкових послідовностей, виходячи з умов генерування випадкових чисел. Описано спосіб побудови періодично корельованих послідовностей. Досліджено модель шуму цифрового тестового сигналу, яка отримана із детермінованого неперервного гармонійного сигналу.

Умовні позначення

r - розрядність двійкового слова;

c - вага молодшого розряду r-розрядного позиційного коду;

u - амплітуда сигналу;

ξ_η - дискретний випадковий процес.

В цілому ряді областей науки і техніки вивчається вплив випадкових збуджень на протікання тих чи інших фізичних процесів. Саме випадкові збудження накладають принципові обмеження на точність контролю того чи іншого процесу. Похибки зміни параметрів процесу обмежують можливість цілеспрямованого впливу на його перебіг. Проблема врахування випадкових збуджень найчастіше виникає тоді, коли намагаються використовувати в своїх цілях потенційні можливості якого-небудь фізичного явища.

У багатьох випадках цілу низку задач можна найкраще вирішувати, використовуючи випадкові сигнали. Однією з найбільш відомих областей використання випадкових сигналів є лабораторні дослідження макетів і моделей різних пристроїв, які знаходяться під впливом випадкових збуджень.

Випадкові сигнали можна моделювати за допомогою спеціальних генераторів, які забезпечують одержання таких сигналів із наперед заданими характеристиками. Широке коло задач вирішується на ЕОМ з використанням різновиду випадкових сигналів особливого типу – випадкових чисел. Існує два класи випадкових сигналів: неперервні і імпульсні, які розрізняють за спектральним складом, розподілом імовірностей миттєвих значень і т. д. Те ж саме можна сказати і про імпульсні сигнали. Вони класифікуються за розподілом імовірностей амплітуд, за тривалостями і інтервалами між імпульсами. Дуже близькими до випадкових сигналів за параметрами та областями застосування є так звані псевдовипадкові сигнали. Вони в строгому порядку є регулярними, але мають період повторюваності, який достатньо великий [1].

Для оцінки точності багатьох систем і пристроїв та для визначення їхньої оптимальної структури використовуються тестові сигнали.

Я пропоную використання тестових сигналів для ідентифікації періодично нестаціонарних випадкових процесів, за допомогою яких можна адекватно описати багато реальних об'єктів і явищ. Традиційно старались описати всі процеси в термінах теорії стаціонарних випадкових функцій, тому що для цих випадкових функцій добре розвинутий математичний апарат опису. Але, навіть, з означення стаціонарного процесу, як однорідного в часі і, який має вигляд неперервних випадкових коливань навколо певного середнього значення, при чому ні середня амплітуда, ні характер цих коливань істотно не змінюється з плином часу, виникає підозра, що для

більшості реальних випадкових процесів ця модель буде не цілком адекватною. Адекватнішою моделлю для опису ритмічних послідовностей, до яких відноситься багато процесів, що відбуваються в людському організмі, є нестаціонарний процес. Одним із нестаціонарних процесів є періодично корельований випадковий процес (ПКВП). Характерною особливістю даного процесу є те, що матсподівання, дисперсія, кореляційна функція для кожного зсуву аргументів є періодичними. Істотною перевагою є те, що ПКВП можна передати через стаціонарні компоненти:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} e^{ik\Lambda t} \xi_k(t), \qquad (1)$$

де $\xi_k(t)$, $k \in Z$ – стаціонарні компоненти з фінітними носіями (які допускають дискретизацію, основану на теоремі відліків), $[-\Lambda,\Lambda]$, $\Lambda = \frac{2\pi}{T_k}$, T_k – період корельованості. Модуляція гармоніками частот $k\Lambda$ ξ_k розносить на відрізки $[(k-1/2)\Lambda, (k+1/2)\Lambda]$ так, що вони покривають частину спектра, що розглядається. У даній ситуації $k = \overline{-N,N}$, де N – порядок ПКВП. Він визначається за формулою:

$$N = Ent\left(\frac{\Omega T_k}{2\pi}\right),$$

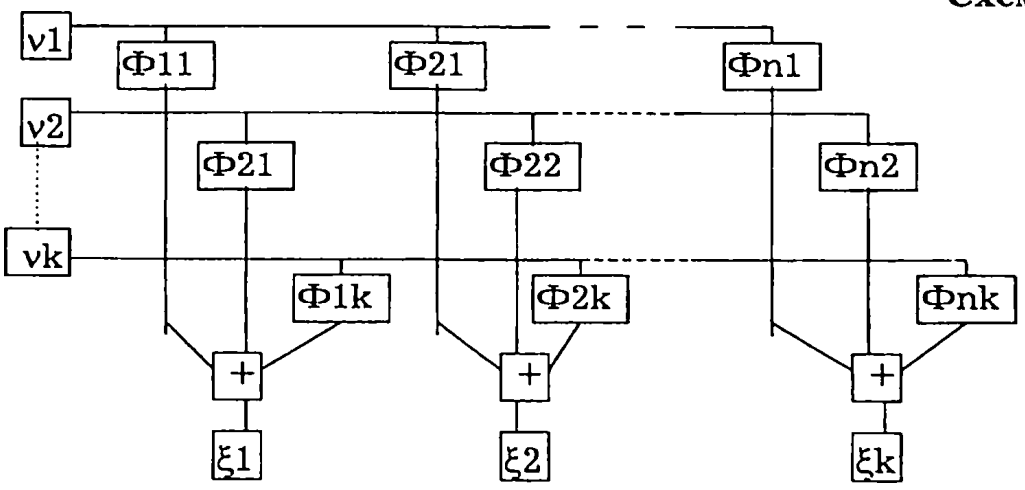
де $Ent(\cdot)$ – ціла частина числа, Ω – смуга частот, що пропускає фільтр. Кореляційна функція має вигляд:

$$R_{kj} = \mathrm{E}\xi_k \overline{\xi_j},$$
$$R = \left[R_{kj}\right],$$

де R_{kj} – функція кореляції, E – знак матсподівання [11,12].

ПКВП можна отримати, наприклад, шляхом детермінованих перетворень дискретного "білого шуму" [2]. Генерування на ЕОМ дискретного "білого шуму" досліджено давно [3]. Генерування випадкових процесів при імітації сигналів та метрології апаратури, визначення їхніх статистичних характеристик базується на ідеї лінійності випадкового процесу [13], коли потрібний процес трактується як отриманий за допомогою певного лінійного оператора (перетворювача) з білого шуму.

Схема 1.



Тут відбувається розділення: випадковості – її уособлює білий шум (ν_k), який названо породним, і закономірності, що вносить її перетворювач - названий формівним фільтром (ϕ_n). А з формули (1) виходить, що на відміну від стаціонарного в разі нестаціонарного випадкового процесу для його генерування не досить одного білого шуму і, що концепція лінійного випадкового процесу мусить бути розширена і мають бути установлені визначальні ознаки для нестаціонарного випадкового процесу та їхні ступені вільності.

В лінійній теорії сигналів суттєвим є вибір найпростіших складових із яких можна скласти всі елементи простору сигналів. У випадку, коли трактувати значення випадкових процесів, які служать моделями стохастичних сигналів, тобто випадкових величин, як вектори в колмогорівському гільбертовому просторі, то можна до них використати поняття рангу системи векторів. Кожний підпростір має скінченний базис. Всі базиси простору складаються з однакового числа $R \le n$ векторів. Це число називається розмірністю простору і позначається:

$$rankR = rank\left\{\xi_k,\ k = \overline{1,n}\right\}.$$

Ранг матриці R – максимальне число лінійно незалежних рядків і максимальне число лінійно незалежних стовбців цієї матриці. У випадковому процесі ранг визначає кількість лінійно незалежних випадкових величин – елементів базису простору, із яких можна сформувати всі елементи цього простору. При цьому коефіцієнти лінійних комбінацій виступають як "вільні параметри", але кількість їх визначена рангом системи векторів [14]. У схемі 1 ранг кореляційної матриці визначає кількість білих шумів, як джерел випадковості; формівні фільтри вносять певну степінь впорядкованості в чисто випадкові значення на виході білих шумів і формують $2N+1$ стаціонарних компонент ПКВП, їх кількість дорівнює $(2N+1)m$. Для внесення нестаціонарності потрібно $2N$ модуляторів (гетеродинів частот $k\Lambda$, $\pm k = \overline{1,N}$ та спільний суматор. Теоретично все виглядає легко, але практично реалізувати досить важко, дорого, навіть тоді, коли $R=3$; вносити зміни в неї також складно, її регулювання займає багато часу. Результати експерименту при цьому важко зафіксувати, але отримати їх можна миттєво. Робота з імітаційною моделлю відмічається простотою, гнучкістю, але для її реалізації потрібно багато машинного часу. Використання персональних ЕОМ та спеціалізованих процесорів для цих цілей викликає ряд трудноців, обумовлених низькою розрядністю машинних слів [5]. Останнє спонукає до проведення подальших досліджень в області генерування випадкових послідовностей.

Розглянемо деякі практичні аспекти генерування ПКВП, запропонуємо спосіб його реалізації.

В основі генерації на ЕОМ випадкової послідовності лежить обчислення за алгоритмом [3]:

$$x_{k+1} = (A \cdot X_k + B) \bmod P,\ P = 2^r. \qquad (2)$$

Числа $A,B,x_0 \in GF(2^r)$, r – розрядність двійкового слова. Внаслідок циклічності поля значення відліків x_0 будуть повторюватись. При виборі

необхідно дотримуватись правил і використовувати випадкові числа, керуючись принципами:

1. Число x_0 може бути будь-яким. Якщо за програмою робиться кілька підрахунків і кожен раз бажане різне джерело випадкових чисел, потрібно присвоїти x_0 останнє значення x, одержане під час попереднього підрахунку.
2. Число P повинно бути великим. Зручно його вибирати рівним розмірові слова обчислювальної машини, оскільки при цьому ефективно визначається (2). Значення (2) потрібно визначати точно, без помилок округлення.
3. Якщо P є степенем двійки (тобто, якщо використовується машина, яка працює в двійковій системі числення), потрібно вибирати A таким, щоб $A mod 200 = 21$. При такому виборі величини A можна сподіватись, що давач випадкових чисел дасть всі P можливих різних значень x раніше, ніж вони почнуть повторюватись і, крім того, гарантована висока "потужність".
4. Множник A повинен перевищувати величину $\sqrt{P}$, бажано, щоб він був більшим, ніж $P/100$, але меншим $P-\sqrt{P}$. Послідовність розрядів у двійковому або десятковому представленні A не повинна мати простого, регулярного виду. Краще всього в якості цього множника вибрати певну сталу (наприклад, $A=3141592654$. [4]). Крім розглянутих попередніх умов, множник A повинен вибиратись так, щоб він задовільняв "спектральний тест".
5. Постійна B повина бути рівною непарному числу (коли r степінь 2). Бажано вибирати B таким чином, щоб відношення B/P було тотожним величині:

$$\frac{B}{P}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}. \qquad (3)$$

   У такому випадку коефіцієнт кореляції послідовності буде невеликим.
6. Менш значущі (праві) розряди x не дуже хороші з точки зору випадковості, тому при використанні числа x основну роль повинні відігравати найбільш значущі розряди. Взагалі, краще розглядати x як випадковий дріб x/P в інтервалі між 0 і 1. Для того, щоб отримати таке число, потрібно помножити x на k і відкинути зайві розряди.

При обчислювальному експерименті із ПКВП по згаданній вище техніці вимоги, які висунуті до періоду повторень, повністю задовільнити неможливо.

Детальніше зупинимося на методі генерування тестової періодичної нестаціонарної послідовності (ПКВП), про яку згадувалось раніше.

Дослідимо модель шуму цифрового тестового сигналу, яка отримана із детермінованого неперервного гармонічного сигналу, що використовується при ідентифікації спеціалізованих обчислювальних пристроїв, які реалізують, наприклад, цифрові смугові фільтри [4].

Опишемо перетворення значення неперервного сигналу в одне із ряду квантованих значень таким чином:

$$x_c = \begin{cases} M sign(x); & |x| \geq M, \\ \varepsilon\{x/c\}c; & 0 \leq x < M, \\ \varepsilon\{x/c\}c - c; & 0 > x > -M, \end{cases}$$

де M – максимальне значення відліку;

$\varepsilon\{\cdot\}$– ціла частина від числа;

$c=u/2^r$– вага молодшого розряду r-розрядного позиційного коду;

u – амплітуда сигналу.

При цифровій обробці сигналів їхні відліки виражають у вигляді двійкових кодів із обмеженою розрядністю. При дискретизації і квантуванні виникає похибка, яка може бути зображена у вигляді дискретного білого шуму. Така модель має місце тоді, коли період дискретизації задовільняє умову, отриману з геометричної інтерпретації співвідношення між максимальною швидкістю зміни сигналу x'_{max}, вагою молодшого розряду і періодом дискретизації [5]:

$$x'_{max} \leq c / T_d. \tag{4}$$

Оскільки процес дискретизації нелінійний, то значення дискретного шумового процесу ξ цифрового подання x_c сигналу x визначимо так:

$$\xi_n = x(nT_d + \tau) - x_c(nT_d), \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{5}$$

де τ – час перетворення $(0 < \tau \leq T_d)$.

Врахування (2), часу перетворення і умов обробки приводить до невиконання (4).

Для детермінованого гармонічного сигналу з періодом T одержимо реалізації $\xi_n, n = \overline{0,P}$, $P > T/T_\partial$. Розглядаючи однакові номери відліків $\eta = n\left(\mathrm{mod}\,\varepsilon\{T/T_a\}\right)$ цих реалізацій, зауважимо:

а) при T/T_∂ цілому всі ξ_η, для однакових η, рівні;

б) при T/T_∂ раціональному для однакових η, ξ_η приймають ν різних значень, де ν – ціле число, яке визначається із умов замкнутості циклу [6], тому, що в цьому випадку, моменти відліків "пливуть" від періоду до періоду з νT періодичним перетворенням їхніх значень;

в) при T/T_∂ ірраціональному ξ_η приймають різні значення, бо тоді $\nu \equiv \infty$. Величина значень залежить від кількості розрядів r двійкового коду значень відліків і виконання умови (3).

При побудові відомої моделі шуму квантування вважають, що умова (3) виконується. Тоді значення $|\xi_\eta| < c$ є точками кривих, які отримані з різниці неперервного сигналу із його квантованого подання з врахуванням дискретизації. Використовуючи імовірнісний підхід [7], кожному значенню координати кривої ставиться у відповідність імовірнісна міра p_i, тобто приходять до розподілів, причому функція розподілу не залежить від номера ординати. В загальному випадку за характеристичною функцією певного розподілу знаходяться кореляційні функції при малих c (великих r). Виходить, що дискретний процес $\xi_n, n = \overline{0,\infty}$ є процесом типу білого шуму

[7,8]. Потрібно відмітити, що при цьому вважається, що T/T_∂ ірраціональне, тобто $\nu \equiv \infty$, оскільки до уваги приймаються всі можливі значення ординати кривих.

Випадкові збудження накладають принципові обмеження на точність того чи іншого фізичного процесу. Цілий ряд задач можна вирішити, використовуючи випадкові сигнали.

Дослідження макетів і моделей різних пристроїв, які знаходяться під впливом випадкових збуджень є однією із областей використання випадкових сигналів. Для оцінки точності систем і пристроїв та визначення їхньої оптимальної структури використовують тестові сигнали.

Виникає необхідність у генеруванні на ЕОМ періодично корельованих випадкових послідовностей для машинної імітації випадкових послідовностей, за допомогою яких можна адекватно описати реальні об'єкти і явища.

В даній статті сформульовано вимоги завдання випадкового сигналу та подано один із способів генерування періодично корельованих випадкових послідовностей.

Summary. The main requirements to the generation of random sequences based on the random number generation procedure and the method of synthesis of the periodical correlated sequnces are presented.

Література

1. Бобнев М. П. Генерирование случайных сигналов. – М.: Энергия, 1971. – 258с.
2. Марченко Б. Г., Омельченко В. А. Вероятносные модели случайных сигналов и полей в прикладной статистической радиофизики. – К.: УМК ВО, 1988. – 176с.
3. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ, т.2. – М.: Мир, 1977.– 724с.
4. Драган Я. П., Яворський Б.И. Модель шума тестового сигнала в каналах цифровой обработки сигналов. – К.: Известие ВУЗОВ МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника, 1986. – 6с.
5. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных вычислительных устройств. – М.: Энергия, 1975. – 448с.
6. Драган Я. П. Модели сигналов в линейных системах. – К.: Наукова думка, 1972. – 302с.
7. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1969. – 752с.
8. Верешкин Л. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. – М.: Сов. радио, 1973.– 152с.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848с..
10. Ососков Г. А., Чернов Н. И. Генератор с большой длиной периода псевдослучайных чисел для персональной ЭВМ. – Дубна: ОИЯИ, РП – 89–461, 1989. – 8с.
11. Драган Я. П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. – К.: Наукова думка, 1980. – 380с.
12. Драган Я. П., Васільєв К. К. та інш. Прикладна теорія випадкових процесів і полів. – Харків–Львів–Тернопіль: ТПІ, 1993. – 247с.
13. Драган Я. П., Приймак Н. В. Линейные периодически кореллированные случайные процессы. – Львов: ФМИ им. Г. В. Карпенка АН УССР, 1986. – 25с.
14. Драган Я. П. Ранг векторных стационарных случайных процессов. – Львов: ФМИ им. Г. В. Карпенка АН УССР, 1988. – 28с.
15. Драган Я. П. О представлении периодически кореллированного случайного процесса через стационарные компоненты. // Отбор и передача информ., 1975.- №45. – С. 7–20.