

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт з дисципліни

«Теорія ймовірностей та математична статистика»

для здобувачів вищої освіти першого
(бакалаврського) рівня

Тернопіль, 2026

УДК 519.2(075.8)

Габрусев Г. В. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня / Григорій Габрусев. — Тернопіль : СМП «Тайп», 2026. — 96 с.

Укладач:

Г. В. Габрусев, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензент:

Б. Г. Шелестовський, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Методичні вказівки розглянуті і затверджені на засіданні
кафедри вищої математики ТНТУ ім. Івана Пулюя
(Протокол № 1 від 27 серпня 2026 року).

Схвалені і рекомендовані до друку методичною комісією
факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
(Протокол № 1 від 28 серпня 2026 року).

© Габрусев Г. В.
© СМП "ТАЙП", 2026

ЗМІСТ

Вступ до практикуму.	3
Практична робота №1. Випадкові події та обчислення їх ймовірностей.	5
Практична робота №2. Дискретні випадкові величини та основні закони розподілу.	15
Практична робота №3. Неперервні випадкові величини. Нормальний розподіл та задачі про поле допуску.	29
Практична робота №4. Первинна статистична обробка вибірки та оцінювання параметрів генеральної сукупності.	42
Практична робота №5. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій узгодженості Пірсона.	55
Практична робота №6. Перевірка статистичних гіпотез про параметри двох генеральних сукупностей.	68
Практична робота №7. Кореляційний та регресійний аналіз експериментальних даних.	81
Практична робота №8. Від експериментальних даних до інженерного висновку: комплексний статистичний аналіз у Microsoft Excel.	89
Список рекомендованої літератури.	96

Практикум з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»

Призначення практикуму

Практикум призначений для формування в майбутніх інженерів умінь будувати ймовірнісні та статистичні моделі виробничих і експериментальних ситуацій, виконувати основні розрахунки вручну, перевіряти їх у Microsoft Excel та формулювати змістовний інженерний висновок.

Основний дидактичний принцип: ручне математичне опрацювання → усвідомлення алгоритму → перевірка та автоматизація в Microsoft Excel → інженерна інтерпретація результату.

Excel не використовується як «чорна скринька». Студент спочатку визначає математичну модель, формулу, передумови та логіку методу, а лише після цього застосовує електронну таблицю.

Концептуальна траєкторія

Практичні роботи утворюють одну послідовність, а не сім ізольованих тем:

ймовірність → випадкова величина → закон розподілу → неперервний розподіл → вибірка → статистичне оцінювання → статистична гіпотеза → порівняння генеральних сукупностей → кореляція → регресія.

ПР1 вводить мову випадкових подій. У ПР2 події узагальнюються до випадкової величини та її закону розподілу. ПР3 переходить до неперервної моделі й нормального розподілу, який надалі використовується як одна з базових статистичних моделей. ПР4 замінює теоретично відомі параметри оцінками за вибіркою. ПР5 перевіряє, чи узгоджуються експериментальні дані з припущеним законом. ПР6 використовує статистичні гіпотези для порівняння двох технологічних сукупностей. ПР7 завершує траєкторію аналізом залежності між кількісними інженерними факторами.

Тематика практичних робіт

Назва	Ключовий результат
Випадкові події та обчислення їх ймовірностей	Будувати події, використовувати правила додавання, множення, повної ймовірності та Байєса.
Дискретні випадкові величини та основні закони розподілу	Будувати закон розподілу; обчислювати математичне сподівання і дисперсію; застосовувати біноміальний та пуассонівський закони.
Неперервні випадкові величини. Нормальний розподіл та задачі про поле допуску	Оцінювати частку придатної продукції та ризик виходу параметра за поле допуску.
Первинна статистична обробка вибірки та оцінювання параметрів генеральної сукупності	Описувати вибірку, будувати інтервальні оцінки параметрів.
Перевірка гіпотези про закон розподілу за критерієм узгодженості Пірсона	Перевіряти статистичну сумісність вибірки з нормальним законом.
Перевірка статистичних гіпотез про параметри двох генеральних сукупностей	Порівнювати дисперсії та середні двох сукупностей і коректно обирати t-критерій.
Кореляційний та регресійний аналіз експериментальних даних	Оцінювати силу лінійного зв'язку, будувати регресію, аналізувати R^2 , залишки та прогноз.

Інженерний контекст

У задачах використовуються дані про розміри деталей, поля допуску, дефектність, шорсткість, твердість, міцність, температуру, деформацію, режими різання, подачу, швидкість різання, зношування, контроль якості та характеристики виробничих ліній. Математичний результат завжди повинен бути перекладений мовою об'єкта дослідження.

Загальна логіка виконання будь-якої ПР

1. Виділити випадковий об'єкт, подію, випадкову величину або вибірку.
2. Записати, що саме потрібно оцінити або перевірити.
3. Встановити передумови методу.
4. Обрати формулу або критерій і пояснити вибір.
5. Виконати основні розрахунки вручну.
6. Перевірити арифметику та/або автоматизувати повторювані обчислення в Excel.
7. Порівняти результати двох способів.
8. Сформулювати статистичний висновок.
9. Сформулювати інженерний висновок і, де можливо, рішення або рекомендацію.

Робота в Microsoft Excel

У прикладах наведені англійські імена функцій Excel. Залежно від мовних і регіональних налаштувань програми роздільником аргументів може бути крапка з комою або кома. Це не змінює математичного змісту формули.

Правило практикуму: якщо показник можна отримати як послідовність елементарних операцій, спочатку показується математична формула й ручний розрахунок, а потім — вбудована функція Excel. Наприклад, для середнього спочатку використовується $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, а вже потім =AVERAGE(B2:B51).

Вимоги до звіту

Мінімальний склад звіту студента

1. номер практичної роботи, тема та мета;
2. номер індивідуального варіанта і вихідні дані;
3. необхідні означення та формули;
4. ручні обчислення з проміжними результатами;
5. проміжні таблиці та графіки, якщо вони передбачені методом;
6. результати перевірки або автоматизації в Microsoft Excel;
7. зіставлення ручного й автоматизованого результатів;
8. статистичний висновок;
9. змістовний інженерний висновок.

Заборонено завершувати роботу лише числом або фразою на кшталт «гіпотезу прийнято». Висновок має пояснювати, що результат означає для досліджуваного технологічного процесу або виробу.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1

Випадкові події та обчислення їх ймовірностей

1. Мета роботи

- сформулювати вміння описувати інженерні ситуації як випадкові експерименти та системи випадкових подій;
- навчитися застосовувати класичне означення ймовірності та комбінаторні правила підрахунку кількості результатів;
- застосовувати правила додавання і множення ймовірностей, умовну ймовірність та критерії незалежності подій;
- використовувати формули повної ймовірності та Байєса для аналізу причин дефектності й інших виробничих подій;
- застосовувати схему Бернуллі для повторних незалежних випробувань і переводити математичний результат у змістовний інженерний висновок.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання практичної роботи студент повинен уміти:

- формувати випадковий експеримент, простір елементарних результатів і події;
- розрізняти достовірні, неможливі, сумісні, несумісні, протилежні та незалежні події;
- обирати між перестановками, розміщеннями та сполученнями (комбінаціями) без повторень і з повтореннями;
- обчислювати класичну ймовірність через підрахунок сприятливих і всіх рівноймовірних результатів;
- застосовувати формули додавання, умовної ймовірності та множення;
- перевіряти незалежність подій;
- застосовувати формулу повної ймовірності та формулу Байєса;
- розпізнавати умови схеми Бернуллі та знаходити ймовірність заданої кількості появ події;
- перевіряти ручні розрахунки в Microsoft Excel;
- формувати математичний та інженерний висновки за отриманим значенням ймовірності.

3. Теоретичні відомості

3.1. Випадковий експеримент, елементарний результат і випадкова подія

Випадковим експериментом називають відтворюваний за певного комплексу умов дослід, результат якого до його проведення неможливо передбачити однозначно. У машинобудуванні прикладами випадкових експериментів є вимірювання розміру випадково вибраної деталі, контроль її придатності, спостереження за відмовою вузла, фіксація кількості дефектів поверхні або вибір різального інструмента зі складу.

Кожний неподільний можливий результат експерименту називають **елементарним результатом**. Сукупність усіх елементарних результатів утворює **простір елементарних результатів** Ω .

Випадкова подія A — це твердження про результат експерименту, яке за конкретного випробування може відбутися або не відбутися. Подію можна розглядати як підмножину простору Ω .

- **Достовірна подія** — відбувається в кожному випробуванні; їй відповідає Ω і $P(\Omega) = 1$.
- **Неможлива подія** — не може відбутися; $P(\emptyset) = 0$.
- **Протилежна подія** $\bar{A}$ означає, що A не відбулася, тому $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Сума подій** $A \cup B$ означає: відбулася хоча б одна з подій A або B .
- **Добуток подій** $A \cap B$ означає: одночасно відбулися і A , і B .
- **Несумісні події** не можуть відбутися одночасно, тобто $A \cap B = \emptyset$.

Інженерний зміст. Наприклад, подія A — «діаметр вала вийшов за поле допуску», а B — «шорсткість перевищує допустиме значення». Подія $A \cup B$ означає, що деталь має хоча б одну з двох невідповідностей, а $A \cap B$ — що обидві невідповідності виявлені одночасно.

3.2. Класична ймовірність

Класичне означення ймовірності застосовують тоді, коли простір результатів скінченний, а всі елементарні результати можна вважати рівноймовірними. Якщо загальна кількість таких результатів дорівнює N , а події A сприяють m результатам, то

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

Основна складність у задачах на класичну ймовірність часто полягає не у самій формулі, а в коректному підрахунку m та N . Для цього використовують формули комбінаторики.

Важливо. Класичне означення не можна механічно застосовувати до будь-якої виробничої ситуації. Якщо результати не є рівноймовірними, ймовірність повинна визначатися з іншої моделі або за статистичними даними.

3.3. Комбінаторика: перестановки, розміщення і сполучення

Для натурального числа n факторіал визначається як

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1.$$

Під час вибору комбінаторної формули потрібно послідовно відповісти на два питання:

1. **Чи важливий порядок?** Якщо так — маємо перестановки або розміщення; якщо ні — сполучення.
2. **Чи дозволені повторення?** Від цього залежить конкретна формула.

Тип вибору	Коли застосовують	Формула	Короткий інженерний приклад
Перестановки без повторень	Використовуються всі n різних елементів; порядок важливий	$P_n = n!$	У скількох порядках можна виконати 5 різних операцій контролю? $5! = 120$.
Перестановки з повтореннями	Використовуються всі n елементів, серед яких є однакові	$\frac{P_n(n_1, \dots, n_r)}{n!} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}, \quad n_1 + \dots + n_r = n$	Послідовність 5 операцій містить два типи А, два типи В і один тип С: $\frac{5!}{2!2!} = 30$.
Розміщення без повторень	З n різних елементів вибирають k ; порядок важливий; повторень немає	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Із 8 датчиків обрати 3 різні та призначити їх на три різні позиції: $A_8^3 = 336$.
Розміщення з повтореннями	Є n типів елементів; формують упорядковану послідовність довжини k ; повторення дозволені	$\bar{A}_n^k = n^k$	Чотиризначний технологічний код формується з 6 символів із повтореннями: $6^4 = 1296$.

Тип вибору	Коли застосовують	Формула	Короткий інженерний приклад
Сполучення (комбінації) без повторень	З n різних елементів вибирають k ; порядок не важливий	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Із 10 деталей обрати 3 для руйнівного контролю: $C_{10}^3 = 120$.
Сполучення (комбінації) з повтореннями	Обирають k елементів із n типів; порядок не важливий; один тип може повторюватися	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	Сформувати комплект із 4 пластин, використовуючи 3 марки матеріалу з можливим повторенням: $\overline{C}_3^4 = C_6^4 = 15$.

Алгоритм вибору. Якщо використовуються всі елементи і змінюється лише їх порядок — перестановки. Якщо береться лише частина елементів і порядок важливий — розміщення. Якщо береться лише частина елементів і порядок не важливий — сполучення. Після цього окремо визначають, чи дозволені повторення.

3.4. Додавання ймовірностей

Для довільних двох подій A і B ймовірність появи хоча б однієї з них визначається формулою

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Величина $P(A \cap B)$ віднімається тому, що при простому додаванні вона була б врахована двічі. Для несумісних подій $A \cap B = \emptyset$, тому

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Для трьох і більше попарно несумісних подій ймовірність їх суми дорівнює сумі окремих ймовірностей.

3.5. Умовна ймовірність, множення ймовірностей і незалежність

Умовна ймовірність $P(A | B)$ — це ймовірність події A за умови, що подія B уже відбулася:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Звідси випливає правило множення ймовірностей:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B | A).$$

Події A і B називають **незалежними**, якщо настання однієї не змінює ймовірність іншої. Еквівалентні умови незалежності:

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B | A) = P(B), \quad P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Типова помилка. Несумісність і незалежність — різні поняття. Дві події з ненульовими ймовірностями не можуть бути одночасно і несумісними, і незалежними: якщо вони несумісні, то $P(A \cap B) = 0$, а для незалежних мало б бути $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$.

3.6. Формула повної ймовірності

Нехай події $H_1, H_2, \dots, H_k$ утворюють **повну групу гіпотез**: вони попарно несумісні та в кожному випробуванні обов'язково реалізується одна з них. Тобто

$$H_i \cap H_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad H_1 \cup \dots \cup H_k = \Omega, \quad \sum_{i=1}^k P(H_i) = 1.$$

Тоді для події A

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(H_i)P(A | H_i).$$

Формула особливо корисна, коли загальна подія може виникнути через кілька взаємовиключних причин: продукція надходить із різних верстатів, працюють різні зміни, застосовуються різні постачальники матеріалу тощо.

3.7. Формула Байєса

Якщо подія A уже відбулася, то за допомогою формули Байєса можна переоцінити ймовірності можливих причин H_i :

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A | H_j)}.$$

Ймовірності $P(H_i)$ до отримання інформації про подію A називають **апостеріорними**, а $P(H_i | A)$ після урахування факту A — **апостеріорними**.

Типова помилка. Не можна плутати $P(A | H_i)$ — ймовірність події всередині конкретної причини — з $P(H_i | A)$ — ймовірністю самої причини після того, як подію вже спостерігали.

3.8. Схема Бернуллі

Схема Бернуллі використовується для серії з n випробувань, якщо виконуються чотири умови:

1. кожне випробування має два взаємодоповняльні результати: подія A відбулася або не відбулася;
2. випробування незалежні;
3. ймовірність появи події A однакова в кожному випробуванні і дорівнює p ;
4. кількість випробувань n наперед задана.

Позначимо $q = 1 - p$. Ймовірність того, що подія A відбудеться рівно m разів у n незалежних випробуваннях, визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Ймовірність того, що подія не відбудеться жодного разу:

$$P_n(0) = q^n.$$

Ймовірність хоча б однієї появи:

$$P(m \geq 1) = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n.$$

Інженерний зміст. За стабільного технологічного процесу схему Бернуллі можна використовувати для оцінки ймовірності певної кількості дефектних деталей у невеликій незалежній вибірці, кількості відмов однотипних елементів або числа успішних контрольних випробувань.

4. Алгоритм виконання задач

1. Сформулювати випадковий експеримент і події, які розглядаються.
2. Визначити, чи можна застосувати класичне означення ймовірності. Якщо так — підрахувати загальну кількість результатів N і кількість сприятливих m , за потреби використовуючи комбінаторику.
3. Для комбінаторної задачі відповісти: чи важливий порядок і чи дозволені повторення.
4. Якщо потрібно знайти «хоча б одну» з подій — розглянути правило додавання або протилежну подію.
5. Якщо потрібно знайти одночасне чи послідовне настання подій — застосувати правило множення та за потреби умовну ймовірність.
6. Перевірити, чи є події незалежними; не припускати незалежність лише для спрощення розрахунку.
7. Якщо подія може виникнути через одну з кількох взаємовиключних причин, що утворюють повну групу, — застосувати формулу повної ймовірності.
8. Якщо результат уже спостерігався і потрібно оцінити ймовірність його причини — застосувати формулу Байєса.
9. Якщо маємо n незалежних однотипних випробувань із сталою ймовірністю p — використати схему Бернуллі.
10. Перевірити, що всі отримані ймовірності належать проміжку $[0; 1]$, а суми ймовірностей повних груп дорівнюють 1.
11. Виконати контрольний розрахунок у Microsoft Excel.
12. Сформулювати математичний висновок і пояснити його інженерний зміст.

5. Варіант 0 — комплект еталонних задач

У цій практичній роботі Варіант 0 складається з чотирьох окремих задач. Вони демонструють чотири базові типи міркувань, які студент повинен уміти розрізняти та застосовувати у своєму індивідуальному варіанті.

5.1. Задача 1. Додавання і множення ймовірностей

Умова. Під час контролю партії валів розглядають дві події: A — діаметр вала виходить за поле допуску; B — шорсткість поверхні перевищує допустиме значення. За статистикою процесу $P(A) = 0.06$, $P(B) = 0.04$, а серед валів із відхиленням діаметра перевищення шорсткості спостерігається з ймовірністю $P(B | A) = 0.20$. Знайти: 1) ймовірність одночасної появи двох невідповідностей; 2) ймовірність хоча б однієї невідповідності; 3) ймовірність відсутності обох невідповідностей; 4) з'ясувати, чи незалежні події A і B .

Що дано: $P(A) = 0.06$, $P(B) = 0.04$, $P(B | A) = 0.20$.

Що потрібно знайти: $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A \cup B})$ і перевірити незалежність.

1. Одночасна поява двох невідповідностей. Оскільки відома умовна ймовірність $P(B | A)$, застосовуємо правило множення:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = 0.06 \cdot 0.20 = 0.012.$$

Отже, ймовірність одночасного порушення допуску за діаметром і шорсткістю становить 0,012, або 1,2%.

2. Хоча б одна невідповідність. Події сумісні, тому застосовуємо загальну формулу додавання:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.06 + 0.04 - 0.012 = 0.088.$$

3. Відсутність обох невідповідностей.

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.088 = 0.912.$$

4. Перевірка незалежності. Для незалежних подій повинна виконуватися умова $P(B | A) = P(B)$. Але

$$0.20 \neq 0.04,$$

тому події A і B не є незалежними.

Інженерна інтерпретація. Приблизно 8,8% валів матимуть хоча б одну з двох розглянутих невідповідностей, а 1,2% — обидві одночасно. Значне збільшення ймовірності дефекту шорсткості за наявності відхилення діаметра вказує на можливий спільний технологічний чинник — наприклад, неправильний режим різання, зношення інструмента або нестабільність верстата.

5.2. Задача 2. Формула повної ймовірності

Умова. Деталі надходять на контроль із трьох виробничих ліній. Лінія 1 виготовляє 50% продукції і має 2% дефектних деталей; лінія 2 — 30% продукції і 3% дефектних деталей; лінія 3 — 20% продукції і 5% дефектних деталей. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана із загального потоку деталей буде дефектною.

Позначення. H_i — деталь виготовлена лінією i ; D — деталь дефектна.

Маємо:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0.50, & P(H_2) &= 0.30, & P(H_3) &= 0.20, \\ P(D | H_1) &= 0.02, & P(D | H_2) &= 0.03, & P(D | H_3) &= 0.05. \end{aligned}$$

Чому обираємо формулу повної ймовірності? Подія D може виникнути через одну з трьох взаємовиключних причин H_1, H_2, H_3 , причому

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0.50 + 0.30 + 0.20 = 1.$$

Отже, гіпотези утворюють повну групу.

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(D | H_i).$$

Підставляємо числа:

$$\begin{aligned} P(D) &= 0.50 \cdot 0.02 + 0.30 \cdot 0.03 + 0.20 \cdot 0.05. \\ P(D) &= 0.010 + 0.009 + 0.010 = 0.029. \end{aligned}$$

Перевірка. Оскільки загальна частка дефектів є зваженим середнім трьох рівнів дефектності 0,02; 0,03; 0,05, отримане значення 0,029 повинно лежати між 0,02 та 0,05. Умова виконується.

Інженерна інтерпретація. За стабільності часток випуску та рівнів дефектності можна очікувати приблизно 2,9% дефектних деталей у загальному виробничому потоці, тобто близько 29 дефектних деталей на кожну 1000 виготовлених.

5.3. Задача 3. Формула Байєса

Умова. Використовуючи дані попередньої задачі, знайти ймовірність того, що вже виявлена дефектна деталь була виготовлена на лінії 3.

Що змінилося порівняно із задачею 2? Тепер факт дефекту D уже відомий. Потрібно оцінити ймовірність причини H_3 , тобто знайти $P(H_3 | D)$. Це типова постановка для формули Байєса.

$$P(H_3 | D) = \frac{P(H_3)P(D | H_3)}{P(D)}.$$

Із задачі 2 маємо $P(D) = 0.029$. Тому

$$P(H_3 | D) = \frac{0.20 \cdot 0.05}{0.029} = \frac{0.010}{0.029} \approx 0.3448.$$

Отже, апостеріорна ймовірність того, що дефект походить із лінії 3, становить приблизно 0,3448, або 34,48%.

Перевірка логіки. Лінія 3 випускає лише 20% продукції, але має найбільший рівень дефектності — 5%. Тому серед дефектних деталей її частка закономірно повинна бути більшою за 20%.

Інженерна інтерпретація. Хоча лінія 3 забезпечує лише п'яту частину випуску, вона формує приблизно третину всіх дефектів. Якщо потрібно визначити пріоритет перевірки технологічного обладнання, лінію 3 доцільно дослідити першою.

5.4. Задача 4. Схема Бернуллі

Умова. Загальна ймовірність дефекту для виробничого потоку, визначена в задачі 2, дорівнює $p = 0.029$. Із потоку незалежно відбирають $n = 10$ деталей. Вважаємо, що процес стабільний і ймовірність дефекту для кожної деталі залишається сталою. Знайти: 1) ймовірність того, що дефектною буде рівно одна деталь; 2) ймовірність того, що серед десяти деталей буде хоча б одна дефектна.

Перевірка передумов. Маємо фіксоване число випробувань $n = 10$, два результати для кожної деталі (дефектна/придатна), сталу ймовірність $p = 0.029$ та припущення незалежності. Отже, схема Бернуллі застосовна.

Визначимо

$$q = 1 - p = 1 - 0.029 = 0.971.$$

1. Рівно одна дефектна деталь.

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9.$$

$$P_{10}(1) = 10 \cdot 0.029 \cdot 0.971^9 \approx 0.222521.$$

Отже, ймовірність отримати рівно одну дефектну деталь серед десяти становить приблизно 22,25%.

2. Хоча б одна дефектна деталь. Зручніше використати протилежну подію — «жодної дефектної»:

$$P(m \geq 1) = 1 - P_{10}(0) = 1 - q^{10} = 1 - 0.971^{10} \approx 0.254938.$$

Отже, ймовірність того, що у вибірці з 10 деталей буде щонайменше одна дефектна, становить приблизно 25,49%.

Перевірка. Подія «рівно одна дефектна» є частиною події «хоча б одна дефектна», тому повинна виконуватися нерівність $P_{10}(1) < P(m \geq 1)$. Маємо $0.2225 < 0.2549$, що узгоджується з логікою.

Інженерна інтерпретація. Навіть за відносно невеликого рівня дефектності 2,9% ймовірність зустріти принаймні одну дефектну деталь у вибірці з 10 одиниць уже становить близько 25,5%. Це демонструє, чому невелика частка дефектів не означає, що дефекти рідко з'являтимуться в серійному контролі.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

Excel використовується після ручного розрахунку для перевірки та автоматизації. Назви функцій наведено в міжнародному англomовному записі; у локалізованій версії Excel назва функції або роздільник аргументів може відображатися інакше.

6.1. Комбінаторні обчислення

- факторіал: FACT(n);
- розміщення без повторень: PERMUT(n;k);
- розміщення з повтореннями: PERMUTATIONA(n;k);
- сполучення без повторень: COMBIN(n;k);
- сполучення з повтореннями: COMBINA(n;k);
- перестановки з повтореннями загального виду можна перевіряти як $FACT(n)/(FACT(n_1)*FACT(n_2)*...)$.

6.2. Задача 1

- одночасна невідповідність: $=0.06*0.20 \rightarrow 0,012$;
- хоча б одна невідповідність: $=0.06+0.04-0.012 \rightarrow 0,088$;
- жодної невідповідності: $=1-0.088 \rightarrow 0,912$.

6.3. Задача 2

Повну ймовірність можна обчислити безпосередньо:

$$=0.5*0.02+0.3*0.03+0.2*0.05$$

або, якщо частки ліній і їх дефектність записані у двох діапазонах, функцією SUMPRODUCT. Результат повинен дорівнювати 0,029.

6.4. Задача 3

Формула Байєса:

$$=(0.2*0.05)/0.029$$

Результат: приблизно 0,3448.

6.5. Задача 4

Для рівно одного дефекту можна записати формулу вручну в Excel або використати біноміальний розподіл:

$$=BINOM.DIST(1;10;0.029;FALSE)$$

Очікуваний результат: приблизно 0,222521.

Для хоча б одного дефекту:

=1-BINOM.DIST(0;10;0.029;FALSE)

або без спеціальної функції:

=1-(1-0.029)^10

Очікуваний результат: приблизно 0,254938.

Порівняння. Ручний розрахунок та Excel повинні збігатися з точністю до округлення. Якщо результати відрізняються, потрібно перевірити не лише введення формули, а й те, чи правильно визначено тип задачі та її події.

7. Вимоги до звіту

Звіт студента повинен містити:

1. номер практичної роботи, тему та мету;
2. номер індивідуального варіанта;
3. вихідні дані для всіх задач варіанта;
4. позначення випадкових подій, гіпотез та параметрів;
5. обґрунтування вибору відповідної формули або комбінаторної моделі;
6. необхідні загальні формули;
7. підстановку числових даних і ручні обчислення;
8. проміжні результати та перевірки;
9. результати перевірки в Microsoft Excel;
10. порівняння ручного й автоматизованого результатів;
11. математичний висновок для кожної задачі;
12. підсумковий інженерний висновок.

Неприйнятно: « $P = 0.029$ » без пояснення. **Правильно:** «Ймовірність дефекту становить 0,029, тобто за стабільності процесу можна очікувати близько 2,9% дефектних деталей у загальному потоці».

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

Ймовірнісний аналіз показав, що невідповідності різних характеристик деталі можуть бути статистично пов'язаними, тому їх не завжди можна аналізувати як незалежні. Для трьох виробничих ліній загальна ймовірність дефекту становить 2,9%, причому після виявлення дефекту ймовірність його походження з лінії 3 зростає з апіорних 20% до приблизно 34,5%. За стабільного процесу й незалежного відбору 10 деталей ймовірність виявити хоча б одну дефектну становить приблизно 25,5%. Отримані результати дають змогу не лише оцінити ризик дефекту, а й визначити пріоритетний напрям технологічного контролю.

9. Контрольні питання для захисту

1. Що називають випадковим експериментом?
2. Що таке елементарний результат і простір елементарних результатів?
3. Що називають випадковою подією?

4. Чим достовірна подія відрізняється від неможливої?
5. Що означає протилежна подія $\bar{A}$?
6. Як інтерпретувати події $A \cup B$ та $A \cap B$?
7. Коли події називають несумісними?
8. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
9. За яких умов класичне означення ймовірності застосовувати не можна?
10. Що таке факторіал і чому приймають $0! = 1$?
11. Коли використовують перестановки без повторень?
12. Як обчислюють число перестановок із повтореннями?
13. Чим розміщення відрізняються від сполучень?
14. Як визначити, чи важливий порядок у комбінаторній задачі?
15. Коли використовують розміщення з повтореннями?
16. Коли використовують сполучення з повтореннями?
17. Сформулюйте загальну формулу додавання ймовірностей двох подій.
18. Як спростується формула додавання для несумісних подій?
19. Що називають умовною ймовірністю?
20. Сформулюйте правило множення ймовірностей.
21. Що означає незалежність двох подій?
22. Як за умовною ймовірністю перевірити незалежність подій?
23. Чому несумісність не тотожна незалежності?
24. Що називають повною групою подій або гіпотез?
25. Сформулюйте формулу повної ймовірності.
26. Які виробничі ситуації природно приводять до формули повної ймовірності?
27. Сформулюйте формулу Байєса.
28. Чим апіорна ймовірність відрізняється від апостеріорної?
29. Чому $P(D | H_i)$ і $P(H_i | D)$ мають різний зміст?
30. Які умови повинні виконуватися для застосування схеми Бернуллі?
31. Запишіть формулу Бернуллі для рівно m появ події у n випробуваннях.
32. Як знайти ймовірність хоча б однієї появи події в схемі Бернуллі?
33. Чому для події «хоча б одна» часто вигідніше використовувати протилежну подію?
34. Що може порушити припущення незалежності під час контролю деталей із реальної виробничої партії?
35. Який інженерний висновок можна зробити, якщо одна лінія має малу частку випуску, але високу апостеріорну ймовірність бути джерелом дефекту?

10. Методичний міст до наступної ПР

У ПР1 ми розглядали окремі випадкові події та кількість їх появ у повторних випробуваннях. У схемі Бернуллі вже природно виникає числова характеристика випадкового результату — наприклад, **кількість дефектних деталей серед n перевірених**. Така кількість не є простою подією: вона може набувати кількох числових значень із певними ймовірностями. Саме це приводить до поняття **випадкової величини** та її **закону розподілу**, які є предметом ПР №2.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

Дискретні випадкові величини та основні закони розподілу

1. Мета роботи

- сформулювати розуміння випадкової величини як числової характеристики результату випадкового експерименту;
- навчитися розрізняти дискретні та неперервні випадкові величини й обґрунтовувати вибір математичної моделі;
- будувати та аналізувати закон розподілу дискретної випадкової величини і її функцію розподілу;
- обчислювати математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення та інші числові характеристики дискретної випадкової величини;
- застосовувати основні дискретні закони розподілу до задач машинобудування, контролю якості та технологічних процесів;
- перевіряти ручні обчислення та автоматизувати повторювані розрахунки в Microsoft Excel, не втрачаючи змісту математичної моделі.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання практичної роботи студент повинен уміти:

- дати означення випадкової величини та пояснити її зв'язок із випадковим експериментом;
- за змістом інженерної задачі встановити, чи є випадкова величина дискретною або неперервною;
- задати закон розподілу дискретної випадкової величини у вигляді таблиці та перевірити його коректність;
- за таблично заданим законом знаходити ймовірності подій, математичне сподівання, дисперсію та стандартне відхилення;
- будувати функцію розподілу $F(x)$ для дискретної випадкової величини та використовувати її для обчислення ймовірностей;
- розпізнавати розподіли Бернуллі, біноміальний, дискретний рівномірний, геометричний, Пуассона та гіпергеометричний;
- обирати закон розподілу відповідно до фізичного змісту задачі та передумов моделі;
- зіставляти ручні результати з результатами Microsoft Excel і формулювати змістовний інженерний висновок.

3. Теоретичні відомості

3.1. Випадкова величина

Випадкова величина — це числова функція результату випадкового експерименту. Якщо Ω — простір елементарних результатів експерименту, то випадкова величина X кожному результату $\omega \in \Omega$ ставить у відповідність певне дійсне число:

$$X: \Omega \rightarrow R.$$

До проведення експерименту конкретне значення X невідоме, але множина можливих значень та закономірності їх появи можуть бути описані ймовірнісною моделлю.

Приклади в машинобудуванні:

- X — кількість дефектних деталей серед перевірених;
- X — число відмов верстата за зміну;
- X — кількість локальних дефектів на одиниці довжини поверхні;
- X — діаметр виготовленого вала, мм;
- X — твердість поверхні після термообробки;
- X — температура в зоні різання.

Важливо. Випадкова подія відповідає на запитання «відбулася чи не відбулася?», а випадкова величина надає випадковому результату **числове значення**. Наприклад, «у вибірці є дефектна деталь» — подія, а «кількість дефектних деталей у вибірці» — випадкова величина.

3.2. Дискретні та неперервні випадкові величини

Дискретна випадкова величина (ДВВ) набуває окремих, ізольованих значень, множина яких є скінченною або зліченною. Для кожного можливого значення можна безпосередньо задати точкову ймовірність $P(X = x_i)$.

Неперервна випадкова величина (НВВ) може набувати будь-яких значень із певного числового інтервалу або сукупності інтервалів. Для неперервної моделі ймовірність окремого точного значення дорівнює нулю, а зміст мають ймовірності потрапляння в інтервали.

Ознака	Дискретна випадкова величина	Неперервна випадкова величина
Можливі значення	Окремі значення: 0,1,2, ... або інший скінченний/злічений набір	Усі значення з інтервалу, наприклад $49.95 \leq X \leq 50.05$
Типові інженерні приклади	число дефектів, відмов, заявок, повторних проходів	діаметр, маса, твердість, температура, деформація, шорсткість
Ймовірність окремого значення	може бути додатною: $P(X = x_i) = p_i$	для неперервної моделі $P(X = x) = 0$
Основний опис розподілу	таблиця (x_i, p_i) , функція розподілу	функція розподілу та густина розподілу

У цій практичній роботі основна увага приділяється **дискретним** випадковим величинам. Неперервні випадкові величини детально розглядатимуться у ПР №3.

3.3. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають правило, яке кожному можливому значенню x_i ставить у відповідність ймовірність того, що випадкова величина набуде саме цього значення:

$$p_i = P(X = x_i).$$

Для скінченної ДВВ закон часто задають таблицею:

$$\begin{array}{c|cccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{array}$$

Коректний закон розподілу повинен задовольняти дві умови:

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Якщо потрібно знайти ймовірність події $X \in A$, для дискретної величини додають ймовірності всіх значень x_i , що належать множині A :

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i).$$

3.4. Функція розподілу

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Вона показує ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке не перевищує задане число x . Для дискретної випадкової величини

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Основні властивості функції розподілу:

- $0 \leq F(x) \leq 1$;
- $F(x)$ є неспадною функцією;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- для дискретної випадкової величини $F(x)$ має ступінчастий вигляд, а величина стрибка в точці x_i дорівнює $P(X = x_i)$.

Функція розподілу дозволяє обчислювати ймовірності інтервальних подій. Зокрема:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Для подій з іншими комбінаціями строгих і нестрогих нерівностей у дискретному випадку необхідно додатково враховувати ймовірності в граничних точках.

3.5. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Закон розподілу містить повну інформацію про дискретну випадкову величину, але для інженерного аналізу часто потрібні компактні показники, які характеризують її типовий рівень і розсіювання. Такі показники називають **числовими характеристиками**.

Математичне сподівання характеризує теоретичний середній рівень випадкової величини при великій кількості повторень експерименту:

$$M(X) = E(X) = \sum_{i=1}^m x_i p_i.$$

Математичне сподівання не обов'язково повинно бути одним із можливих значень X . Наприклад, очікувана кількість дефектів може дорівнювати 0.56, хоча фактична кількість дефектів завжди ціла.

Початковий момент k -го порядку:

$$M(X^k) = E(X^k) = \sum_{i=1}^m x_i^k p_i.$$

Зокрема, другий початковий момент

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^m x_i^2 p_i$$

використовується для обчислення дисперсії.

Дисперсія характеризує середній квадрат відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Для практичних розрахунків зручно використовувати еквівалентну формулу:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Середнє квадратичне (стандартне) відхилення:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсія має квадрат одиниці вимірювання X , а стандартне відхилення — ті самі одиниці, що й сама випадкова величина. Саме тому σ_X зазвичай зручніше інтерпретувати інженерно.

Мода дискретної випадкової величини — значення, якому відповідає найбільша ймовірність:

$$Mo(X) = x_j, \quad p_j = \max_i p_i.$$

Корисні властивості математичного сподівання і дисперсії:

$$\begin{aligned} M(aX + b) &= aM(X) + b, \\ D(aX + b) &= a^2 D(X). \end{aligned}$$

3.6. Розподіл Бернуллі

Якщо випадкова величина описує результат одного випробування з двома можливими наслідками, зручно кодувати їх числами 1 і 0. Нехай

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q = 1 - p.$$

Тоді X має **розподіл Бернуллі**:

$$M(X) = p, \quad D(X) = p(1 - p).$$

У контролі якості значення $X = 1$ може означати, наприклад, виявлення дефекту. Слово «успіх» у математичній моделі не означає позитивного технологічного результату.

3.7. Біноміальний розподіл

Нехай виконують n незалежних випробувань Бернуллі, у кожному ймовірність події «успіх» дорівнює p , а X — кількість появ цієї події. Тоді

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Bin}(n, p), \\ P(X = k) &= C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Числові характеристики:

$$M(X) = np, \quad D(X) = np(1 - p), \quad \sigma_X = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Передумови: фіксоване число випробувань; у кожному випробуванні два взаємовиключні результати; стала ймовірність p ; незалежність випробувань.

3.8. Дискретний рівномірний розподіл

Якщо випадкова величина може набувати m різних значень $x_1, x_2, \dots, x_m$ з однаковими ймовірностями, то вона має **дискретний рівномірний розподіл**:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для значень $1, 2, \dots, m$:

$$M(X) = \frac{m + 1}{2}, \quad D(X) = \frac{m^2 - 1}{12}.$$

Якщо рівноймовірні значення є іншими числами (наприклад, п'ять рівнів подачі), числові характеристики обчислюють за загальними формулами $M(X) = \sum x_i p_i$ та $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

3.9. Геометричний розподіл

Якщо незалежні випробування Бернуллі повторюють до першої появи події з ймовірністю p , а X — номер випробування, у якому подія з'явилася вперше, то

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Приклад: число запусків автоматизованої операції до першого успішного проходження контрольної перевірки за умови сталої ймовірності успіху та незалежності запусків.

3.10. Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона застосовують для числа подій, що виникають на фіксованому інтервалі часу, довжини, площі або об'єму, коли події можна вважати рідкісними, а їх середня інтенсивність сталою:

$$X \sim \text{Pois}(\lambda),$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$M(X) = D(X) = \lambda, \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}.$$

Параметр λ — середня кількість подій на обраний інтервал. Розподіл Пуассона також може використовуватися як наближення біноміального розподілу за великого n , малого p та помірною значення np .

3.11. Гіпергеометричний розподіл

Нехай у скінченній партії є N виробів, серед них D мають певну ознаку (наприклад, є дефектними). Із партії **без повернення** випадково відбирають n виробів. Якщо X — кількість виробів з ознакою у вибірці, то

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Числові характеристики:

$$M(X) = n \frac{D}{N}, D(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Останній множник $\frac{N-n}{N-1}$ є поправкою на скінченність генеральної сукупності.

Біноміальний чи гіпергеометричний? Якщо кожне випробування можна вважати незалежним і p практично не змінюється — використовують біноміальну модель. Якщо відбирають помітну частину скінченної партії **без повернення**, випробування залежні й природною моделлю є гіпергеометричний розподіл.

3.12. Як обрати дискретний закон розподілу

Ситуація	Типова випадкова величина	Модель
Одне випробування, два результати	0 або 1: дефекту немає / є	Бернуллі
n незалежних випробувань зі сталою p	кількість дефектних деталей у n перевірених	біноміальний
Скінченний набір рівномірних режимів	випадково обраний рівень технологічного параметра	дискретний рівномірний
Випробування до першого успіху	номер запуску до першого успішного результату	геометричний
Число рідкісних подій на інтервалі	кількість дефектів на 1 м поверхні	Пуассона
Відбір без повернення зі скінченної партії	кількість дефектних у контрольній вибірці	гіпергеометричний

Типові помилки: плутати випадкову величину з подією; не перевіряти суму ймовірностей; вважати математичне сподівання «найбільш ймовірним значенням»; плутати $p_i = P(X = x_i)$ з $F(x) = P(X \leq x)$; забувати, що дисперсія має квадрат одиниці вимірювання; застосовувати біноміальний закон до відбору без повернення з невеликої партії; механічно використовувати функції Excel без перевірки передумов моделі.

4. Алгоритм виконання задач

1. **Описати випадковий експеримент** і чітко визначити, що означає випадкова величина X та в яких одиницях вона вимірюється.
2. **Встановити тип величини:** дискретна чи неперервна.
3. Якщо закон заданий таблицею — перевірити $p_i \geq 0$ та $\sum p_i = 1$. Якщо закон потрібно обрати — перевірити передумови відповідної моделі.
4. **Побудувати закон розподілу** або записати його аналітичну формулу.
5. За потреби побудувати функцію розподілу $F(x)$ та використати її для знаходження потрібних ймовірностей.
6. Обчислити $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$, σ_X ; за змістом задачі визначити моду.
7. Виконати числову перевірку: нормування закону, межі ймовірностей, узгодженість формул та одиниць вимірювання.
8. Повторити або автоматизувати обчислення в Microsoft Excel.
9. Порівняти ручні й автоматизовані результати та пояснити можливі відмінності через округлення.
10. Сформулювати **математичний і інженерний висновки**.

5. Варіант 0 — комплект еталонних задач

Наведені нижче задачі є еталоном оформлення. У кожній задачі потрібно не лише отримати число, а й визначити випадкову величину, обґрунтувати модель, показати формули та підстановку чисел, виконати перевірку і сформулювати інженерний висновок.

5.1. Задача 1. Таблично заданий закон розподілу, числові характеристики та функція розподілу

Умова. Після шліфування деталей може потребувати додаткових коригувальних проходів. Для стабільного технологічного процесу кількість додаткових проходів X має такий закон розподілу:

x_i — кількість додаткових проходів	0	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	0.10	0.30	0.45	0.15

Знайти: 1) математичне сподівання; 2) дисперсію; 3) стандартне відхилення; 4) моду; 5) функцію розподілу $F(x)$; 6) ймовірність $P(1 < X \leq 3)$. Дати інженерну інтерпретацію результатів.

Крок 1. Перевіряємо закон розподілу.

$$0.10 + 0.30 + 0.45 + 0.15 = 1.00.$$

Усі ймовірності невід’ємні, а їх сума дорівнює 1, тому таблиця задає коректний закон розподілу.

Крок 2. Обчислюємо математичне сподівання.

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0.10 + 1 \cdot 0.30 + 2 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.15 = 1.65.$$

Отже, у довгій серії деталей середня теоретична кількість додаткових коригувальних проходів становить 1.65 на одну деталь.

Крок 3. Знаходимо другий початковий момент.

$$M(X^2) = 0^2 \cdot 0.10 + 1^2 \cdot 0.30 + 2^2 \cdot 0.45 + 3^2 \cdot 0.15 = 3.45.$$

Крок 4. Знаходимо дисперсію та стандартне відхилення.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 3.45 - 1.65^2 = 0.7275. \quad \sigma_X = \sqrt{0.7275} \approx 0.8529.$$

Крок 5. Визначаємо моду. Найбільша ймовірність 0.45 відповідає значенню $X = 2$, тому

$$Mo(X) = 2.$$

Крок 6. Будуємо функцію розподілу.

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x < 0; \\ F(x) &= 0.10, & 0 \leq x < 1; \\ F(x) &= 0.40, & 1 \leq x < 2; \\ F(x) &= 0.85, & 2 \leq x < 3; \\ F(x) &= 1, & x \geq 3. \end{aligned}$$

Наприклад, $F(1) = P(X \leq 1) = 0.10 + 0.30 = 0.40$.

Крок 7. Знаходимо потрібну ймовірність за функцією розподілу.

$$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 1 - 0.40 = 0.60.$$

Перевірка безпосереднім додаванням:

$$P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.45 + 0.15 = 0.60.$$

Інженерна інтерпретація. У довгій серії деталей слід очікувати в середньому 1.65 додаткового коригувального проходу на деталь. Найтиповіший результат — два проходи. Ймовірність того, що деталь потребуватиме двох або трьох додаткових проходів, становить 60%, що може бути підставою для аналізу стабільності первинного режиму шліфування.

5.2. Задача 2. Біноміальний розподіл

Умова. Після стабілізованої операції ймовірність отримати дефектну деталь становить $p = 0.07$. Із потоку незалежно контролюють $n = 8$ деталей. Нехай X — кількість дефектних деталей серед восьми перевірених. Побудувати закон розподілу X , знайти $P(X = 1)$, $P(X \leq 1)$, математичне сподівання, дисперсію та стандартне відхилення.

Крок 1. Обґрунтовуємо модель. Маємо фіксовані 8 випробувань, у кожному два результати, стала ймовірність дефекту $p = 0.07$, випробування вважаємо незалежними. Тому

$$X \sim \text{Bin}(8, 0.07).$$

Крок 2. Записуємо загальну формулу.

$$P(X = k) = C_8^k (0.07)^k (0.93)^{8-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 8.$$

Наприклад:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.93^8 \approx 0.559582, \\ P(X = 1) &= C_8^1 \cdot 0.07 \cdot 0.93^7 \approx 0.336952. \end{aligned}$$

Крок 3. Будуємо закон розподілу.

k	$P(X = k)$
0	0.559582
1	0.336952
2	0.088767
3	0.013363
4	0.001257
5	0.000076
6	0.000003
7	0.000000061
8	0.0000000006

За неокругленими значеннями сума всіх ймовірностей дорівнює 1.

Крок 4. Знаходимо накопичену ймовірність.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.559582 + 0.336952 = 0.896534.$$

Крок 5. Обчислюємо числові характеристики.

$$\begin{aligned} M(X) &= np = 8 \cdot 0.07 = 0.56, \\ D(X) &= np(1 - p) = 8 \cdot 0.07 \cdot 0.93 = 0.5208, \\ \sigma_X &= \sqrt{0.5208} \approx 0.7217. \end{aligned}$$

Інженерна інтерпретація. У серіях по 8 деталей очікувана кількість дефектних становить 0.56 деталі на серію. Ймовірність того, що у восьми перевірених деталях буде не більше однієї дефектної, становить приблизно 89.65%.

5.3. Задача 3. Розподіл Пуассона

Умова. На 1 м обробленої поверхні в середньому реєструють 1.3 локального дефекту. Прийняти пуассонівську модель. Нехай X — кількість дефектів на 1 м поверхні. Знайти ймовірності $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X \geq 2)$, а також $M(X)$, $D(X)$ і σ_X .

Крок 1. Параметр моделі. Середня інтенсивність на обраному інтервалі дорівнює

$$\lambda = 1.3.$$

Крок 2. Ймовірність відсутності дефектів.

$$P(X = 0) = e^{-1.3} \frac{1.3^0}{0!} = e^{-1.3} \approx 0.272532.$$

Крок 3. Ймовірність одного дефекту.

$$P(X = 1) = e^{-1.3} \frac{1.3^1}{1!} \approx 0.354291.$$

Крок 4. Ймовірність двох або більше дефектів.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)].$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0.272532 + 0.354291) \approx 0.373177.$$

Крок 5. Числові характеристики.

$$M(X) = D(X) = \lambda = 1.3, \quad \sigma_X = \sqrt{1.3} \approx 1.1402.$$

Інженерна інтерпретація. За заданої інтенсивності на одному метрі поверхні очікують у середньому 1.3 локального дефекту. Ймовірність появи щонайменше двох дефектів становить приблизно 37.32%, тому такий результат не є рідкісним для прийнятої моделі.

5.4. Задача 4. Дискретний рівномірний розподіл

Умова. У рандомізованому технологічному експерименті система з однаковими ймовірностями призначає один із п'яти рівнів подачі різального інструмента: 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 або 0.30 мм/об. Нехай X — призначена подача. Побудувати закон розподілу, знайти $M(X)$, $D(X)$, σ_X , $P(0.15 \leq X \leq 0.25)$ та $F(0.22)$.

Крок 1. Закон розподілу. Маємо $m = 5$ рівноймовірних значень, тому для кожного

$$P(X = x_i) = \frac{1}{5} = 0.20.$$

x_i , мм/об	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
p_i	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

Крок 2. Математичне сподівання.

$$M(X) = 0.20(0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.25 + 0.30) = 0.20.$$

Крок 3. Дисперсія.

$$D(X) = 0.20[(0.10 - 0.20)^2 + (0.15 - 0.20)^2 + (0.20 - 0.20)^2 + (0.25 - 0.20)^2 + (0.30 - 0.20)^2] = 0.005.$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.005} \approx 0.07071.$$

Крок 4. Інтервальна ймовірність. У заданий інтервал потрапляють три з п'яти рівноймовірних значень:

$$P(0.15 \leq X \leq 0.25) = \frac{3}{5} = 0.60.$$

Крок 5. Функція розподілу в точці. Значення, що не перевищують 0.22, — 0.10, 0.15 та 0.20, тому

$$F(0.22) = P(X \leq 0.22) = \frac{3}{5} = 0.60.$$

Інженерна інтерпретація. Рандомізація є збалансованою: кожен режим призначається з однаковою ймовірністю. Середній теоретичний рівень подачі дорівнює 0.20 мм/об, а 60% призначень припадають на центральний діапазон 0.15–0.25 мм/об.

5.5. Задача 5. Гіпергеометричний розподіл: контроль скінченної партії без повернення

Умова. У партії з $N = 20$ деталей відомо $D = 4$ дефектні. Для контролю випадково відбирають $n = 5$ деталей **без повернення**. Нехай X — кількість дефектних деталей у контрольній вибірці. Побудувати закон розподілу, знайти $P(X \leq 1)$, математичне сподівання та дисперсію.

Крок 1. Обираємо модель. Відбір проводиться без повернення зі скінченної партії, тому ймовірність дефекту змінюється після кожного вилучення. Біноміальна модель тут не є точною. Використовуємо гіпергеометричний закон:

$$P(X = k) = \frac{C_4^k C_{16}^{5-k}}{C_{20}^5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Крок 2. Обчислюємо ймовірності. Наприклад:

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_{16}^5}{C_{20}^5} \approx 0.281734, P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_{16}^4}{C_{20}^5} \approx 0.469556.$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0.281734	0.469556	0.216718	0.030960	0.001032

Сума неокруглених ймовірностей дорівнює 1.

Крок 3. Ймовірність не більш як однієї дефектної деталі.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.281734 + 0.469556 = 0.751290.$$

Крок 4. Числові характеристики.

$$M(X) = n \frac{D}{N} = 5 \cdot \frac{4}{20} = 1.$$

$$D(X) = 5 \cdot \frac{4}{20} \left(1 - \frac{4}{20}\right) \frac{20 - 5}{20 - 1} \approx 0.631579, \sigma_X = \sqrt{0.631579} \approx 0.7947.$$

Інженерна інтерпретація. У вибірці з п'яти деталей очікується в середньому одна дефектна. Ймовірність виявити не більше однієї дефектної деталі становить приблизно 75.13%. Через відбір без повернення результати окремих вибірок залежні, тому використання біноміального закону без обґрунтування було б методично некоректним.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

Принцип роботи: спочатку студент виконує основні обчислення вручну, після чого відтворює їх у таблиці Excel. Вбудована статистична функція використовується як перевірка або засіб автоматизації, а не як заміна математичної моделі.

6.1. Таблично заданий закон розподілу: задача 1

Нехай значення x_i записані в клітинках A2:A5, а ймовірності p_i — у B2:B5.

Що обчислюємо	Формула Excel	Зміст
Перевірка нормування	=SUM(B2:B5)	результат повинен дорівнювати 1
$M(X)$	=SUMPRODUCT(A2:A5;B2:B5)	сума $x_i p_i$
$M(X^2)$	у C2: =A2^2*B2, скопіювати вниз; потім =SUM(C2:C5)	другий початковий момент
$D(X)$	=SUM(C2:C5)-SUMPRODUCT(A2:A5;B2:B5)^2	$M(X^2) - [M(X)]^2$
σ_X	=SQRT(дисперсія)	стандартне відхилення
$F(x)$ для заданого x у E2	=SUMIF(A2:A5;"<="&E2;B2:B5)	сума ймовірностей для $x_i \leq x$

Для Варіанта 0 Excel повинен дати $M(X) = 1.65$, $D(X) = 0.7275$, $\sigma_X \approx 0.8529$.

6.2. Біноміальний розподіл: задача 2

Спочатку ймовірність для кожного k можна відтворити з формули Бернуллі:

=COMBIN(8;A2)*0.07^A2*(1-0.07)^(8-A2)

де в A2 записане значення k . Після цього результат перевіряють функцією:

- точкова ймовірність $P(X = k)$: =BINOM.DIST(k;8;0.07;FALSE);
- накопичена ймовірність $P(X \leq 1)$: =BINOM.DIST(1;8;0.07;TRUE).

Результат для $P(X \leq 1)$ повинен бути приблизно 0.896534.

6.3. Розподіл Пуассона: задача 3

Ручну формулу можна відтворити в Excel:

=EXP(-1.3)*1.3^k/FACT(k)

Після цього використовують:

- =POISSON.DIST(0;1.3;FALSE) для $P(X = 0)$;
- =POISSON.DIST(1;1.3;TRUE) для $P(X \leq 1)$;
- =1-POISSON.DIST(1;1.3;TRUE) для $P(X \geq 2)$.

6.4. Дискретний рівномірний розподіл: задача 4

Для п'яти рівномірних режимів у стовпці ймовірностей вводять $=1/5$. Далі математичне сподівання та дисперсію обчислюють так само, як у задачі 1, через SUMPRODUCT та допоміжний стовпець $x_i^2 p_i$. Це принципово: студент бачить, що рівномірний закон є окремим випадком загального табличного закону розподілу.

6.5. Гіпергеометричний розподіл: задача 5

Спочатку слід відтворити комбінаторну формулу:

`=COMBIN(4;k)*COMBIN(16;5-k)/COMBIN(20;5)`

Після цього результат можна перевірити вбудованою функцією:

`=HYPGEOM.DIST(k;5;4;20;FALSE)`

Для накопиченої ймовірності $P(X \leq 1)$ можна додати значення для $k = 0$ і $k = 1$ або використати `=HYPGEOM.DIST(1;5;4;20;TRUE)`.

Зауваження щодо локалізації Excel. У різних мовних і регіональних налаштуваннях Excel роздільником аргументів може бути крапка з комою або кома, а десятковим роздільником — кома або крапка. Це не змінює математичного змісту формули.

7. Вимоги до звіту

Звіт студента повинен містити

1. номер практичної роботи, тему та мету;
2. номер індивідуального варіанта;
3. чітке означення випадкової величини X і її одиниць вимірювання;
4. вихідні дані;
5. обґрунтування вибору закону розподілу або перевірку заданого табличного закону;
6. необхідні математичні формули;
7. ручні обчислення з проміжними результатами;
8. таблицю закону розподілу;
9. функцію розподілу $F(x)$, якщо її побудова передбачена завданням;
10. обчислені числові характеристики;
11. результати перевірки або автоматизації в Microsoft Excel;
12. порівняння ручного й автоматизованого результатів;
13. математичний висновок;
14. змістовний інженерний висновок.

Не допускається: подавати лише таблицю Excel без математичного обґрунтування; записувати лише готові значення без формул і підстановки; називати математичне сподівання «точним прогнозом» кількості дефектів; формулювати висновок лише як перелік чисел.

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

Для заданого закону кількості додаткових коригувальних проходів математичне сподівання становить 1.65 проходу, стандартне відхилення — приблизно 0.853 проходу, а найбільш ймовірне значення — два проходи. Ймовірність потреби у двох або трьох проходах дорівнює 0.60. Для окремої задачі біноміальна модель показує, що за дефектності 7% і контролю восьми деталей ймовірність отримати не більш як одну дефектну становить близько 89.65%. Отримані характеристики слід трактувати як властивості прийнятих ймовірнісних моделей технологічних процесів, а не як гарантовані результати кожної окремої серії.

9. Контрольні питання для захисту

1. Що називають випадковою величиною?
2. Як випадкова величина пов'язана з випадковим експериментом і простором елементарних результатів?
3. Наведіть машинобудівні приклади дискретних випадкових величин.
4. Наведіть машинобудівні приклади неперервних випадкових величин.
5. У чому принципова відмінність дискретної випадкової величини від неперервної?
6. Що називають законом розподілу дискретної випадкової величини?
7. Які дві умови повинна задовольняти таблиця закону розподілу?
8. Як за табличним законом знайти ймовірність події $X \in A$?
9. Що називають функцією розподілу?
10. Який ймовірнісний зміст має значення $F(x)$?
11. Назвіть основні властивості функції розподілу.
12. Чому функція розподілу дискретної випадкової величини має ступінчастий вигляд?
13. Чому дорівнює величина стрибка $F(x)$ у точці x_i ?
14. Як за функцією розподілу знайти $P(a < X \leq b)$?
15. Що характеризує математичне сподівання?
16. Чи зобов'язане математичне сподівання бути одним із можливих значень випадкової величини? Поясніть.
17. Що називають початковим моментом випадкової величини?
18. Запишіть дві еквівалентні формули дисперсії.
19. Чому дисперсія має квадрат одиниці вимірювання випадкової величини?
20. Який зміст має стандартне відхилення?
21. Що називають модою дискретного розподілу?
22. Які передумови розподілу Бернуллі?
23. За яких умов кількість подій має біноміальний розподіл?
24. Які числові характеристики біноміального розподілу?
25. Що означає дискретний рівномірний розподіл?
26. Коли доцільно застосовувати геометричний розподіл?
27. Який зміст параметра λ у розподілі Пуассона?
28. Для яких інженерних задач природним є розподіл Пуассона?
29. Чим гіпергеометрична модель відрізняється від біноміальної?
30. Чому під час відбору без повернення випробування стають залежними?
31. Що означає поправка $(N - n)/(N - 1)$ у дисперсії гіпергеометричного розподілу?
32. Як перевірити в Excel математичне сподівання таблично заданої ДВВ?

33. Чому перед використанням BINOM.DIST, POISSON.DIST або HYPGEOM.DIST необхідно спочатку обґрунтувати вибір моделі?
34. Як відрізнити статистичний результат від його інженерної інтерпретації?
35. Які типові помилки можуть виникнути, якщо Excel використовувати як «чорну скриньку»?

10. Методичний міст до наступної ПР

У ПР №2 випадковий результат описувався дискретною величиною: кількістю дефектів, відмов, повторних операцій або номером випробування. Проте більшість результатів інженерних вимірювань — діаметр, довжина, твердість, температура, деформація, шорсткість — моделюються як **неперервні випадкові величини**. Для них уже недостатньо таблиці окремих точкових ймовірностей: потрібно перейти до функції розподілу, густини розподілу та ймовірностей потрапляння в інтервали. Саме цей перехід буде виконано у ПР №3, де центральною моделлю стане нормальний розподіл і задачі про поле допуску.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

Неперервні випадкові величини. Нормальний розподіл та задачі про поле допуску

1. Мета роботи

- засвоїти поняття неперервної випадкової величини, функції та густини розподілу;
- навчитися обчислювати ймовірності та числові характеристики неперервних випадкових величин;
- застосовувати рівномірний, показниковий і нормальний закони розподілу в інженерних задачах;
- виконувати стандартизацію нормально розподіленої випадкової величини та знаходити ймовірності потрапляння в задані інтервали;
- оцінювати ймовірну частку продукції в полі технологічного допуску та інтерпретувати вплив центрування і розсіювання процесу.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання роботи студент повинен уміти: пояснювати відмінність між дискретною і неперервною випадковими величинами; переходити від функції розподілу $F(x)$ до густини $f(x)$ і навпаки; знаходити ймовірність потрапляння неперервної величини в інтервал; обчислювати математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення за густиною; розпізнавати рівномірну, показникову та нормальну моделі; стандартизувати нормальну величину; оцінювати ймовірність виходу технологічного параметра за межі допуску; відтворювати ручні розрахунки в Microsoft Excel та формулювати статистичний і інженерний висновки.

3. Теоретичні відомості

3.1. Неперервна випадкова величина та її відмінність від дискретної

Випадкова величина — числова функція, яка кожному елементарному результату випадкового експерименту ставить у відповідність певне дійсне число.

Дискретна випадкова величина набуває скінченної або зліченної множини окремих значень $x_1, x_2, \dots$, кожному з яких може відповідати додатна ймовірність $P(X = x_i) = p_i$.

Неперервна випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого інтервалу або сукупності інтервалів. Її ймовірності задаються не для окремих точок, а для інтервалів.

Ознака	Дискретна ВВ	Неперервна ВВ
Можливі значення	Окремі значення	Континуум значень у певній області
Основний опис	Таблиця x_i, p_i або формула $P(X = x_i)$	Функція розподілу $F(x)$ та/або густина $f(x)$
Ймовірність точного значення	Може бути додатною	$P(X = x_0) = 0$
Ймовірність інтервалу	Сума ймовірностей відповідних значень	Різниця значень F або інтеграл від f
Числові характеристики	Суми	Інтеграли
Інженерні приклади	Кількість дефектів, відмов, спрацювань	Діаметр, температура, твердість, час, похибка вимірювання

Важливо. Для неперервної випадкової величини твердження $P(X = x_0) = 0$ не означає, що значення x_0 «неможливе». Воно означає, що окрема точка має нульову площу під кривою густини. Практично значущими є ймовірності інтервалів.

3.2. Функція розподілу

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Для будь-якої випадкової величини $F(x)$ не спадає, набуває значень від 0 до 1 і задовольняє граничні співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Для неперервної випадкової величини ймовірність потрапляння в інтервал можна знаходити безпосередньо через функцію розподілу:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Оскільки для неперервної величини ймовірність окремої точки дорівнює нулю, для неї немає різниці між записами (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ та $[a, b)$ з погляду ймовірності.

3.3. Густина розподілу ймовірностей

Якщо функція розподілу диференційовна, то **густиною розподілу** називають її похідну:

$$f(x) = F'(x).$$

Основні властивості густини:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Функція розподілу відновлюється за густиною:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Ймовірність потрапляння в інтервал дорівнює площі під графіком густини на цьому інтервалі:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Геометричний зміст. Значення $f(x_0)$ саме по собі не є ймовірністю. Ймовірність задається *площею* під кривою густини над відповідним інтервалом.

3.4. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Якщо відповідні інтеграли існують, математичне сподівання визначають формулою

$$M(X) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Другий початковий момент:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Дисперсія:

$$D(X) = E[(X - M(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

Для обчислень часто зручніша рівносильна формула:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Математичне сподівання характеризує центр розподілу, дисперсія — середній квадрат відхилення від центру, а середнє квадратичне відхилення характеризує типовий масштаб розсіювання і має ті самі фізичні одиниці, що й сама випадкова величина.

3.5. Неперервний рівномірний розподіл

Величина X має рівномірний розподіл на $[a, b]$, якщо її густина стала на цьому інтервалі:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a \text{ або } x > b. \end{cases}$$

Для $X \sim U(a, b)$:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Якщо $a \leq c < d \leq b$, то

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Рівномірна модель доречна, коли всі значення в заданому інтервалі вважаються однаково можливими, наприклад для ідеалізованої похибки округлення або рандомізованого моменту події в межах фіксованого часу.

3.6. Показниковий розподіл

Показниковий розподіл часто використовують для моделювання часу очікування до наступної події за сталої інтенсивності потоку. Для параметра $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Для $0 \leq a < b$

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Важлива властивість показникового закону — відсутність пам'яті:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Межа інженерної інтерпретації. Показникова модель часу до відмови передбачає сталу інтенсивність відмов. Вона може бути невідповідною для обладнання з вираженим періодом припрацювання або старіння.

3.7. Нормальний розподіл: означення, параметри та властивості

Неперервна випадкова величина X має **нормальний розподіл** з параметрами μ і $\sigma > 0$, якщо її густина має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Записують $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Параметр $\mu = M(X)$ задає центр розподілу, а σ — масштаб випадкового розсіювання; $D(X) = \sigma^2$.

- крива симетрична відносно $x = \mu$;
- середнє, медіана і мода збігаються та дорівнюють μ ;
- площа під усією кривою дорівнює 1;
- теоретично можливі всі дійсні значення, хоча ймовірності далеких від μ значень швидко зменшуються;
- збільшення σ робить криву ширшою і нижчою, зменшення — вужчою і вищою.

3.8. Обчислення ймовірностей для нормального розподілу

Щоб не працювати окремо з кожною парою μ, σ , використовують стандартизацію:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Тоді $Z \sim N(0,1)$. Якщо $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, то

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Однобічні ймовірності:

$$P(X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right), \quad P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

3.9. Правило однієї, двох і трьох сигм

Для нормально розподіленої величини приблизно:

Інтервал навколо середнього	Ймовірність потрапляння	Практичне трактування
$\mu \pm \sigma$	≈ 0.6827 (68.27%)	Близько двох третин спостережень
$\mu \pm 2\sigma$	≈ 0.9545 (95.45%)	Переважає більшість спостережень
$\mu \pm 3\sigma$	≈ 0.9973 (99.73%)	Майже всі спостереження за стабільної нормальної моделі

Це правило є властивістю саме нормального розподілу і не повинно механічно переноситися на довільні розподіли.

3.10. Нормальний розподіл і технологічні допуски

Нехай LSL — нижня межа допуску, USL — верхня межа. За нормальної моделі очікувана частка придатної продукції становить

$$P(LSL \leq X \leq USL) = \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right).$$

Ймовірність браку складається з двох хвостів:

$$P(X < LSL) + P(X > USL).$$

Поле допуску задається конструкторськими або технологічними вимогами, тоді як μ і σ описують фактичний статистичний стан процесу. Тому допуск не можна ототожнювати з природним розсіюванням процесу.

Інженерний зміст. Якість визначається одночасно двома чинниками: положенням центру μ відносно середини поля допуску та величиною σ . Навіть мале розсіювання не гарантує малої частки браку, якщо процес суттєво зміщений до однієї з меж.

3.11. Центральна гранична теорема

Центральна гранична теорема (ЦГТ) пояснює, чому нормальний закон часто виникає в інженерних вимірюваннях. У спрощеній формі: якщо результат утворюється як сума або середнє великої кількості незалежних (або достатньо слабо залежних) випадкових внесків із скінченними дисперсіями, то після відповідного центрування і масштабування розподіл такої суми за широких умов наближається до нормального.

Наприклад, похибка вимірювання може складатися з багатьох малих впливів: температурних коливань, мікровібрацій, похибки відліку, електричного шуму, мікронерівностей поверхні. Жоден окремий внесок не обов'язково має нормальний розподіл, але їх сукупний ефект часто наближається до нормального.

Важливо. ЦГТ не стверджує, що будь-які вихідні дані «стають нормальними». Теорема стосується розподілу належно нормованих сум або середніх за виконання її передумов. Вона не звільняє від перевірки адекватності нормальної моделі для реальних даних.

3.12. Межі застосування нормальної моделі

Нормальний розподіл не слід обирати лише тому, що він зручний. Ознаками можливої невідповідності нормальної моделі є:

- суттєва асиметрія або довгий однобічний хвіст;

- сильні викиди або важкі хвости;
- кілька виражених максимумів, що можуть означати суміш різних режимів процесу;
- жорстка фізична межа, наприклад $X \geq 0$, коли нормальна модель надає помітну ймовірність фізично неможливим від'ємним значенням;
- лічильні дані, особливо рідкісні події, для яких природнішими є дискретні моделі;
- нестабільність процесу: дрейф середнього, зміна дисперсії, зміна режимів обладнання;
- дуже мала вибірка, за якої форму розподілу складно обґрунтовано оцінити.

У реальному статистичному аналізі припущення про нормальність слід обґрунтовувати предметним змістом задачі, графічним аналізом і, за потреби, формальними критеріями. Перевірка узгодженості емпіричних даних із теоретичним законом буде розглянута в ПР5.

3.13. Як обрати модель у типових задачах ПР3

Ознака задачі	Доцільний підхід
Задано $F(x)$	Ймовірність через $F(b) - F(a)$; густина як $f(x) = F'(x)$; характеристики — інтегралами
Усі значення в обмеженому інтервалі рівноймовірні	Рівномірний розподіл
Час очікування за сталої інтенсивності подій	Показниковий розподіл
Симетричне випадкове розсіювання навколо середнього	Нормальний розподіл, якщо його застосування обґрунтоване
Розмір деталі і задані LSL, USL	Ймовірність потрапляння в поле допуску та ймовірності обох хвостів
Випадкова похибка вимірювання без систематичного зміщення	Часто розглядають $X \sim N(0, \sigma^2)$; для кількох незалежних вимірювань додатково застосовують правила множення/доповнення

Типові помилки ПР3: плутати густину $f(x)$ з ймовірністю; обчислювати ймовірність точки для неперервної ВВ як додатне число; забувати перевірити нормування густини; плутати σ і σ^2 ; використовувати номінальний розмір замість фактичного μ ; ототожнювати допуск із статистичним розсіюванням; забувати один із хвостів нормального розподілу; застосовувати правило трьох сигм до ненормальних даних; механічно використовувати нормальну модель без оцінювання її придатності.

4. Алгоритм виконання задач

1. Визначити, якою є випадкова величина і що саме задано: $F(x)$, $f(x)$ або параметри відомого закону.
2. Перевірити область можливих значень і правильність моделі.
3. Якщо задано $F(x)$, знайти ймовірність інтервалу як $F(b) - F(a)$, а густину — диференціюванням.
4. Якщо задано $f(x)$, перевірити $f(x) \geq 0$ та нормування, а ймовірності знаходити інтегруванням.
5. Для числових характеристик обчислити $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$ і σ або використати відомі формули відповідного закону.
6. Для нормальної величини виконати стандартизацію $z = (x - \mu)/\sigma$ і чітко визначити потрібну область під нормальною кривою.
7. У задачах про допуски окремо обчислити частку придатних деталей, нижній і верхній брак; перевірити, що сума дорівнює 1.
8. Відтворити розрахунок у Microsoft Excel.
9. Зіставити ручний і автоматизований результати.
10. Сформулювати математичний, статистичний та інженерний висновки.

5. Варіант 0 — комплект еталонних задач

5.1. Задача 1. Випадкова величина задана функцією розподілу

Умова. Неперервна випадкова величина X — умовна нормована характеристика відхилення технологічного параметра — задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) $P(0.5 < X < 1.5)$; б) густину $f(x)$; в) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X .

Крок 1. Ймовірність інтервалу. Оскільки задано функцію розподілу, використовуємо

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= F(b) - F(a). \\ F(1.5) &= \frac{1.5^2}{4} = 0.5625, \quad F(0.5) = \frac{0.5^2}{4} = 0.0625. \\ P(0.5 < X < 1.5) &= 0.5625 - 0.0625 = 0.5000. \end{aligned}$$

Крок 2. Густина. У середині інтервалу $(0,2)$ диференціюємо $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & x \leq 0 \text{ або } x \geq 2. \end{cases}$$

Перевіряємо нормування:

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1.$$

Крок 3. Математичне сподівання.

$$M(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3} \approx 1.3333.$$

Крок 4. Другий момент і дисперсія.

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = 2.$$

$$D(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714.$$

Перевірка ймовірності інтегруванням:

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{0.5}^{1.5} = 0.5000.$$

Висновок. Ймовірність потрапляння параметра в інтервал $[0.5; 1.5]$ становить 0.5. Центр розподілу дорівнює приблизно 1.333, а типовий масштаб розсіювання — 0.471. Два способи обчислення ймовірності — через $F(x)$ і через інтеграл від $f(x)$ — дали однаковий результат.

5.2. Задача 2. Неперервний рівномірний розподіл

Умова. Тривалість автоматичного переналагодження верстата X у спрощеній моделі рівномірно розподілена від 8 до 14 хв. Знайти: а) ймовірність того, що переналагодження триватиме від 9 до 12 хв; б) $M(X)$, $D(X)$ і σ .

Маємо $X \sim U(8,14)$, тому густина на цьому інтервалі стала:

$$f(x) = \frac{1}{14 - 8} = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність інтервалу дорівнює відношенню довжини потрібного інтервалу до повної довжини:

$$P(9 < X < 12) = \frac{12 - 9}{14 - 8} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{8 + 14}{2} = 11 \text{ хв.}$$

$$D(X) = \frac{(14 - 8)^2}{12} = 3 \text{ хв}^2.$$

$$\sigma = \sqrt{3} \approx 1.7321 \text{ хв.}$$

Висновок. За прийнятої рівномірної моделі половина переналагоджень очікується в інтервалі 9–12 хв, середня тривалість становить 11 хв, а стандартний масштаб розсіювання — близько 1.73 хв.

5.3. Задача 3. Показниковий розподіл часу очікування

Умова. Час X між двома послідовними короткочасними зупинками виробничої лінії описується показниковим розподілом з інтенсивністю $\lambda = 0.25 \text{ год}^{-1}$. Знайти: а) ймовірність того, що наступна зупинка настане між 2 і 5 годинами; б) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення часу очікування.

Для показникового закону

$$P(2 < X < 5) = e^{-0.25 \cdot 2} - e^{-0.25 \cdot 5}.$$

$$P(2 < X < 5) = e^{-0.5} - e^{-1.25} \approx 0.606531 - 0.286505 = 0.320026.$$

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ год}, \quad D(X) = \frac{1}{0.25^2} = 16 \text{ год}^2, \quad \sigma = 4 \text{ год.}$$

Висновок. За цієї моделі ймовірність появи наступної короткочасної зупинки в проміжку від 2 до 5 год становить приблизно 32.0%. Середній час очікування — 4 год. Перед застосуванням такої моделі до реального обладнання слід перевірити, чи припущення про сталу інтенсивність зупинок є змістовно прийнятним.

5.4. Задача 4. Ймовірність потрапляння нормально розподіленої величини в інтервал

Умова. Твердість термооброблених деталей X вважаємо нормально розподіленою з математичним сподіванням $\mu = 60$ HRC і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$ HRC. Знайти ймовірність того, що твердість випадково вибраної деталі буде в інтервалі від 57 до 64 HRC.

Крок 1. Стандартизуємо межі.

$$z_1 = \frac{57 - 60}{3} = -1, \quad z_2 = \frac{64 - 60}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.3333.$$

Крок 2. Використовуємо стандартну нормальну функцію розподілу.

$$P(57 < X < 64) = \Phi(1.3333) - \Phi(-1). \\ P(57 < X < 64) \approx 0.908789 - 0.158655 = 0.750134.$$

Висновок. Приблизно 75.0% деталей за прийнятої нормальної моделі матимуть твердість у заданому інтервалі 57–64 HRC.

5.5. Задача 5. Нормально розподілені випадкові похибки вимірювання

Умова. Фізичну величину вимірюють без систематичної похибки. Випадкова похибка одного вимірювання X підпорядковується нормальному закону $X \sim N(0; 0.10^2)$ мм. Знайти: а) ймовірність того, що одне вимірювання буде виконано з похибкою, яка за абсолютною величиною не перевищує $\delta = 0.08$ мм; б) ймовірність того, що серед $n = 4$ незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить 0.08 мм за абсолютною величиною.

Крок 1. Одне вимірювання. Подія $|X| \leq 0.08$ еквівалентна $-0.08 \leq X \leq 0.08$. Стандартизуємо:

$$z = \frac{0.08}{0.10} = 0.8.$$

Через симетрію нормального розподілу

$$p = P(|X| \leq 0.08) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 2\Phi(0.8) - 1. \\ p \approx 2 \cdot 0.788145 - 1 = 0.576289.$$

Отже, одне вимірювання задовольняє задану межу випадкової похибки з ймовірністю приблизно 57.63%.

Крок 2. Чотири незалежні вимірювання. Подію «хоча б одне вимірювання має $|X| \leq 0.08$ » зручніше обчислити через протилежну подію: у всіх чотирьох вимірюваннях абсолютна похибка перевищує 0.08 мм.

$$P(\text{хоча б одне}) = 1 - (1 - p)^4. \\ P = 1 - (1 - 0.576289)^4 \approx 0.967769.$$

Перевірка змісту. Ймовірність 0.9678 більша за 0.5763, що логічно: зі збільшенням кількості незалежних вимірювань зростає шанс, що хоча б одне з них матиме малу випадкову похибку.

Висновок. Для одного вимірювання шанс не перевищити похибку 0.08 мм становить близько 57.6%, а для серії з чотирьох незалежних вимірювань шанс мати хоча б одне таке вимірювання становить близько 96.8%. Це не означає, що точність приладу покращилася: змінилася лише подія, ймовірність якої аналізується.

5.6. Задача 6. Нормальний розподіл і технологічне поле допуску

Умова. Діаметр вала моделюється нормальною величиною $X \sim N(20.015; 0.025^2)$ мм. Номінальний діаметр — 20.00 мм, поле допуску — [19.95; 20.05] мм. Знайти очікувану частку придатних деталей, частки браку нижче та вище допуску. Порівняти результат із центрованим процесом $\mu = 20.000$ мм за того самого $\sigma = 0.025$ мм.

Крок 1. Стандартизуємо межі допуску.

$$z_L = \frac{19.95 - 20.015}{0.025} = -2.60, \quad z_U = \frac{20.05 - 20.015}{0.025} = 1.40.$$

Крок 2. Частка придатних деталей.

$$P_{ok} = P(19.95 \leq X \leq 20.05) = \Phi(1.40) - \Phi(-2.60) \approx 0.914582.$$

Крок 3. Нижній і верхній брак.

$$P(X < 19.95) = \Phi(-2.60) \approx 0.004661.$$

$$P(X > 20.05) = 1 - \Phi(1.40) \approx 0.080757.$$

Перевірка:

$$0.004661 + 0.914582 + 0.080757 = 1.000000.$$

Крок 4. Центрований процес. Якщо $\mu = 20.000$ мм, обидві межі розташовані на відстані 2σ від середнього:

$$P_{ok,center} = P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0.954500.$$

Висновок. Для фактично зміщеного процесу прогнозована частка придатної продукції становить 91.46%, а загальний брак — 8.54%. Основна частина браку (8.08%) припадає на перевищення верхньої межі, що вказує на зміщення процесу в бік завищеного діаметра. Саме центрування процесу без зменшення σ теоретично підвищує частку придатних деталей приблизно до 95.45%.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

Excel використовується після ручного запису математичної моделі та основних перетворень. Результати Excel повинні відтворювати ручні обчислення.

6.1. Функція розподілу і числові характеристики: задача 1

- Для $0 < x \leq 2$ значення функції розподілу можна обчислювати формулою $=x^2/4$.
- Ймовірність інтервалу: значення $F(1.5)$ мінус $F(0.5)$.
- Для контрольного табулювання густини на $(0,2)$: $=x/2$.
- Аналітичні інтеграли $M(X)$ і $M(X^2)$ у звіті виконуються вручну; Excel використовується для перевірки кінцевих чисел та побудови таблиці/графіка $F(x)$ і $f(x)$.

6.2. Рівномірний розподіл: задача 2

- Ймовірність інтервалу: $=(12-9)/(14-8)$.
- Середнє: $=(8+14)/2$.
- Дисперсія: $=(14-8)^2/12$.
- Середнє квадратичне відхилення: $=SQRT((14-8)^2/12)$.

6.3. Показниковий розподіл: задача 3

- Ручний аналог: $=\text{EXP}(-0.25*2)-\text{EXP}(-0.25*5)$.
- Через функцію розподілу Excel: $=\text{EXPON.DIST}(5;0.25;\text{TRUE})-\text{EXPON.DIST}(2;0.25;\text{TRUE})$.
- Очікуваний результат — близько 0.320026.

У деяких локалізованих версіях Excel назви функцій або роздільники аргументів можуть відображатися інакше; математичний зміст формули від цього не змінюється.

6.4. Нормальний інтервал: задача 4

- Нижнє z-значення: $=(57-60)/3$.
- Верхнє z-значення: $=(64-60)/3$.
- Через стандартний нормальний закон: $=\text{NORM.S.DIST}((64-60)/3;\text{TRUE})-\text{NORM.S.DIST}((57-60)/3;\text{TRUE})$.
- Безпосередньо: $=\text{NORM.DIST}(64;60;3;\text{TRUE})-\text{NORM.DIST}(57;60;3;\text{TRUE})$.

6.5. Випадкові похибки вимірювань: задача 5

- Для одного вимірювання: $=\text{NORM.DIST}(0.08;0;0.10;\text{TRUE})-\text{NORM.DIST}(-0.08;0;0.10;\text{TRUE})$.
- Або після стандартизації: $=2*\text{NORM.S.DIST}(0.8;\text{TRUE})-1$.
- Для чотирьох незалежних вимірювань, якщо значення p міститься в клітинці B2: $=1-(1-B2)^4$.

6.6. Технологічне поле допуску: задача 6

- Нижня накопичена ймовірність: $=\text{NORM.DIST}(19.95;20.015;0.025;\text{TRUE})$.
- Накопичена ймовірність до верхньої межі: $=\text{NORM.DIST}(20.05;20.015;0.025;\text{TRUE})$.
- Частка придатних: верхня накопичена мінус нижня.
- Верхній брак: $=1-\text{NORM.DIST}(20.05;20.015;0.025;\text{TRUE})$.
- Перевірка: нижній брак + придатні + верхній брак = 1.

Не перетворюйте Excel на «чорну скриньку». У звіті перед функціями NORM.DIST або NORM.S.DIST повинні бути показані математична модель, потрібна область, z-перетворення та формула ймовірності.

7. Вимоги до звіту

Мінімальний склад звіту студента

1. номер практичної роботи, тема та мета;
2. номер індивідуального варіанта і вихідні дані;
3. тип випадкової величини та обґрунтування вибору закону/методу;
4. необхідні означення та формули;
5. ручні обчислення з проміжними результатами;
6. для задачі з $F(x)$ — отриману густину $f(x)$ і перевірку її нормування;
7. обчислені числові характеристики, якщо вони передбачені завданням;
8. для нормальної моделі — z-перетворення меж;
9. проміжні таблиці та графіки $F(x)$, $f(x)$ або нормальної кривої, якщо вони передбачені;
10. результати перевірки або автоматизації в Microsoft Excel;
11. зіставлення ручного й автоматизованого результатів;
12. математичний/статистичний висновок;

13. змістовний інженерний висновок.

Висновок не повинен бути формальним. Наприклад, замість « $P = 0.9146$ » слід написати: «За прийнятої нормальної моделі приблизно 91.46% валів очікуються в заданому полі допуску; основна частина браку припадає на перевищення верхньої межі».

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

Розрахунок показав, що неперервні випадкові величини потребують аналізу не ймовірностей окремих точок, а ймовірностей інтервалів. Для нормальної моделі діаметра вала з $\mu = 20.015$ мм і $\sigma = 0.025$ мм прогнозована частка деталей у полі допуску $[19.95; 20.05]$ мм становить 91.46%. При цьому близько 8.08% деталей очікуються вище верхньої межі й лише близько 0.47% — нижче нижньої. Така асиметрія браку відносно допуску свідчить про зміщення центру процесу, тому першочерговим заходом є корекція налаштування середнього рівня процесу, а не лише зменшення його розсіювання.

9. Контрольні питання для захисту

1. Що називають випадковою величиною?
2. Чим дискретна випадкова величина відрізняється від неперервної?
3. Чому для неперервної ВВ $P(X = x_0) = 0$?
4. Чи означає $P(X = x_0) = 0$, що значення x_0 неможливе?
5. Що називають функцією розподілу?
6. Які основні властивості має $F(x)$?
7. Як через $F(x)$ знайти $P(a < X < b)$?
8. Що називають густиною розподілу?
9. Який зв'язок між $f(x)$ і $F(x)$?
10. Які умови повинна задовольняти густина?
11. Як геометрично інтерпретується ймовірність $P(a < X < b)$?
12. Чому значення густини $f(x)$ не слід безпосередньо трактувати як ймовірність?
13. Як визначається математичне сподівання неперервної ВВ?
14. Як обчислюється другий початковий момент?
15. Як через $M(X^2)$ обчислити дисперсію?
16. Який фізичний зміст середнього квадратичного відхилення?
17. Коли доцільно використовувати неперервний рівномірний розподіл?
18. Які $M(X)$, $D(X)$ і σ для $U(a, b)$?
19. Які задачі моделює показниковий розподіл?
20. Що означає параметр λ показникового розподілу?
21. Які числові характеристики показникового розподілу?
22. У чому полягає властивість відсутності пам'яті?
23. Коли показникова модель часу до відмови може бути невідповідною?
24. Що називають нормальним розподілом?
25. Який зміст параметрів μ і σ ?
26. Як зміна μ впливає на нормальну криву?
27. Як зміна σ впливає на нормальну криву?
28. Що називають стандартизацією?
29. Який розподіл має величина $Z = (X - \mu)/\sigma$?

30. Як знайти $P(a < X < b)$ для нормальної ВВ?
31. Сформулюйте правило однієї сигми.
32. Сформулюйте правило двох сигм.
33. Сформулюйте правило трьох сигм.
34. Чому правило трьох сигм не слід автоматично застосовувати до довільних розподілів?
35. Що називають нижньою та верхньою межами технологічного допуску?
36. Чим поле допуску відрізняється від статистичного розсіювання процесу?
37. Чому зміщення μ від центру допуску збільшує ризик браку?
38. Чи достатньо малого σ для якісного процесу, якщо середнє зміщене?
39. У чому основна ідея центральної граничної теореми?
40. Чому ЦГТ допомагає пояснити поширеність нормальної моделі в задачах вимірювань?
41. Чи означає ЦГТ, що будь-яка вибірка даних має нормальний розподіл?
42. Назвіть ознаки, за яких нормальна модель може бути невідповідною.
43. Чому нормальна модель іноді проблематична для величин, що фізично не можуть бути від'ємними?
44. Як у Microsoft Excel перевірити ручний розрахунок нормальної ймовірності?
45. Що означає ситуація, коли майже весь прогнозований брак припадає лише на одну межу допуску?

10. Методичний міст до наступної ПР

У ПР3 закони розподілу та їх параметри μ , σ , λ задавалися умовою задачі. У реальному експерименті інженер зазвичай не знає параметрів генеральної сукупності й має лише скінченну вибірку вимірювань. Тому наступний крок — перейти від теоретичної випадкової величини до **вибіркових даних**: навчитися впорядковувати їх, обчислювати вибіркові числові характеристики та будувати точкові й інтервальні оцінки невідомих параметрів генеральної сукупності. Саме цьому присвячена ПР4.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №4

Первинна статистична обробка вибірки та оцінювання параметрів генеральної сукупності

1. Мета роботи

- сформулювати вміння переходити від масиву експериментальних вимірювань до впорядкованої статистичної інформації;
- навчитися будувати варіаційні та частотні ряди, гістограму і полігон частот;
- навчитися обчислювати точкові оцінки параметрів генеральної сукупності та розуміти вимоги до статистичних оцінок;
- навчитися будувати довірчі інтервали для генерального середнього, дисперсії та стандартного відхилення;
- навчитися правильно формулювати статистичний та інженерний висновки, не ототожнюючи довірчий інтервал параметра з діапазоном окремих вимірювань.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання роботи студент повинен уміти: визначати генеральну сукупність і вибірку для конкретної інженерної задачі; оцінювати спосіб формування вибірки з погляду репрезентативності; будувати варіаційний, дискретний або інтервальний частотний ряд; будувати та інтерпретувати гістограму і полігон; розрізняти параметри генеральної сукупності та вибіркові статистики; обчислювати $\bar{x}$, медіану, s^2 , s , розмах, коефіцієнт варіації та стандартну похибку; пояснювати незміщеність, спроможність та ефективність оцінок; будувати й інтерпретувати довірчі інтервали для μ , σ^2 і σ ; перевіряти ручні обчислення в Microsoft Excel.

3. Теоретичні відомості

3.1. Генеральна сукупність і вибірка

Генеральна сукупність — сукупність усіх об'єктів, результатів вимірювань або реалізацій процесу, щодо яких потрібно зробити статистичний висновок. Генеральна сукупність може бути реальною та скінченною, наприклад партія з 5000 підшипників, або концептуально дуже великою — усі деталі, які може виготовляти технологічний процес за певних сталих умов.

Вибірка — частина генеральної сукупності, яка фактично спостерігається:

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

де n — обсяг вибірки. За вибіркою обчислюють статистики та на їх основі роблять висновки щодо невідомих параметрів генеральної сукупності.

Принципово: велика кількість вимірювань сама по собі не гарантує правильності висновку. Якщо спосіб відбору систематично виключає певну частину продукції або пов'язаний із часом, зміною, верстатом чи оператором, велика вибірка може залишатися нерепрезентативною.

3.2. Репрезентативність та способи відбору

Репрезентативною називають вибірку, яка достатньо адекватно відображає істотні властивості генеральної сукупності для поставленої задачі. Репрезентативність пов'язана насамперед із планом відбору, а не лише з обсягом n .

Спосіб відбору	Суть	Інженерний приклад	Можливий ризик
Простий випадковий	Кожний об'єкт має однакову або відому можливість потрапити до вибірки.	За випадковими номерами обирають 50 деталей із партії.	Потребує доступного переліку всіх одиниць.
Систематичний	Після випадкового старту відбирають кожну k -ту одиницю.	Контролюють кожну 20-ту деталь.	Періодичність відбору може збігтися з циклом процесу.
Стратифікований	Генеральну сукупність поділяють на однорідні групи та відбирають з кожної.	Окремо відбирають деталі з кожної зміни або кожного верстата.	Потрібно правильно визначити страти.
Серійний (кластерний)	Випадково обирають цілі групи об'єктів.	Обирають кілька транспортних контейнерів і контролюють деталі в них.	Об'єкти всередині групи можуть бути дуже подібними.
Послідовний у часі	Фіксують послідовні результати процесу.	Вимірюють 50 деталей поспіль після налаштування верстата.	Дані можуть містити часовий тренд або автокореляцію.

Для статистичного оцінювання важливо також розуміти, чи можна вважати спостереження незалежними та чи не змінювалися суттєво умови процесу під час відбору.

3.3. Варіаційний і частотний ряди

Варіаційний ряд — значення вибірки, впорядковані за зростанням:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Позначення $x_{(i)}$ означає i -ту порядкову статистику. Варіаційний ряд дозволяє швидко встановити мінімум, максимум, медіану, повторювані значення, можливі прогалини та підозрілі крайні спостереження.

Частотний ряд показує, скільки разів певне значення або певний інтервал зустрічається у вибірці. Для i -ї групи:

$$n_i = \text{абсолютна частота}, \quad w_i = \frac{n_i}{n} = \text{відносна частота}.$$

$$\sum_i n_i = n, \quad \sum_i w_i = 1.$$

Для майже неперервних вимірювань, наприклад діаметрів або твердості, велика кількість різних значень робить простий дискретний частотний ряд незручним. Тоді дані об'єднують в інтервали. Орієнтовну кількість інтервалів можна оцінити за формулою Стерджеса:

$$k \approx 1 + 3.322 \lg n.$$

Після цього ширину інтервалу орієнтовно беруть $h \approx R/k$, де $R = x_{\max} - x_{\min}$, а потім за потреби округлюють до технологічно зручного значення.

3.4. Гістограма і полігон

Гістограма — графічне подання інтервального розподілу. На осі абсцис відкладають інтервали значень, а площа кожного прямокутника має бути пропорційною частоті відповідного інтервалу. Якщо всі інтервали мають однакову ширину, для навчальної гістограми можна використовувати висоти n_i або w_i . Для нерівних інтервалів слід використовувати густину частоти.

Полігон частот — ламана, вершини якої розташовані над серединами інтервалів x_i^* на висоті відповідної частоти n_i або відносної частоти w_i .

Гістограма — інструмент первинної діагностики, а не формальний доказ закону розподілу. Симетрична дзвоноподібна гістограма може підтримувати припущення про нормальність, але перевірка статистичної гіпотези виконується окремим методом у ПР5.

3.5. Параметри генеральної сукупності та вибіркові статистики

Характеристика	Генеральна сукупність	Вибірка	Роль вибіркової величини
Середнє	$\mu = M(X)$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	точкова оцінка μ
Дисперсія	$\sigma^2 = D(X)$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$	незміщена оцінка σ^2
Стандартне відхилення	σ	$s = \sqrt{s^2}$	оцінка σ
Частка об'єктів з ознакою	p	$\hat{p} = m/n$	оцінка p

Також у первинному аналізі використовують медіану, кватилі, розмах:

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

та, коли середнє істотно відмінне від нуля й показник має змістовний масштаб відношень, коефіцієнт варіації:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%.$$

Стандартна похибка вибіркового середнього оцінює не розкид окремих деталей, а невизначеність оцінки генерального середнього:

$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

3.6. Точкове статистичне оцінювання

Статистична оцінка — статистика, тобто функція вибірових даних, яку використовують для оцінювання невідомого параметра θ генеральної сукупності. Якщо результатом є одне число $\hat{\theta}$, оцінювання називають **точковим**.

Приклади:

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \widehat{\sigma^2} = s^2, \quad \hat{p} = \frac{m}{n}.$$

Точкова оцінка компактна, але сама по собі не показує точності. Дві вибірки можуть дати однакове $\bar{x}$, але при різних n і s невизначеність оцінки μ буде різною.

3.7. Властивості оцінок: незміщеність, спроможність, ефективність

Незміщеність. Оцінка $\hat{\theta}$ називається незміщеною, якщо її математичне сподівання дорівнює істинному параметру:

$$M(\hat{\theta}) = \theta.$$

Зокрема, $\bar{X}$ є незміщеною оцінкою μ , а використання дільника $n - 1$ робить s^2 незміщеною оцінкою генеральної дисперсії σ^2 за стандартної моделі незалежної однаково розподіленої вибірки.

Спроможність (консистентність). Оцінка є спроможною, якщо зі зростанням обсягу вибірки вона збігається за ймовірністю до істинного параметра:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Практично це означає: збільшення кількості якісно відібраних спостережень повинно робити оцінювання параметра дедалі точнішим.

Ефективність. Серед незміщених оцінок одного параметра ефективнішою є оцінка з меншою дисперсією. Інтуїтивно вона менше коливається від вибірки до вибірки.

Ці властивості описують *процедуру оцінювання* у повторних вибірках. За однією конкретною вибіркою неможливо безпосередньо «побачити» незміщеність або спроможність.

3.8. Інтервальне оцінювання та рівень довіри

Замість одного числа для параметра будують інтервал:

$$(\theta_L; \theta_U),$$

який отримують за певною статистичною процедурою. **Рівень довіри** зазвичай позначають $\gamma = 1 - \alpha$. Наприклад, для 95% довірчого рівня:

$$\gamma = 0.95, \quad \alpha = 0.05.$$

Чим вищий рівень довіри за інших однакових умов, тим ширший інтервал. Зі збільшенням n інтервал, як правило, звужується; зі збільшенням розсіювання даних — розширюється.

3.9. t-розподіл Стьюдента

Якщо генеральна сукупність нормальна, а її стандартне відхилення σ невідоме й замінюється вибірковим s , статистика

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

має **t-розподіл Стьюдента** з $\nu = n - 1$ ступенями вільності.

t-розподіл симетричний відносно нуля, подібний до стандартного нормального, але має важчі хвости, оскільки враховує додаткову невизначеність через оцінювання σ . Зі збільшенням ν t-розподіл наближається до $N(0; 1)$.

3.10. Довірчий інтервал для генерального середнього

Для нормальної генеральної сукупності з невідомою σ двосторонній $(1 - \alpha)100\%$ довірчий інтервал для μ :

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Півширина інтервалу:

$$\Delta = t_{1-\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Формула показує три основні чинники точності: рівень довіри через критичне t , варіабельність s і обсяг вибірки n .

3.11. Довірчий інтервал для генеральної дисперсії та стандартного відхилення

Якщо генеральна сукупність має нормальний розподіл, то

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Тому двосторонній довірчий інтервал для генеральної дисперсії:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}.$$

Для стандартного відхилення достатньо добути квадратні корені з обох меж:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}}.$$

Передумова тут особливо важлива: класичний χ^2 -інтервал для дисперсії чутливий до відхилення від нормального розподілу. У цій ПР нормальність є робочим припущенням; у ПР5 ту саму вибірку буде використано для формальної перевірки нормальної моделі.

3.12. Правильна статистична інтерпретація довірчих інтервалів

У частотному трактуванні параметр μ після відбору вибірки вважають фіксованим, а випадковою є процедура побудови меж. Тому коректне формулювання для 95% інтервалу таке:

«За застосованої процедури 95% довірчі інтервали, побудовані в довгій серії аналогічних вибірок, накривали б істинне генеральне середнє приблизно у 95% випадків. Для отриманої вибірки 95% довірчий інтервал для μ становить ...»

Не слід тлумачити довірчий інтервал середнього як:

- інтервал, у якому лежить 95% усіх деталей;
- межі технологічного допуску;
- інтервал, у якому лежатиме 95% майбутніх вимірювань;
- доказ того, що параметр «з ймовірністю 0,95» після отримання конкретного інтервалу знаходиться між його межами в строгому частотному трактуванні.

3.13. Типові помилки

- ототожнювати генеральну сукупність із фактично зібраними 30–50 спостереженнями;
- вважати вибірку репрезентативною лише тому, що вона «достатньо велика»;
- втрачати частину спостережень на межах інтервалів частотного ряду;
- будувати гістограму з проміжками між сусідніми прямокутниками для неперервної ознаки;
- використовувати n у знаменнику замість $n-1$ для незміщеної вибіркової дисперсії;
- плутати s зі стандартною похибкою $s/\sqrt{n}$;
- використовувати нормальне критичне значення 1,96 замість t -критичного без пояснення;
- застосовувати χ^2 -інтервал дисперсії, ігноруючи передумову нормальності;
- інтерпретувати довірчий інтервал для середнього як поле розсіювання окремих деталей;
- робити технологічний висновок лише за $\bar{x}$, не враховуючи розсіювання, план відбору та допуски.

4. Алгоритм виконання

1. Сформулювати, що є генеральною сукупністю, а що — вибіркою; описати спосіб відбору.
2. Перевірити кількість спостережень, одиниці вимірювання, пропуски та очевидні помилки введення.
3. Побудувати варіаційний ряд; визначити x_{min} , x_{max} і розмах R .
4. Сформувати інтервальний частотний ряд: обрати k , h , підрахувати n_i і w_i ; перевірити $\sum n_i = n$.
5. Побудувати гістограму та полігон частот і виконати первинну візуальну оцінку даних.
6. Обчислити точкові характеристики: $\bar{x}$, медіану, s^2 , s , CV , стандартну похибку.
7. За робочого припущення нормальності визначити t -критичне значення та побудувати довірчий інтервал для μ .
8. За тієї самої передумови визначити критичні значення χ^2 і побудувати довірчі інтервали для σ^2 та σ .
9. Повторити розрахунки в Microsoft Excel і зіставити результати з ручними.
10. Сформулювати окремо статистичний та інженерний висновки.

5. Варіант 0 — комплексне дослідження однієї вибірки

Загальна умова. Після токарної операції отримано 50 послідовних вимірювань діаметра валів, мм. Технологічна ціль для середнього діаметра становить 50,000 мм. Необхідно виконати первинну статистичну обробку вибірки, оцінити середнє та розсіювання процесу і побудувати 95% довірчі інтервали для параметрів генеральної сукупності. На цьому етапі нормальний закон розподілу приймаємо як робоче припущення; у ПР5 цю саму вибірку буде використано для перевірки нормальності за критерієм Пірсона.

Організація ручної роботи. Чотири завдання нижче утворюють один послідовний розрахунок. Орієнтовний час ручного виконання: 50–60 хв. Для зменшення арифметичного навантаження в точкових оцінках використовується кодування відхилень від 50,000 мм.

1	2	3	4	5
50.015	49.997	50.000	49.949	50.055
50.039	50.002	50.029	50.017	49.996
50.034	50.002	50.002	49.990	50.021
50.008	50.024	49.995	50.013	49.988
50.031	50.015	50.018	50.020	49.985
50.030	50.061	49.969	49.967	49.972
50.031	50.013	50.037	50.028	50.015
50.017	50.006	50.032	49.982	49.999
50.016	50.055	49.991	49.983	49.996
50.034	50.004	50.043	49.963	50.038

5.1. Завдання 1. Варіаційний та інтервальний частотний ряди. Гістограма і полігон

Умова. За наведеною вибіркою: а) побудувати варіаційний ряд; б) визначити мінімум, максимум і розмах; в) оцінити кількість інтервалів за формулою Стерджеса; г) побудувати інтервальний частотний ряд; д) підготувати дані для гістограми та полігона частот.

Крок 1. Варіаційний ряд. Після впорядкування одержуємо:

49.949; 49.963; 49.967; 49.969; 49.972; 49.982; 49.983; 49.985; 49.988; 49.990; 49.991; 49.995; 49.996; 49.996; 49.997; 49.999; 50.000; 50.002; 50.002; 50.002; 50.004; 50.006; 50.008; 50.013; 50.013;

50.015; 50.015; 50.015; 50.016; 50.017; 50.017; 50.018; 50.020; 50.021; 50.024; 50.028; 50.029; 50.030; 50.031; 50.031; 50.032; 50.034; 50.034; 50.037; 50.038; 50.039; 50.043; 50.055; 50.055; 50.061.

$$x_{\min} = 49.949, \quad x_{\max} = 50.061, \quad R = 50.061 - 49.949 = 0.112 \text{ мм.}$$

Крок 2. Кількість інтервалів.

$$k \approx 1 + 3.322 \lg 50 \approx 6.64 \approx 7.$$

Формально $R/k \approx 0.016$ мм. Для зручності ручного підрахунку та подальшого використання даних обираємо ширину $h = 0.020$ мм і межі від 49.940 до 50.080 мм.

Крок 3. Частотний ряд. Праві межі інтервалів, крім останньої, не включаємо.

Інтервал, мм	Середина x_i^*	n_i	$w_i = n_i/n$	Накопичена частота
[49.940; 49.960)	49.950	1	0.02	1
[49.960; 49.980)	49.970	4	0.08	5
[49.980; 50.000)	49.990	11	0.22	16
[50.000; 50.020)	50.010	16	0.32	32
[50.020; 50.040)	50.030	14	0.28	46
[50.040; 50.060)	50.050	3	0.06	49
[50.060; 50.080]	50.070	1	0.02	50
Разом	—	50	1.00	—

Перевірка:

$$\sum n_i = 50 = n, \quad \sum w_i = 1.$$

Крок 4. Гістограма та полігон. Для гістограми на семи сусідніх інтервалах будують прямокутники з висотами 1, 4, 11, 16, 14, 3, 1. Оскільки всі інтервали однакової ширини, ці висоти коректно відображають співвідношення частот. Для полігона сполучають точки:

$$(49.950; 1), (49.970; 4), (49.990; 11), (50.010; 16), (50.030; 14), (50.050; 3), (50.070; 1).$$

Інженерна інтерпретація. Основна маса вимірювань сконцентрована біля 50.000–50.040 мм, різко віддалених одиничних значень немає. Форма частотного ряду виглядає приблизно одновершинною. Однак цього недостатньо, щоб формально стверджувати нормальність розподілу.

5.2. Завдання 2. Точкові оцінки положення і розсіювання

Умова. Для тієї самої вибірки знайти вибіркове середнє, медіану, розмах, незміщену вибіркovu дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації та стандартну похибку середнього.

Крок 1. Спрощення ручних обчислень. Щоб не підносити до квадрата числа близько 50, введемо кодовані відхилення у мікрометрах:

$$d_i = 1000(x_i - 50.000).$$

Тоді $x_i = 50.000 + 0.001d_i$. Для контролю арифметики згрупуємо п'ятірки спостережень:

№ спостережень	d_i , мкм	$\sum d_i$	$\sum d_i^2$
1–5	15; –3; 0; –51; 55	16	5860
6–10	39; 2; 29; 17; –4	83	2671
11–15	34; 2; 2; –10; 21	49	1705
16–20	8; 24; –5; 13; –12	28	978
21–25	31; 15; 18; 20; –15	69	2135
26–30	30; 61; –31; –33; –28	–1	7455

№ спостережень	d_i , мкм	$\sum d_i$	$\sum d_i^2$
31–35	31; 13; 37; 28; 15	124	3508
36–40	17; 6; 32; –18; –1	36	1674
41–45	16; 55; –9; –17; –4	41	3667
46–50	34; 4; 43; –37; 38	82	5834
Разом	—	527	35487

Крок 2. Вибіркове середнє.

$$\bar{d} = \frac{527}{50} = 10.54 \text{ мкм.}$$

$$\bar{x} = 50.000 + 0.001 \cdot 10.54 = 50.01054 \text{ мм.}$$

Крок 3. Медіана. Для $n = 50$ медіана — середнє між 25-м і 26-м елементами варіаційного ряду:

$$Me = \frac{50.013 + 50.015}{2} = 50.014 \text{ мм.}$$

Крок 4. Незміщена вибіркова дисперсія. Для кодованих відхилень використовуємо обчислювальну формулу:

$$s_d^2 = \frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n - 1}.$$

$$s_d^2 = \frac{35487 - \frac{527^2}{50}}{49} = \frac{29932.42}{49} = 610.865714 \text{ мкм}^2.$$

Оскільки $1 \text{ мкм} = 0.001 \text{ мм}$, то:

$$s^2 = 610.865714 \cdot 10^{-6} = 0.000610866 \text{ мм}^2.$$

$$s = \sqrt{0.000610866} = 0.024716 \text{ мм.}$$

Крок 5. Коефіцієнт варіації.

$$CV = \frac{0.024716}{50.01054} \cdot 100\% \approx 0.0494\%.$$

Для геометричного розміру близько 50 мм дуже малий CV є природним і не означає автоматично, що процес відповідає допуску. Відповідність допуску треба аналізувати окремо.

Крок 6. Стандартна похибка середнього.

$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.024716}{\sqrt{50}} \approx 0.003495 \text{ мм.}$$

Статистичний зміст. Значення $s = 0.024716$ мм характеризує розсіювання окремих діаметрів, тоді як $SE = 0.003495$ мм характеризує невизначеність оцінювання генерального середнього. Це різні величини і вони не взаємозамінні.

5.3. Завдання 3. Довірчий інтервал для генерального середнього

Умова. За робочого припущення, що діаметри мають нормальний розподіл з невідомим генеральним стандартним відхиленням, побудувати 95% довірчий інтервал для генерального середнього μ .

Крок 1. Рівень довіри та число ступенів вільності.

$$\gamma = 0.95, \quad \alpha = 0.05, \quad \nu = n - 1 = 49.$$

Крок 2. Критичне значення t-розподілу.

$$t_{0.975;49} \approx 2.0096.$$

Крок 3. Півширина довірчого інтервалу.

$$\Delta = t_{0.975;49} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.0096 \cdot 0.003495 \approx 0.007024 \text{ мм.}$$

Крок 4. Межі.

$$\mu_L = 50.01054 - 0.007024 = 50.003516 \text{ мм,}$$

$$\mu_U = 50.01054 + 0.007024 = 50.017564 \text{ мм.}$$

Отже:

$$50.003516 < \mu < 50.017564 \text{ мм} \quad (\gamma = 0.95).$$

Інженерна інтерпретація. За прийнятих передумов 95% довірчий інтервал для середнього діаметра процесу становить [50.00352; 50.01756] мм. Технологічна ціль 50.000 мм лежить нижче нижньої межі цього інтервалу. Це є статистичним сигналом можливого зміщення середнього процесу в додатний бік, але не є самостійним доказом непридатності деталей: для такого висновку потрібні задані межі допуску та оцінка стабільності процесу.

5.4. Завдання 4. Довірчі інтервали для генеральної дисперсії та стандартного відхилення

Умова. Для тієї самої вибірки за робочого припущення нормальності побудувати 95% довірчі інтервали для генеральної дисперсії σ^2 та стандартного відхилення σ .

Крок 1. Критичні значення. Для $\nu = 49$ ступенів вільності:

$$\chi_{0.025;49}^2 \approx 31.5549, \quad \chi_{0.975;49}^2 \approx 70.2224.$$

Крок 2. Спільний чисельник.

$$(n - 1)s^2 = 49 \cdot 0.000610866 \approx 0.0299324 \text{ мм}^2.$$

Крок 3. Межі для дисперсії.

$$\sigma_L^2 = \frac{0.0299324}{70.2224} \approx 0.000426252 \text{ мм}^2, \quad \sigma_U^2 = \frac{0.0299324}{31.5549} \approx 0.000948582 \text{ мм}^2.$$

Отже:

$$0.000426252 < \sigma^2 < 0.000948582 \text{ мм}^2.$$

Крок 4. Межі для стандартного відхилення.

$$\sigma_L = \sqrt{0.000426252} \approx 0.020646 \text{ мм,}$$

$$\sigma_U = \sqrt{0.000948582} \approx 0.030799 \text{ мм.}$$

$$0.020646 < \sigma < 0.030799 \text{ мм} \quad (\gamma = 0.95).$$

Інженерна інтерпретація. Вибіркова оцінка стандартного відхилення дорівнює 0.02472 мм, але через скінченний обсяг вибірки істинне розсіювання процесу оцінюється з невизначеністю. За прийнятої нормальної моделі 95% довірчий інтервал для σ становить приблизно [0.02065; 0.03080] мм. Для оцінки технологічної здатності цей інтервал потрібно зіставляти з фактичними межами допуску.

Чому лише чотири завдання? Вони використовують одну й ту саму вибірку та утворюють єдиний workflow. Це дозволяє охопити організацію даних, графічне подання, точкове й інтервальне оцінювання без зайвого дублювання арифметики. Повний ручний розрахунок розрахований приблизно на одну академічну годину активної роботи.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

Принцип: Excel використовується після ручного опрацювання алгоритму. Студент повинен розуміти, яку саме статистичну величину обчислює кожна функція і які передумови стоять за результатом.

6.1. Введення та первинний контроль даних

Нехай 50 вимірювань розташовано в клітинках B2:B51.

- кількість: =COUNT(B2:B51);
- мінімум: =MIN(B2:B51);
- максимум: =MAX(B2:B51);
- розмах: =MAX(B2:B51)-MIN(B2:B51).

Перед обчисленнями слід перевірити, чи всі значення числові, чи немає пропусків, змішаних одиниць вимірювання або помилок десяткового роздільника.

6.2. Варіаційний і частотний ряди

Варіаційний ряд у сучасних версіях Excel можна отримати функцією =SORT(B2:B51) або звичайним сортуванням діапазону.

Для інтервального ряду створити окремий стовпець верхніх меж: 49.960; 49.980; 50.000; 50.020; 50.040; 50.060; 50.080. Частоти можна отримати функцією FREQUENCY або послідовними COUNTIFS. Після цього перевірити:

$$\sum n_i = 50.$$

Гістограма: Insert → Statistical Chart → Histogram або стовпчаста діаграма за попередньо підрахованими частотами без проміжків між стовпчиками. **Полігон:** побудувати точкову діаграму з прямими лініями для пар «середина інтервалу — частота».

6.3. Точкові характеристики

Спочатку відтворити математичну формулу середнього:

=SUM(B2:B51)/COUNT(B2:B51)

а потім перевірити спеціальною функцією:

=AVERAGE(B2:B51)

- медіана: =MEDIAN(B2:B51);

- вибіркова дисперсія: =VAR.S(B2:B51);
- вибірконе стандартне відхилення: =STDEV.S(B2:B51);
- стандартна похибка: =STDEV.S(B2:B51)/SQRT(COUNT(B2:B51));
- коефіцієнт варіації: =STDEV.S(B2:B51)/ABS(AVERAGE(B2:B51))*100.

VAR.P і STDEV.P використовують, коли наявні дані трактують як усю генеральну сукупність. У цій роботі дані є вибіркою, тому для оцінювання генерального розсіювання використовуються VAR.S і STDEV.S.

6.4. 95% довірчий інтервал для середнього

Критичне значення: =T.INV.2T(0.05;COUNT(B2:B51)-1)

Стандартна похибка: =STDEV.S(B2:B51)/SQRT(COUNT(B2:B51))

Півширина: =T.INV.2T(0.05;COUNT(B2:B51)-1)*STDEV.S(B2:B51)/SQRT(COUNT(B2:B51))

Нижня і верхня межі: =AVERAGE(B2:B51)-Delta

=AVERAGE(B2:B51)+Delta

Можна також перевірити півширину функцією CONFIDENCE.T, але лише після ручного відтворення формули.

6.5. 95% довірчі інтервали для дисперсії та стандартного відхилення

Нехай $\nu = n - 1$. Критичні значення лівохвостового χ^2 -розподілу:

=CHISQ.INV(0.025;49) → приблизно 31.5549;

=CHISQ.INV(0.975;49) → приблизно 70.2224.

Межі для дисперсії:

=(COUNT(B2:B51)-1)*VAR.S(B2:B51)/CHISQ.INV(0.975;COUNT(B2:B51)-1)

=(COUNT(B2:B51)-1)*VAR.S(B2:B51)/CHISQ.INV(0.025;COUNT(B2:B51)-1)

Межі для σ отримати функцією SQRT від відповідних меж дисперсії.

6.6. Зіставлення з ручним розрахунком

Показник	Еталонне значення
$\bar{x}$	50.010540 мм
Медіана	50.014000 мм
s^2	0.000610866 мм ²
s	0.024716 мм
SE	0.003495 мм
95% CI для μ	[50.003516; 50.017564] мм
95% CI для σ^2	[0.000426252; 0.000948582] мм ²
95% CI для σ	[0.020646; 0.030799] мм

Незначні відмінності в останніх цифрах допустимі через округлення проміжних результатів. Якщо відмінність істотна, потрібно перевірити тип дисперсії (VAR.S проти VAR.P), рівень довіри, число ступенів вільності та порядок критичних значень χ^2 .

7. Вимоги до звіту

Звіт студента повинен містити

1. номер практичної роботи, тему та мету;
2. номер індивідуального варіанта і вихідну вибірку;
3. короткий опис генеральної сукупності, вибірки та способу відбору;
4. варіаційний ряд;
5. інтервальний частотний ряд із n_i та w_i ;
6. гістограму та полігон частот;
7. формули та ручний розрахунок $\bar{x}$, s^2 , s , SE та інших передбачених характеристик;
8. 95% довірчий інтервал для μ із зазначенням t-критичного значення;
9. 95% довірчі інтервали для σ^2 та σ із критичними значеннями χ^2 ;
10. результати перевірки в Microsoft Excel;
11. порівняння ручного й автоматизованого результатів;
12. статистичний висновок;
13. змістовний інженерний висновок.

У висновку не можна писати лише «середнє дорівнює...» або «довірчий інтервал дорівнює...». Потрібно пояснити, що отримані оцінки говорять про центр і розсіювання технологічного процесу та які обмеження має зроблений висновок.

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

За вибіркою з 50 вимірювань середній діаметр становить 50.01054 мм, а вибіркове стандартне відхилення — 0.02472 мм. За робочого припущення нормальності 95% довірчий інтервал для генерального середнього дорівнює [50.00352; 50.01756] мм, а для генерального стандартного відхилення — [0.02065; 0.03080] мм. Технологічна ціль 50.000 мм не входить до довірчого інтервалу для середнього, тому дані вказують на можливе додатне зміщення центру процесу. Водночас робити висновок про відповідність продукції вимогам лише за цими оцінками не можна: необхідно врахувати задані межі допуску, стабільність процесу та перевірити обґрунтованість нормальної моделі. Останню перевірку буде виконано в ПР5.

9. Контрольні питання

1. Що називають генеральною сукупністю?
2. Що називають вибіркою і що таке обсяг вибірки?
3. Що означає репрезентативність вибірки?
4. Чому великий обсяг вибірки не гарантує репрезентативності?
5. У чому полягає простий випадковий відбір?
6. Коли доцільний систематичний відбір і який його можливий недолік?
7. У чому ідея стратифікованого відбору?
8. Чому послідовний відбір деталей у часі може порушувати припущення незалежності?
9. Що називають варіаційним рядом?
10. Що таке абсолютна та відносна частоти?
11. Як перевірити правильність побудованого частотного ряду?
12. Для чого використовують формулу Стерджеса?
13. Що називають гістограмою?

14. Чому для нерівних інтервалів не можна безпосередньо порівнювати лише їх абсолютні частоти як висоти гістограми?
15. Що називають полігоном частот?
16. Чому гістограма сама по собі не доводить нормальність розподілу?
17. Чим параметр генеральної сукупності відрізняється від вибіркової статистики?
18. Що називають точковою статистичною оцінкою?
19. Яка статистика є природною оцінкою генерального середнього?
20. Чому для вибіркової дисперсії використовується дільник $n - 1$?
21. Що означає незміщеність оцінки?
22. Що означає спроможність оцінки?
23. Що означає ефективність оцінки?
24. Чи можна за однією вибіркою безпосередньо перевірити незміщеність оцінки?
25. Чим стандартне відхилення s відрізняється від стандартної похибки SE ?
26. Що показує коефіцієнт варіації?
27. Що називають інтервальною оцінкою?
28. Що означають γ та α при побудові довірчого інтервалу?
29. Чому 99% довірчий інтервал за інших однакових умов ширший за 95%?
30. Як збільшення обсягу вибірки впливає на ширину інтервалу для середнього?
31. Коли для інтервалу генерального середнього застосовують t-розподіл Стюдента?
32. Чим t-розподіл відрізняється від стандартного нормального?
33. Скільки ступенів вільності має t-статистика при оцінюванні одного середнього за вибіркою обсягу n ?
34. Як побудувати довірчий інтервал для μ , якщо σ невідоме?
35. Який розподіл використовується для класичного інтервалу генеральної дисперсії?
36. Яка ключова передумова потрібна для класичного χ^2 -інтервалу дисперсії?
37. Як із довірчого інтервалу для σ^2 отримати інтервал для σ ?
38. Як правильно інтерпретувати 95% довірчий інтервал у частотному підході?
39. Чому довірчий інтервал середнього не є інтервалом для 95% окремих деталей?
40. Чому довірчий інтервал не є технологічним допуском?
41. Чим VAR.S відрізняється від VAR.P у Microsoft Excel?
42. Які причини можуть спричинити розбіжність ручного результату та результату Excel?
43. Що означає ситуація, коли технологічна ціль не потрапляє до довірчого інтервалу для μ ?
44. Чому після ПР4 доцільно перевірити закон розподілу вибірки?

10. Методичний міст до наступної ПР

У ПР4 ми перейшли від окремих вимірювань до вибірових статистик і за робочого припущення нормальності побудували інтервальні оцінки параметрів генеральної сукупності. Однак форма гістограми дає лише візуальне уявлення й не може формально підтвердити закон розподілу. У ПР5 **та сама вибірка** буде використана для перевірки статистичної гіпотези про нормальний закон: емпіричні частоти порівняємо з теоретичними за критерієм узгодженості Пірсона. Таким чином, наступний крок траєкторії — від **оцінювання невідомих параметрів** до **формальної перевірки припущення про модель генеральної сукупності**.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №5

Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про закон розподілу за критерієм узгодженості Пірсона

1. Мета роботи

- сформулювати цілісне розуміння логіки статистичної перевірки гіпотез та ролі нульової й альтернативної гіпотез;
- навчитися розрізняти односторонні й двосторонні перевірки, рівень значущості, помилки I та II роду, статистичну потужність і p-value;
- навчитися відрізняти статистичну значущість від практичної (інженерної) значущості та розуміти роль розміру ефекту;
- засвоїти загальний алгоритм вибору й застосування статистичного критерію;
- навчитися виконувати візуальну оцінку форми розподілу та перевіряти гіпотезу про нормальний закон за критерієм узгодженості Пірсона;
- перевіряти ручні обчислення в Microsoft Excel і формулювати коректний статистичний та інженерний висновки.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання роботи студент повинен уміти: сформулювати H_0 і H_1 ; визначити, чи є перевірка односторонньою або двосторонньою; пояснити зміст α , β , потужності $1 - \beta$ і p-value; обрати загальний тип критерію з урахуванням його передумов; відрізнити статистичну значущість від інженерної важливості результату; оцінити форму емпіричного розподілу за гістограмою та boxplot; побудувати критерій Пірсона для згрупованих даних; визначити число ступенів вільності; прийняти статистичне рішення за критичним значенням і p-value; пояснити, що отриманий результат означає для подальшого аналізу технологічного процесу.

3. Теоретичні відомості

3.1. Що таке статистична гіпотеза

Статистична гіпотеза — це формалізоване припущення про закон розподілу генеральної сукупності, значення її параметрів, рівність параметрів кількох сукупностей, наявність зв'язку між ознаками або іншу властивість статистичної моделі, яке можна перевірити за вибірковими даними.

Наприклад, у машинобудуванні можна перевіряти припущення про нормальність розподілу діаметрів деталей, рівність середньої твердості після двох режимів термообробки, однаковість дисперсій двох верстатів або наявність зв'язку між швидкістю різання та шорсткістю.

Статистична перевірка не «доводить» гіпотезу в математичному сенсі. Вона оцінює, наскільки спостережені дані сумісні з гіпотезою в межах заданого рівня статистичного ризику.

3.2. Нульова та альтернативна гіпотези

Нульова гіпотеза H_0 — базове твердження, сумісність якого з вибірковими даними перевіряють. **Альтернативна гіпотеза H_1** описує статистично значуще відхилення від H_0 .

Приклад для середнього діаметра з номіналом 50 мм:

$$H_0: \mu = 50, \quad H_1: \mu \neq 50.$$

Для перевірки виду розподілу в цій роботі:

$$H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad H_1: X \text{ не узгоджується з нормальною моделлю.}$$

3.3. Односторонні та двосторонні перевірки

Напрямок альтернативної гіпотези визначає область критичних значень.

Тип перевірки	Приклад альтернативи	Інженерний зміст
Лівостороння	$H_1: \mu < \mu_0$	середня міцність стала нижчою за нормативну
Правостороння	$H_1: \mu > \mu_0$	середня температура перевищила допустимий рівень
Двостороння	$H_1: \mu \neq \mu_0$	будь-яке зміщення середнього від номіналу є суттєвим

Напрямок перевірки задають до аналізу результатів, виходячи з постановки задачі. Не можна спочатку подивитися на знак відхилення, а потім вибрати зручну односторонню альтернативу.

Критерій узгодженості Пірсона є правохвостовим: великі значення χ^2 свідчать про сильну невідповідність спостережених і теоретичних частот.

3.4. Статистика критерію та її розподіл

Статистика критерію $T = T(X_1, \dots, X_n)$ — числова функція вибірових даних, розподіл якої за умови справедливості H_0 відомий точно або наближено. Саме цей розподіл дозволяє визначити, наскільки «екстремальним» є фактично отримане значення T_{obs} .

У різних задачах статистика може мати нормальний, t-, χ^2 -, F- або інший розподіл. У критерії Пірсона використовується статистика, яка за відповідних передумов наближено має χ^2 -розподіл.

3.5. Рівень значущості

Рівень значущості α — наперед задана ймовірність помилки I роду, яку дослідник готовий допустити. Типове навчальне значення:

$$\alpha = 0.05.$$

Це не означає, що «гіпотеза істинна з ймовірністю 95%». Значення $\alpha = 0.05$ означає контроль довгострокової частоти хибних відхилень H_0 за умов, для яких побудовано критерій.

3.6. Помилки I та II роду

	H_0 істинна	H_0 хибна
H_0 не відхилено	правильне рішення	помилка II роду, ймовірність β
H_0 відхилено	помилка I роду, ймовірність α	правильне виявлення ефекту

У задачі контролю якості помилка I роду може означати сигнал про зміну процесу, якого насправді немає; помилка II роду — невиявлення реально існуючої зміни.

Зменшення α без зміни обсягу вибірки зазвичай ускладнює відхилення H_0 і може збільшувати ризик помилки II роду. Тому рівень значущості не слід механічно робити «якнайменшим».

3.7. Статистична потужність

Статистична потужність — ймовірність відхилити H_0 , коли конкретна альтернатива насправді справедлива:

$$\text{Power} = 1 - \beta.$$

Потужність зростає, як правило, зі збільшенням обсягу вибірки, зі збільшенням реального ефекту та зі зменшенням випадкового розсіювання. Тому результат « H_0 не відхилено» особливо обережно трактують для малих або шумних вибірок: тест міг мати недостатню потужність для виявлення практично важливого відхилення.

3.8. p-value та його правильна інтерпретація

p-value — це, за умови справедливості H_0 , ймовірність отримати значення статистики критерію не менш екстремальне щодо H_0 , ніж фактично спостережене.

Правило рішення:

$$p < \alpha \Rightarrow H_0 \text{ відхиляємо}, \quad p \geq \alpha \Rightarrow \text{немає достатніх підстав відхилити } H_0.$$

p-value не є: ймовірністю істинності H_0 ; ймовірністю того, що результат отримано «випадково»; величиною ефекту; мірою інженерної важливості результату. Значення p потрібно інтерпретувати разом із дизайном дослідження, обсягом вибірки, передумовами критерію та змістом ефекту.

3.9. Статистична і практична значущість. Розмір ефекту

Статистична значущість відповідає на питання, чи достатньо даних, щоб за обраного α вважати спостережене відхилення несумісним із H_0 . **Практична (інженерна) значущість** відповідає на інше питання: чи має величина відхилення реальне технологічне значення.

За дуже великої вибірки навіть мізерна різниця може дати мале p-value; за малої — важлива різниця може не досягти статистичної значущості.

Розмір ефекту — кількісна характеристика величини відхилення або сили зв'язку, бажано у формі, яка менш залежить від обсягу вибірки, ніж p-value. Приклади: стандартизована різниця середніх (Cohen's d), коефіцієнт кореляції r , частка поясненої варіації R^2 , міри для таблиць частот. Для критерію узгодженості як описову міру інколи використовують:

$$w = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}.$$

Але головне у цій ПР — не механічно присвоювати ярлик «малий/великий ефект», а зіставляти статистичний результат з технологічними допусками, похибкою вимірювання та наслідками для процесу.

3.10. Параметричні та непараметричні критерії

Параметричні критерії ґрунтуються на моделі розподілу та її параметрах і за виконання передумов зазвичай ефективно використовують інформацію про дані. Приклади, які будуть потрібні далі: t-критерії для середніх, F-критерій для дисперсій.

Непараметричні критерії мають слабші вимоги до конкретної форми розподілу або працюють з рангами/знаками. Вони корисні, коли параметрична модель не обґрунтована, шкала вимірювання не відповідає її вимогам або дані містять особливості, для яких потрібен інший метод.

«Непараметричний» не означає «без передумов», а «параметричний» не означає автоматично «кращий». Метод обирають за дослідницьким питанням, типом даних, дизайном і перевіреними передумовами.

3.11. Загальний алгоритм перевірки статистичної гіпотези

1. Сформулювати дослідницьке питання мовою предметної галузі.
2. Записати H_0 і H_1 ; визначити напрям альтернативи.
3. Обрати рівень значущості α до аналізу результату.
4. Обрати статистичний критерій і перевірити його передумови.
5. Обчислити статистику критерію T_{obs} .
6. Знайти критичну область/критичне значення та/або p-value.
7. Прийняти статистичне рішення щодо H_0 .
8. Оцінити величину ефекту та невизначеність, якщо це змістовно для задачі.
9. Сформулювати статистичний висновок без слів «доведено» чи «гіпотезу прийнято».
10. Перекласти результат мовою інженерної задачі та вказати обмеження висновку.

3.12. Чому гіпотезу про вид розподілу перевіряємо перед наступними параметричними порівняннями

У ПР4 для побудови деяких довірчих інтервалів ми використали робоче припущення нормальності. У ПР6 планується порівняння параметрів двох сукупностей методами, передумови яких також пов'язані з формою розподілу. Тому перед цими кроками потрібно оцінити, чи не суперечать дані нормальній моделі.

Це **не універсальне правило**, що будь-який статистичний аналіз завжди повинен починатися з тесту нормальності. У цьому практикумі така послідовність обрана методично, тому що наступні конкретні параметричні процедури потребують відповідних передумов. Крім того, для деяких методів важлива нормальність залишків або вибірових середніх, а не сирих даних.

3.13. Візуальна оцінка розподілу: гістограма і boxplot

Перед формальним тестом дані потрібно оглянути. **Гістограма** показує форму емпіричного розподілу: симетрію, приблизну одномодальність, довгі хвости, можливу асиметрію або кілька груп. Її форма залежить від ширини та меж інтервалів.

Boxplot («ящик з вусами») компактно показує медіану, квартилі, міжквартильний розмах та потенційні викиди. Типове правило меж:

$$IQR = Q_3 - Q_1, \quad L = Q_1 - 1.5IQR, \quad U = Q_3 + 1.5IQR.$$

Відносна симетричність boxplot і відсутність сильних викидів сумісні з нормальною моделлю, але **не доводять нормальність**. Аналогічно, гістограма є діагностичним, а не формальним критерієм.

3.14. Критерій узгодженості Пірсона: основна ідея

Критерій Пірсона порівнює **спостережені частоти** n_i у групах з **теоретично очікуваними частотами** n_i^* , які мали б виникати, якби H_0 була правильною:

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}.$$

Чим більша невідповідність, тим більше χ_{obs}^2 . Для теоретичної ймовірності p_i і-го інтервалу:

$$n_i^* = np_i.$$

Для нормальної моделі $N(\mu, \sigma^2)$ і інтервалу $[a_i, b_i)$:

$$p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(z)$ — функція розподілу стандартної нормальної ВВ. Для крайніх інтервалів використовують $-\infty$ або $+\infty$, щоб охопити всю теоретичну ймовірність.

3.15. Число ступенів вільності та передумови критерію Пірсона

Якщо маємо k груп і з цієї самої вибірки оцінено r параметрів теоретичного розподілу, то в типовій навчальній схемі:

$$\nu = k - 1 - r.$$

Для нормального розподілу, коли μ і σ оцінено за цією самою вибіркою, $r = 2$. Тоді:

$$\nu = k - 3.$$

Наближення χ^2 потребує достатніх очікуваних частот. У цьому практикумі використовуємо практичне правило:

$$n_i^* \geq 5.$$

Якщо крайні очікувані частоти замалі, сусідні групи об'єднують до остаточного обчислення статистики. Не можна округлювати n_i^* до цілих перед розрахунком χ^2 .

3.16. Рішення за критичним значенням і за p-value

Критерій Пірсона правохвостовий. За рівня α відхиляємо H_0 , якщо:

$$\chi_{obs}^2 > \chi_{1-\alpha; \nu}^2.$$

Еквівалентно використовуємо p-value:

$$p = P(\chi_{\nu}^2 \geq \chi_{obs}^2).$$

Якщо $p < \alpha$, H_0 відхиляємо; якщо $p \geq \alpha$, формулюємо: «немає достатніх статистичних підстав відхилити H_0 ».

3.17. Типові помилки

- писати « H_0 прийнято», «доведено» або «ймовірність H_0 дорівнює $1-p$ »;
- вибирати односторонню альтернативу після перегляду результатів;
- ототожнювати мале p-value з великим або важливим інженерним ефектом;
- використовувати параметричний критерій, не аналізуючи його передумови;
- вважати гістограму або boxplot доказом нормальності;
- залишати групи з надто малими очікуваними частотами;
- використовувати $\nu = k - 1$, забувши про параметри, оцінені з тієї самої вибірки;
- обчислювати очікувані частоти лише в межах мінімуму та максимуму вибірки й втрачати теоретичні хвости;
- округлювати p_i або n_i^* надто рано;
- робити висновок про якість технологічного процесу лише з факту нормальності розподілу.

4. Алгоритм виконання

1. Ідентифікувати досліджувану генеральну сукупність і вибірку.
2. Виконати первинний огляд даних: гістограма та boxplot; зафіксувати асиметрію, мультимодальність і потенційні викиди.
3. Сформулювати H_0 і H_1 .
4. Задати α .
5. Оцінити параметри нормальної моделі: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma} = s$.
6. Сформувати інтервали та визначити спостережені частоти n_i .
7. Стандартизувати межі інтервалів і за $\Phi(z)$ знайти p_i .
8. Обчислити $n_i^* = np_i$ і перевірити достатність очікуваних частот.
9. За потреби об'єднати сусідні інтервали та лише після цього зафіксувати k .
10. Обчислити кожний внесок $(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$ і χ_{obs}^2 .
11. Визначити $\nu = k - 1 - r$, критичне значення і p-value.
12. Прийняти статистичне рішення та сформулювати його коректною мовою.
13. Пояснити, що результат означає для вибору подальших статистичних методів і що він **не** говорить про відповідність деталей допускам.

5. Варіант 0 — комплексна перевірка нормальної моделі

Умова задачі

Під час контролю стабільності токарної операції виміряно діаметр X 50 послідовно відібраних деталей, мм. Це та сама вибірка Варіанта 0, що використовувалася у ПР4:

50.015;	49.997;	50.000;	49.949;	50.055
50.039;	50.002;	50.029;	50.017;	49.996
50.034;	50.002;	50.002;	49.990;	50.021
50.008;	50.024;	49.995;	50.013;	49.988
50.031;	50.015;	50.018;	50.020;	49.985
50.030;	50.061;	49.969;	49.967;	49.972
50.031;	50.013;	50.037;	50.028;	50.015
50.017;	50.006;	50.032;	49.982;	49.999
50.016;	50.055;	49.991;	49.983;	49.996
50.034; 50.004; 50.043; 49.963; 50.038				

За результатами ПР4 отримано $\bar{x} = 50.010540$ мм і $s = 0.024716$ мм. За рівня значущості $\alpha = 0.05$ необхідно:

1. виконати попередню візуальну оцінку форми розподілу за гістограмою і boxplot;
2. сформулювати нульову та альтернативну гіпотези;
3. за критерієм узгодженості Пірсона перевірити, чи узгоджуються дані з нормальною моделлю з параметрами, оціненими за вибіркою;
4. прийняти рішення за критичним значенням та p-value;
5. сформулювати статистичний та інженерний висновки.

5.1. Крок 1. Попередня візуальна оцінка

Із ПР4 маємо інтервальний частотний ряд із сімома інтервалами шириною 0.020 мм і частотами:

Інтервал, мм	Частота
[49.940; 49.960)	1
[49.960; 49.980)	4
[49.980; 50.000)	11
[50.000; 50.020)	16
[50.020; 50.040)	14
[50.040; 50.060)	3
[50.060; 50.080]	1

Частоти зростають до центральних інтервалів і зменшуються до країв; грубої мультимодальності не видно. Для boxplot за правилом Excel QUARTILE.INC:

$$Q_1 = 49.996, \quad Me = 50.014, \quad Q_3 = 50.02975.$$

$$IQR = 50.02975 - 49.996 = 0.03375.$$

Межі потенційних викидів:

$$L = 49.996 - 1.5 \cdot 0.03375 = 49.945375,$$

$$U = 50.02975 + 1.5 \cdot 0.03375 = 50.080375.$$

Фактичні $x_{min} = 49.949$ і $x_{max} = 50.061$ лежать усередині цих меж. Отже, за правилом 1.5 IQR сильних потенційних викидів не виявлено.

Попередній висновок: гістограма та boxplot не показують очевидної суперечності з приблизно симетричною одномодальною моделлю. Але цього недостатньо для формального висновку про нормальність — переходимо до критерію Пірсона.

5.2. Крок 2. Формулювання гіпотез і рівня значущості

Нульова гіпотеза:

$$H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

де параметри оцінюємо за цією ж вибіркою:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 50.010540, \quad \hat{\sigma} = s = 0.024716.$$

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1: \text{розподіл } X \text{ статистично значуще не узгоджується з цією нормальною моделлю.}$$

Вибираємо $\alpha = 0.05$. Критерій Пірсона тут є правохвостовим, бо саме великі значення χ^2 свідчать про сильну розбіжність.

5.3. Крок 3. Групування даних

Для ручної перевірки об'єднаємо крайні інтервали так, щоб теоретично очікувані частоти були достатніми. Використаємо п'ять груп:

i	Інтервал, мм	Спостережена частота n_i
1	$(-\infty; 49.980)$	5
2	$[49.980; 50.000)$	11
3	$[50.000; 50.020)$	16
4	$[50.020; 50.040)$	14
5	$[50.040; +\infty)$	4
Разом		50

Використання нескінченних крайніх інтервалів є принциповим: нормальний розподіл теоретично має ненульові хвости за межами спостережених мінімуму та максимуму.

5.4. Крок 4. Стандартизація меж і теоретичні ймовірності

Для скінченної межі x обчислюємо:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

Отримуємо:

Межа x	z	$\Phi(z)$
49.980	-1.235652	0.108294
50.000	-0.426450	0.334890
50.020	0.382753	0.649048
50.040	1.191955	0.883361

Тепер послідовно знаходимо ймовірності груп:

$$p_1 = \Phi(-1.235652) = 0.108294.$$

$$p_2 = \Phi(-0.426450) - \Phi(-1.235652) = 0.334890 - 0.108294 = 0.226596.$$

$$p_3 = \Phi(0.382753) - \Phi(-0.426450) = 0.649048 - 0.334890 = 0.314158.$$

$$p_4 = \Phi(1.191955) - \Phi(0.382753) = 0.883361 - 0.649048 = 0.234312.$$

$$p_5 = 1 - \Phi(1.191955) = 1 - 0.883361 = 0.116639.$$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^5 p_i \approx 1.000000.$$

5.5. Крок 5. Очікувані частоти

Для $n = 50$:

$$n_i^* = np_i.$$

i	n_i	p_i	$n_i^* = 50p_i$
1	5	0.108294	5.414699
2	11	0.226596	11.329807
3	16	0.314158	15.707915
4	14	0.234312	11.715606
5	4	0.116639	5.831972
Разом			50.000000

Найменша очікувана частота $5.414699 > 5$. Отже, прийняте групування придатне для навчального застосування χ^2 -наближення.

5.6. Крок 6. Обчислення статистики Пірсона

Для кожної групи:

$$\chi_i^2 = \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}.$$

i	n_i	n_i^*	$(n_i - n_i^*)^2/n_i^*$
1	5	5.414699	0.031761
2	11	11.329807	0.009601
3	16	15.707915	0.005431
4	14	11.715606	0.445428
5	4	5.831972	0.575469
Сума			1.067690

$$\chi_{obs}^2 = 1.067690.$$

5.7. Крок 7. Число ступенів вільності та критичне значення

Після об'єднання маємо $k = 5$ груп. Із тієї самої вибірки оцінено два параметри нормального розподілу — μ та σ , тому $r = 2$:

$$\nu = k - 1 - r = 5 - 1 - 2 = 2.$$

Для $\alpha = 0.05$:

$$\chi_{1-\alpha;\nu}^2 = \chi_{0.95;2}^2 \approx 5.991465.$$

Порівнюємо:

$$1.067690 < 5.991465.$$

Спостережене значення не потрапило до критичної області. За критичним значенням **немає** достатніх статистичних підстав відхилити H_0 .

5.8. Крок 8. p-value

$$p = P(\chi_2^2 \geq 1.067690) \approx 0.586346.$$

Оскільки:

$$p = 0.586346 > \alpha = 0.05,$$

отримуємо те саме статистичне рішення: H_0 не відхиляємо.

Не слід писати «ймовірність нормального розподілу дорівнює 0.586» або « H_0 істинна з ймовірністю 58.6%». Значення 0.586 — це p-value з конкретним частотним змістом, визначеним у розділі 3.8.

5.9. Крок 9. Описова міра розбіжності

Як додаткову описову характеристику для цієї таблиці можна обчислити:

$$w = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{1.067690}{50}} \approx 0.146.$$

Це число не замінює p-value і не визначає придатність деталі за допуском. Воно лише кількісно характеризує сумарну розбіжність між спостереженими та очікуваними частотами у вибраному групуванні.

5.10. Статистичний та інженерний висновки

Статистичний висновок. За вибіркою з 50 вимірювань отримано $\chi^2 = 1.067690$, $\nu = 2$, $p = 0.586346$. За рівня значущості 0.05 немає достатніх статистичних підстав відхилити нульову гіпотезу про узгодженість даних із нормальною моделлю з параметрами, оціненими за вибіркою.

Інженерний висновок. Форма розподілу виміряних діаметрів не суперечить використанню нормальної моделі для подальшого навчального параметричного аналізу цієї серії. Водночас цей результат **не означає**, що процес центрований на номіналі, що всі деталі відповідають допуску або що розподіл «доведено нормальний». Положення центру, величину розсіювання і технологічну придатність потрібно оцінювати окремими показниками.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

6.1. Введення даних і первинна візуалізація

Розмістити 50 вимірювань у B2:B51. Перевірити:

- =COUNT(B2:B51) → 50;
- =AVERAGE(B2:B51) → 50.01054;
- =STDEV.S(B2:B51) → приблизно 0.024716.

Гістограма: Insert → Statistical Chart → Histogram. Для зіставлення з ручною частиною бажано встановити ширину інтервалу 0.020 мм.

Boxplot: Insert → Statistical Chart → Box & Whisker. Квартилі для перевірки:

- =QUARTILE.INC(B2:B51;1) → 49.996;
- =MEDIAN(B2:B51) → 50.014;
- =QUARTILE.INC(B2:B51;3) → 50.02975.

6.2. Спостережені частоти для п'яти груп

Їх можна отримати функціями COUNTIF/COUNTIFS. Наприклад:

- перша група: =COUNTIF(\$B\$2:\$B\$51;"<49.98");
- друга: =COUNTIFS(\$B\$2:\$B\$51;">=49.98";\$B\$2:\$B\$51;"<50.00");
- остання: =COUNTIF(\$B\$2:\$B\$51;">=50.04").

Контроль: сума спостережених частот повинна дорівнювати 50.

6.3. Теоретичні ймовірності та очікувані частоти

Нехай середнє знаходиться в E2, стандартне відхилення — в E3. Наприклад, для другої групи:

=NORM.DIST(50.00;\$E\$2;\$E\$3;TRUE)-NORM.DIST(49.98;\$E\$2;\$E\$3;TRUE)

Для першої групи:

=NORM.DIST(49.98;\$E\$2;\$E\$3;TRUE)

Для останньої:

=1-NORM.DIST(50.04;\$E\$2;\$E\$3;TRUE)

Очікувана частота:

=COUNT(\$B\$2:\$B\$51)*Probability

Перевірити, що сума теоретичних ймовірностей ≈ 1 , а очікуваних частот ≈ 50 .

6.4. Статистика Пірсона

Для кожного рядка таблиці:

=(Observed-Expected)^2/Expected

Після цього підсумувати п'ять внесків функцією SUM. Еталон:

$$\chi_{obs}^2 \approx 1.067690.$$

6.5. Критичне значення та p-value

Число ступенів вільності:

=5-1-2 $\rightarrow$ 2.

Критичне значення:

=CHISQ.INV.RT(0.05;2) $\rightarrow$ 5.991465.

p-value:

=CHISQ.DIST.RT(ChiSquare;2) $\rightarrow$ 0.586346.

Вбудована функція CHISQ.TEST може бути використана лише як **додаткова перевірка** після того, як студент сам сформував теоретичні частоти. Для задачі з параметрами, оціненими за даними, число ступенів вільності необхідно розуміти й контролювати самостійно.

6.6. Описова міра розбіжності та підсумковий контроль

=SQRT(ChiSquare/COUNT(B2:B51)) $\rightarrow$ приблизно 0.146.

ик	Показн	Еталон
	$\bar{x}$	50.010540 мм
	s	0.024716 мм
	χ^2	1.067690
	ν	2
	критич	5.991465
не χ^2	p-value	0.586346
	w	0.146
рішенн	немає достатніх підстав	
я	відхилити H_0	

7. Вимоги до звіту

Звіт студента повинен містити

1. номер практичної роботи, тему, мету та номер варіанта;
2. вихідну вибірку;
3. гістограму і boxplot з коротким попереднім коментарем;
4. формулювання H_0 , H_1 та рівня α ;
5. оцінки $\hat{\mu}$ і $\hat{\sigma}$;
6. таблицю груп та спостережених частот;
7. стандартизовані межі, значення $\Phi(z)$ і розрахунок p_i ;
8. очікувані частоти та перевірку умови їх достатності;
9. повний ручний розрахунок внесків і χ^2 ;
10. число ступенів вільності, критичне значення та p-value;
11. результати перевірки в Microsoft Excel;
12. зіставлення ручного й автоматизованого результатів;
13. коректний статистичний висновок;
14. змістовний інженерний висновок і обмеження інтерпретації.

Не допускаються висновки « H_0 приймається», «нормальність доведена», «р — ймовірність істинності H_0 » або «нормальний розподіл означає, що технологічний процес якісний».

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

Для 50 вимірювань діаметра отримано $\chi^2 = 1.067690$, $\nu = 2$ та $p = 0.586346$. За рівня значущості 0.05 немає достатніх статистичних підстав відхилити гіпотезу про узгодженість даних із нормальною моделлю. Отже, нормальну модель можна використовувати як робочу для подальших параметричних розрахунків цієї серії за умови виконання інших передумов. Водночас результат критерію не оцінює центрування процесу відносно номіналу і не визначає частку деталей, що відповідають технологічному допуску; ці питання потребують окремого аналізу.

9. Контрольні питання для захисту

1. Що називають статистичною гіпотезою?
2. У чому різниця між H_0 та H_1 ?
3. Чому нульову гіпотезу не «доводять» за вибіркою?
4. Чим одностороння перевірка відрізняється від двосторонньої?
5. Коли доцільна правостороння альтернатива?
6. Чому не можна вибирати напрям альтернативи після перегляду даних?
7. Що називають статистикою критерію?
8. Навіщо знати розподіл статистики за умови H_0 ?
9. Що означає рівень значущості α ?
10. Що таке помилка I роду? Наведіть інженерний приклад.
11. Що таке помилка II роду? Наведіть інженерний приклад.
12. Що називають статистичною потужністю?
13. Як обсяг вибірки впливає на статистичну потужність?
14. Дайте правильне означення p-value.
15. Чому p-value не є ймовірністю істинності H_0 ?

16. Чим статистична значущість відрізняється від практичної?
17. Що називають розміром ефекту?
18. Чому дуже мала, але статистично значуща різниця може бути інженерно неважливою?
19. Чим параметричні критерії відрізняються від непараметричних?
20. Чи є непараметричний критерій повністю вільним від передумов?
21. Назвіть основні кроки загального алгоритму перевірки гіпотез.
22. Чому в цьому практикумі перевірку форми розподілу виконують перед ПР6?
23. Чи потрібно завжди тестувати сирі дані на нормальність перед будь-яким статистичним аналізом?
24. Яку інформацію дає гістограма?
25. Яку інформацію дає boxplot?
26. Чому гістограма і boxplot не є формальним доказом нормальності?
27. Для чого використовують критерій узгодженості Пірсона?
28. Що саме порівнює статистика χ^2 ?
29. Як для нормального розподілу знайти теоретичну ймовірність інтервалу?
30. Чому крайні групи в цій роботі простягаються до $-\infty$ і $+\infty$?
31. Як отримують очікувані частоти n_i^* ?
32. Чому очікувані частоти не слід округлювати до цілих?
33. Чому малі очікувані частоти створюють проблему?
34. Що робити, якщо крайні очікувані частоти менші за допустимі?
35. Як визначають число ступенів вільності у критерії Пірсона?
36. Чому для нормального розподілу в нашому прикладі віднімаємо два оцінені параметри?
37. Яке правило рішення за критичним значенням?
38. Яке правило рішення за p-value?
39. Чому коректно писати «немає підстав відхилити H_0 », а не « H_0 прийнято»?
40. Що означає результат $p = 0.586$ у Варіанті 0?
41. Чи доводить результат Варіанта 0, що генеральна сукупність точно нормальна?
42. Чи гарантує нормальний розподіл відповідність деталей технологічному допуску?
43. Як результат ПР5 впливає на вибір методів у ПР6?

10. Методичний міст до наступної ПР

У ПР5 сформовано загальну логіку перевірки статистичних гіпотез і перевірено одну з ключових передумов подальшого параметричного аналізу — узгодженість даних із нормальною моделлю. Наступне інженерне питання вже стосується не форми одного розподілу, а **порівняння двох генеральних сукупностей**: чи однакове їх розсіювання і чи відрізняються середні рівні. У ПР6 ця сама схема « $H_0/H_1 \rightarrow$ передумови $\rightarrow$ статистика $\rightarrow$ p-value $\rightarrow$ рішення $\rightarrow$ інженерний висновок» буде застосована до F- і t-критеріїв.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №6

Перевірка статистичних гіпотез про параметри двох генеральних сукупностей

1. Мета роботи

- навчитися обирати статистичний метод для порівняння двох генеральних сукупностей залежно від структури даних і передумов;
- перевіряти гіпотезу про рівність дисперсій двох нормальних генеральних сукупностей за F-критерієм;
- порівнювати генеральні середні за допомогою pooled t-критерію, t-критерію Велча та парного t-критерію;
- будувати й правильно інтерпретувати довірчий інтервал для різниці генеральних середніх;
- розрізняти статистичну та практичну інженерну значущість різниці й оцінювати розмір ефекту;
- перевіряти ручні розрахунки та автоматизувати їх у Microsoft Excel.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання роботи студент повинен уміти визначити, чи є дві вибірки незалежними або парними; сформулювати нульову та альтернативну гіпотези; перевірити передумови застосування параметричних критеріїв; обчислити вибіркові середні та дисперсії; виконати F-тест; обґрунтовано обрати pooled t-тест, Welch t-тест або парний t-тест; обчислити статистику критерію, ступені вільності, p-value та довірчий інтервал; оцінити розмір ефекту і сформулювати статистичний та інженерний висновки.

3. Теоретичні відомості

3.1. Що означає порівняти дві генеральні сукупності

У машинобудуванні часто необхідно порівняти два технологічні режими, два верстати, дві партії матеріалу, два способи термообробки або стан процесу до і після зміни налаштувань. Нехай досліджуються дві генеральні сукупності з параметрами

$$\mu_1, \sigma_1^2 \quad \text{та} \quad \mu_2, \sigma_2^2.$$

За вибірками обчислюють статистики

$$\bar{x}_1, s_1^2, s_1 \quad \text{та} \quad \bar{x}_2, s_2^2, s_2.$$

Типові питання: чи відрізняється **розсіювання** результатів двох процесів; чи відрізняються їхні **середні рівні**; наскільки великою є ця різниця і чи має вона практичне значення.

3.2. Незалежні та парні вибірки

Незалежні вибірки утворюються тоді, коли спостереження однієї групи не пов'язані однозначно зі спостереженнями другої. Наприклад, 12 деталей після режиму А і 12 інших деталей після режиму В.

Парні (залежні) вибірки виникають, коли кожному спостереженню першої серії відповідає конкретне спостереження другої: той самий верстат до і після налаштування, та сама деталь до і після обробки, вимірювання в одній точці двома методами.

Важливо: вибір між незалежним і парним тестом визначається *планом експерименту*, а не схожістю чисел. Ігнорування парності втрачає інформацію про індивідуальні відмінності об'єктів.

3.3. Передумови параметричного порівняння

Для класичних t-критеріїв необхідно враховувати:

- кількісний характер досліджуваної ознаки;
- незалежність спостережень усередині вибірки; для незалежного t-тесту — також незалежність двох груп;
- відсутність грубих помилок і сильних викидів;
- для малих вибірок — достатню узгодженість розподілу з нормальною моделлю; у ПР5 логіку перевірки нормальності вже було опрацьовано;
- для pooled t-тесту додатково передбачається рівність генеральних дисперсій.

Для парного t-тесту нормальність оцінюють насамперед для **різниці усередині пар**, а не окремо для двох початкових серій.

3.4. Гіпотези про параметри двох сукупностей

Для дисперсій у двосторонній постановці:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Для середніх:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{або} \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0.$$

Двостороння альтернатива:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

Односторонні альтернативи $\mu_1 > \mu_2$ або $\mu_1 < \mu_2$ допустимі лише тоді, коли напрям різниці сформульований **до аналізу даних** і обґрунтований інженерною постановкою.

3.5. Порівняння дисперсій: F-критерій Фішера

Для двох незалежних нормальних сукупностей відношення вибірових дисперсій має F-розподіл. Якщо в чисельнику розмістити більшу дисперсію,

$$F = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2} \geq 1.$$

Ступені вільності:

$$\nu_1 = n_{max} - 1, \quad \nu_2 = n_{min} - 1,$$

де індекс *max* стосується вибірки, дисперсію якої поставлено в чисельник. Для двосторонньої перевірки з таким записом порівнюють F із верхнім критичним значенням для $\alpha/2$ або використовують двосторонній p-value.

Обмеження F-критерію: він чутливий до відхилень від нормального закону та до викидів. У прикладній статистиці для перевірки однорідності дисперсій часто використовують стійкіші критерії, наприклад критерій Левена. У цій роботі F-критерій використовується як навчальний інструмент для розуміння ролі дисперсій.

3.6. Порівняння незалежних середніх за рівних дисперсій

Якщо дві вибірки незалежні і припущення про рівність дисперсій прийнятне, оцінюють спільну дисперсію:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Стандартна похибка різниці середніх:

$$SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

Статистика pooled t-критерію:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}, \quad \nu = n_1 + n_2 - 2,$$

де зазвичай $\Delta_0 = 0$.

3.7. Нерівні дисперсії: t-критерій Велча

Якщо дисперсії не можна вважати однаковими, об'єднувати їх в одну оцінку не слід. Стандартна похибка:

$$SE_W = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

Статистика Велча:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}.$$

Ступені вільності оцінюють формулою Велча–Саттертвея:

$$\nu \approx \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}.$$

Число ν може бути нецілим — це нормально.

Практична примітка. Welch t-тест добре працює і при однакових дисперсіях, а за їх нерівності є безпечнішим за pooled t-тест. Тому в сучасному аналізі його часто використовують як базовий метод для двох незалежних вибірок. Навчальна схема цієї ПР «F-тест → вибір pooled/Welch» потрібна для усвідомлення передумов, а не як універсальне правило для будь-якого дослідження.

3.8. Парний t-критерій

Для n пар обчислюють різниці

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}.$$

Далі задача зводиться до перевірки однієї генеральної середньої різниці:

$$H_0: \mu_d = 0, \quad t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}, \quad \nu = n - 1.$$

Таким чином, парний тест аналізує не дві дисперсії окремо, а варіацію **внутрішньопарних різниць**.

3.9. Довірчий інтервал для різниці середніх

Точкова оцінка $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ не показує точності оцінювання. Для pooled t-тесту:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\alpha/2;\nu} s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}.$$

Для Welch t-тесту замість pooled-похибки використовують SE_W і ступені вільності Велча. Для парного тесту:

$$\bar{d} \pm t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}.$$

Якщо 95% довірчий інтервал різниці не містить нуля, це узгоджується з відхиленням двосторонньої H_0 на рівні $\alpha = 0.05$.

3.10. Розмір ефекту

p-value відповідає на питання про статистичну переконливість даних, але не показує, наскільки великою є різниця. Для незалежних груп з порівнюваними дисперсіями часто використовують стандартизовану різницю Коена:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p}.$$

Орієнтовно $|d| \approx 0.2$ вважають малим, $|d| \approx 0.5$ — середнім, $|d| \approx 0.8$ і більше — великим ефектом. Це лише загальні орієнтири; в інженерній задачі важливішими є фізичні одиниці, допуски та технологічні вимоги.

Для парного дизайну можна використовувати

$$d_z = \frac{\bar{d}}{s_d}.$$

3.11. Статистична і практична значущість

Статистично значуща різниця може бути технологічно неважливою, якщо вона значно менша за допустимий технологічний інтервал. І навпаки, практично небезпечна різниця може не досягти статистичної значущості через малу вибірку і низьку статистичну потужність. Тому висновок має містити щонайменше:

- оцінену різницю в фізичних одиницях;
- довірчий інтервал;
- p-value;
- за потреби розмір ефекту;
- зіставлення з технічними вимогами.

3.12. Якщо передумови параметричних критеріїв неприйнятні

За сильних викидів, виразної асиметрії, порядкової шкали або інших суттєвих порушень передумов можуть знадобитися непараметричні альтернативи. Для двох незалежних груп часто застосовують критерій Манна–Вітні, для парних даних — критерій Вілкоксона. Вони перевіряють інші статистичні твердження, тому не є механічною «заміною t-тесту без нормальності».

3.13. Алгоритм вибору методу

Питання	Рішення
Ті самі об'єкти виміряні двічі або спостереження природно утворюють пари?	Так → аналізувати різниці d_i і застосовувати парний t-критерій, якщо його передумови прийнятні.
Дві групи незалежні?	Так → перейти до порівняння незалежних середніх.
Чи немає критичних викидів і чи прийнятна нормальна модель для малих вибірок?	Якщо ні — переглянути дані, план експерименту або розглянути стійкі/непараметричні методи.
Чи допустиме припущення про рівність дисперсій?	Так → pooled t-тест; ні → Welch t-тест. У прикладній роботі Welch часто можна обрати як стійкий базовий варіант.
Який напрям альтернативи?	Задати до аналізу: двосторонній або обґрунтований односторонній.
Що подати у висновку?	Різницю середніх, 95% CI, p-value, практичну інтерпретацію; за потреби — розмір ефекту.

4. Алгоритм виконання практичної роботи

1. Визначити, чи є вибірки незалежними або парними.
2. Сформулювати дослідницьке питання, H_0 , H_1 та рівень значущості.
3. Перевірити структуру даних, можливі помилки, викиди та передумови застосування параметричного методу.
4. Обчислити необхідні вибіркові характеристики.
5. Для незалежних вибірок у навчальному алгоритмі перевірити гіпотезу про дисперсії.
6. Обрати pooled t-тест або Welch t-тест; для парних даних — перейти до різниць d_i .
7. Обчислити стандартну похибку, t-статистику та ступені вільності.
8. Знайти критичне значення і p-value.
9. Побудувати 95% довірчий інтервал різниці.
10. Оцінити практичну величину різниці та, за потреби, розмір ефекту.
11. Зіставити ручні результати з Microsoft Excel.
12. Сформулювати статистичний та інженерний висновки.

5. Варіант 0 — повне ручне розв'язання

Варіант 0 складається з трьох навчальних ситуацій. Перша є основною і виконується повністю; друга та третя демонструють, як змінюється метод при нерівних дисперсіях та при парному плані експерименту. Сукупний обсяг ручних розрахунків орієнтований приблизно на 50–60 хвилин.

Задача 1. Два незалежні режими термообробки: F-критерій → pooled t-тест

Умова. Досліджується твердість деталей після двох режимів термообробки А і В. Для кожного режиму незалежно відібрано по 12 деталей та виміряно твердість за шкалою HRC. На рівні значущості $\alpha = 0.05$: 1) перевірити, чи є статистичні підстави вважати генеральні дисперсії різними; 2) обрати обґрунтований варіант t-критерію і перевірити гіпотезу про рівність генеральних середніх; 3) побудувати 95% довірчий інтервал для різниці $\mu_A - \mu_B$; 4) оцінити стандартизований розмір ефекту; 5) сформулювати статистичний та інженерний висновки.

№	Режим А, HRC	Режим В, HRC
1	50.5	51.4
2	51.2	52.3
3	50.5	51.8
4	48.0	53.4
5	51.4	52.6
6	50.7	52.1
7	49.2	51.3
8	50.9	52.1
9	50.5	52.5
10	50.4	52.1
11	50.0	54.4
12	50.8	54.0

5.1. Обчислення вибірових характеристик

Щоб зменшити обсяг арифметики, використаємо кодування:

$$d_{Ai} = 10(x_{Ai} - 50), \quad d_{Bi} = 10(x_{Bi} - 52).$$

№	d_A	d_A^2	d_B	d_B^2
1	5	25	-6	36
2	12	144	3	9
3	5	25	-2	4
4	-20	400	14	196
5	14	196	6	36
6	7	49	1	1
7	-8	64	-7	49
8	9	81	1	1
9	5	25	5	25
10	4	16	1	1
11	0	0	24	576
12	8	64	20	400
Сума	41	1089	60	1334

Середні значення:

$$\bar{x}_A = 50 + \frac{41}{10 \cdot 12} = 50.3417 \text{ HRC},$$

$$\bar{x}_B = 52 + \frac{60}{10 \cdot 12} = 52.5000 \text{ HRC}.$$

Для закодованих величин вибірова дисперсія обчислюється через суму квадратів:

$$s_x^2 = \frac{1}{100(n-1)} \left(\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n} \right).$$

Для режиму А:

$$s_A^2 = \frac{1}{100 \cdot 11} \left(1089 - \frac{41^2}{12} \right) = 0.862652,$$

$$s_A = \sqrt{0.862652} = 0.9288 \text{ HRC}.$$

Для режиму В:

$$s_B^2 = \frac{1}{100 \cdot 11} \left(1334 - \frac{60^2}{12} \right) = 0.940000,$$
$$s_B = \sqrt{0.940000} = 0.9695 \text{ HRC}.$$

5.2. Перевірка гіпотези про дисперсії

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2, \quad H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2.$$

Оскільки $s_B^2 > s_A^2$, у чисельник ставимо дисперсію В:

$$F = \frac{0.940000}{0.862652} = 1.089664.$$

$\nu_1 = 11, \nu_2 = 11$. Для двосторонньої перевірки при $\alpha = 0.05$ верхнє критичне значення:

$$F_{0.975;11;11} \approx 3.4737.$$

Маємо $1.0897 < 3.4737$; двосторонній p-value:

$$p_F \approx 0.8893 > 0.05.$$

Статистичний висновок: дані не дають достатніх підстав відхилити H_0 про однакові генеральні дисперсії. У межах навчального алгоритму використовуємо pooled t-тест.

5.3. Перевірка гіпотези про середні

$$H_0: \mu_A = \mu_B, \quad H_1: \mu_A \neq \mu_B.$$

Об'єднана дисперсія:

$$s_p^2 = \frac{11 \cdot 0.862652 + 11 \cdot 0.940000}{22} = 0.901326,$$
$$s_p = \sqrt{0.901326} = 0.949382.$$

Стандартна похибка різниці:

$$SE = 0.949382 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = 0.387583.$$

Спостережувана різниця:

$$\bar{x}_A - \bar{x}_B = 50.3417 - 52.5000 = -2.1583 \text{ HRC}.$$

t-статистика:

$$t = \frac{-2.1583}{0.387583} = -5.568693.$$

Ступені вільності $\nu = 12 + 12 - 2 = 22$. Критичне значення:

$$t_{0.975;22} \approx 2.0739.$$

Оскільки $|t| = 5.5687 > 2.0739$, H_0 відхиляємо. Двосторонній

$$p \approx 0.00001345 < 0.05.$$

5.4. 95% довірчий інтервал різниці

$$\begin{aligned} & -2.1583 \pm 2.0739 \cdot 0.387583. \\ & -2.9621 < \mu_A - \mu_B < -1.3545 \text{ HRC}. \end{aligned}$$

Інтервал не містить нуля і повністю лежить нижче нуля. Отже, середня твердість за режиму А нижча; еквівалентно режим В підвищує середню твердість приблизно на 1.35–2.96 HRC із 95% довірою в межах цієї моделі.

5.5. Розмір ефекту

$$d = \frac{50.3417 - 52.5000}{0.949382} = -2.273.$$

Абсолютна величина $|d| \approx 2.27$ є дуже великою за загальними орієнтирами. Але інженерне рішення потрібно формувати насамперед у HRC і зіставляти з технічними вимогами.

Інженерна інтерпретація задачі 1. Стабільність двох режимів за розсіюванням результатів істотно не відрізняється за цією вибіркою, але режим В формує помітно вищий середній рівень твердості. Саме по собі «вище» не означає «краще»: необхідно зіставити 95% СІ різниці та фактичні рівні твердості з нормативним діапазоном, вимогами до крихкості, зносостійкості та ресурсу деталі.

Задача 2. Незалежні вибірки з різними дисперсіями: Welch t-тест

Умова. Порівнюють середню шорсткість поверхні після двох способів фінішної обробки. Для способу А отримано $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 12.4$ мкм, $s_1 = 0.8$ мкм; для способу В — $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 13.1$ мкм, $s_2 = 1.8$ мкм. На рівні $\alpha = 0.05$ визначити, чи можна використовувати модель рівних дисперсій, і перевірити двосторонню гіпотезу про рівність середніх.

Відношення дисперсій:

$$F = \frac{1.8^2}{0.8^2} = 5.0625.$$

Для $\nu_1 = 11$, $\nu_2 = 9$ верхня двостороння критична межа приблизно

$$F_{0.975;11;9} \approx 3.912.$$

Оскільки $5.0625 > 3.912$, а $p_F \approx 0.0216 < 0.05$, pooled t-тест не використовуємо. Застосовуємо Welch.

$$\begin{aligned} SE_W &= \sqrt{\frac{0.8^2}{10} + \frac{1.8^2}{12}} = 0.577927. \\ t &= \frac{12.4 - 13.1}{0.577927} = -1.2112. \end{aligned}$$

За формулою Велча–Саттертвейта:

$$\nu \approx 15.75.$$

Двосторонній $p \approx 0.2437 > 0.05$. 95% довірчий інтервал:

$$-1.9267 < \mu_1 - \mu_2 < 0.5267 \text{ мкм}.$$

Висновок. Розсіювання результатів двох способів відрізняється, але за наявним обсягом даних немає достатніх статистичних підстав стверджувати, що їхні генеральні середні шорсткості різні. Це

не доводить рівність середніх: інтервал показує, що дані сумісні як із помірною перевагою А, так і з невеликою перевагою В.

Задача 3. Парні дані: вимірювання до і після налаштування

Умова. На восьми верстатах виміряли середню шорсткість поверхні до та після коригування налаштувань. Оскільки кожен верстат виміряно двічі, дані утворюють пари. На рівні $\alpha = 0.05$ перевірити, чи змінилася середня шорсткість. Визначити 95% довірчий інтервал середнього зменшення.

Верстат	До, мкм	Після, мкм	$d = \text{до} - \text{після}$	d^2
1	2.8	2.5	0.3	0.09
2	3.0	2.9	0.1	0.01
3	2.7	2.5	0.2	0.04
4	3.1	2.7	0.4	0.16
5	2.9	2.7	0.2	0.04
6	3.2	2.9	0.3	0.09
7	2.6	2.6	0.0	0.00
8	3.0	2.8	0.2	0.04
Сума			1.7	0.47

$$\bar{d} = \frac{1.7}{8} = 0.2125 \text{ мкм.}$$

$$s_d^2 = \frac{0.47 - 1.7^2/8}{7} = 0.015536, \quad s_d = 0.124642 \text{ мкм.}$$

$$t = \frac{0.2125}{0.124642/\sqrt{8}} = 4.8221, \quad \nu = 7.$$

$t_{0.975;7} = 2.3646$, $p \approx 0.00192$. Отже, $H_0: \mu_d = 0$ відхиляємо.

95% довірчий інтервал:

$$0.2125 \pm 2.3646 \frac{0.124642}{\sqrt{8}},$$

$$0.1083 < \mu_d < 0.3167 \text{ мкм.}$$

Парний стандартизований ефект:

$$d_z = \frac{0.2125}{0.124642} = 1.705.$$

Висновок. Після налаштування середня шорсткість зменшилася приблизно на 0.21 мкм; 95% СІ середнього зменшення становить приблизно 0.11–0.32 мкм. Зміна статистично значуща, але її технологічну важливість необхідно оцінити щодо вимог креслення та нормативної шорсткості.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

6.1. Підготовка даних

Для задачі 1 внесіть режим А у B2:B13, режим В — у C2:C13. Для задачі 3 значення «до» та «після» розмістіть у двох сусідніх стовпцях, а в третьому обчисліть різницю.

6.2. Описові характеристики

- середнє: =AVERAGE(B2:B13);
- вибіркова дисперсія: =VAR.S(B2:B13);
- вибіркове стандартне відхилення: =STDEV.S(B2:B13);
- кількість спостережень: =COUNT(B2:B13).

Результати Excel необхідно зіставити з ручними значеннями, а не просто скопіювати у звіт.

6.3. F-критерій

Для двостороннього p-value:

=F.TEST(B2:B13;C2:C13)

Якщо вручну використано відношення більшої дисперсії до меншої, верхнє критичне значення для задачі 1:

=F.INV.RT(0.025;11;11)

Очікуємо $p_F \approx 0.8893$.

6.4. Незалежний t-тест за рівних дисперсій

Для задачі 1:

=T.TEST(B2:B13;C2:C13;2;2)

Аргумент 2 перед останнім означає двосторонню перевірку; останній 2 — дві незалежні вибірки з однаковими дисперсіями.

Excel повертає p-value, а не t-статистику. Тому s_p , SE і t корисно відтворити окремими формулами, щоб перевірити ручний алгоритм.

Критичне значення:

=T.INV.2T(0.05;22)

6.5. Довірчий інтервал різниці середніх

Для задачі 1 створіть клітинки з $\bar{x}_A - \bar{x}_B$, SE та критичним t . Нижня межа:

=difference-tcrit*SE

Верхня межа:

=difference+tcrit*SE

Мають бути отримані приблизно -2.9621 та -1.3545 HRC.

6.6. Welch t-тест

Для двох незалежних вибірок із нерівними дисперсіями:

=T.TEST(range1;range2;2;3)

Останній аргумент 3 означає Welch t-test. Якщо вихідні дані подано лише через $n_i, \bar{x}_i, s_i$, як у задачі 2, стандартну похибку, t та ступені вільності Велча необхідно обчислити формулами вручну в клітинках. Excel-функція T.TEST потребує самих вибірок, а не лише зведених характеристик.

6.7. Парний t-тест

Для даних «до/після»:

=T.TEST(B2:B9;C2:C9;2;1)

Останній аргумент 1 означає парний тест. Для контролю створіть стовпець різниць =B2-C2, знайдіть AVERAGE, STDEV.S і вручну відтворіть

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

6.8. Розмір ефекту

Для задачі 1 Cohen d обчислюється без спеціальної функції Excel:

=(meanA-meanB)/sp

Для парного дизайну:

=AVERAGE(diff_range)/STDEV.S(diff_range)

6.9. Що має збігтися

Результат	Ручний розрахунок
Задача 1: F	1.089664
Задача 1: F-test p-value	0.889307
Задача 1: pooled t	-5.568693
Задача 1: t-test p-value	0.00001345
Задача 1: 95% CI $\mu_A - \mu_B$	[-2.9621; -1.3545] HRC
Задача 2: Welch t	-1.2112
Задача 2: Welch p-value	0.2437
Задача 3: paired t	4.8221
Задача 3: paired p-value	0.00192

7. Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. номер практичної роботи, тему, мету і номер варіанта;
2. вихідні дані та пояснення, чи є вибірки незалежними або парними;
3. формулювання H_0 , H_1 і рівня значущості;
4. коротке обґрунтування передумов та вибору критерію;
5. ручне обчислення необхідних вибірових характеристик;
6. для незалежних вибірок — результат перевірки дисперсій у межах заданого навчального алгоритму;

7. обчислення t-статистики, ступенів вільності та p-value;
8. 95% довірчий інтервал різниці;
9. за завданням — розмір ефекту;
10. результати Microsoft Excel та порівняння з ручним розрахунком;
11. статистичний висновок;
12. інженерний висновок у фізичних одиницях із урахуванням технологічних вимог.

Не писати: « H_0 приймається», «середні однакові», «Excel показав різницю».

Коректно: «За рівня значущості 0,05 немає достатніх статистичних підстав відхилити гіпотезу про рівність генеральних середніх; 95% довірчий інтервал різниці містить нуль» або «Є статистично значущі підстави вважати середні різними; оцінена різниця становить ... у відповідних фізичних одиницях».

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

Для режимів термообробки А і В вибіркові дисперсії становлять відповідно 0.863 і 0.940 HRC². F-тест не виявив статистично значущої різниці розсіювання ($F = 1.090$, $p = 0.889$), тому в межах навчального алгоритму застосовано pooled t-критерій. Середні твердості 50.34 і 52.50 HRC відрізняються статистично значущо ($t = -5.569$, $p < 0.001$). Оцінена різниця $\mu_A - \mu_B$ дорівнює -2.16 HRC, а 95% довірчий інтервал становить від -2.96 до -1.35 HRC. Отже, режим В формує вищу середню твердість. Чи є така зміна технологічно бажаною, необхідно визначати за допустимим діапазоном твердості та експлуатаційними вимогами до деталі.

9. Контрольні питання для захисту

1. Які параметри двох генеральних сукупностей порівнюють у цій роботі?
2. Чим параметр генеральної сукупності відрізняється від вибіркової статистики?
3. Що таке незалежні вибірки?
4. Що таке парні вибірки?
5. Наведіть машинобудівний приклад незалежних вибірок.
6. Наведіть машинобудівний приклад парних вимірювань.
7. Чому тип вибірок визначається планом експерименту?
8. Які передумови має t-критерій для незалежних вибірок?
9. Яку нормальність слід оцінювати для парного t-критерію?
10. Сформулюйте H_0 і H_1 для двостороннього порівняння дисперсій.
11. Сформулюйте H_0 і H_1 для двостороннього порівняння середніх.
12. Коли допустима одностороння альтернатива?
13. Чому не можна обирати напрям односторонньої альтернативи після перегляду даних?
14. Як обчислюють F-статистику?
15. Чому F-статистика не може бути від'ємною?
16. Як визначають ступені вільності F-розподілу?
17. Чому F-критерій чутливий до ненормальності та викидів?
18. Що означає $p_F > 0.05$?
19. Чи доводить великий p-value абсолютну рівність дисперсій?
20. Що таке pooled variance?
21. За яких умов застосовують pooled t-критерій?
22. Запишіть формулу pooled t-статистики.

23. Чому для pooled t-тесту ступені вільності дорівнюють $n_1 + n_2 - 2$?
24. Коли слід використовувати Welch t-тест?
25. Чим стандартна похибка Велча відрізняється від pooled-похибки?
26. Чому ступені вільності Велча можуть бути нецілими?
27. Чому Welch t-тест часто використовують як базовий тест для незалежних вибірок?
28. Чому навчальна схема $F \rightarrow$ pooled/Welch не є універсально обов'язковою процедурою?
29. Як виконується парний t-тест?
30. Що означає d_i у парному аналізі?
31. Чому парний тест може мати більшу потужність, ніж тест незалежних вибірок?
32. Як побудувати довірчий інтервал різниці двох середніх?
33. Що означає, якщо 95% CI різниці містить нуль?
34. Що означає, якщо весь 95% CI для $\mu_1 - \mu_2$ лежить нижче нуля?
35. Чому p-value не показує величину технологічного ефекту?
36. Що таке Cohen d?
37. Яку інформацію дає знак Cohen d?
38. Чому універсальні межі 0.2, 0.5, 0.8 не слід механічно переносити на інженерне рішення?
39. Що таке практична значущість?
40. Чи може статистично значуща різниця бути технологічно несуттєвою?
41. Чи може практично важлива різниця бути статистично незначущою?
42. Яку роль у такій ситуації відіграє обсяг вибірки?
43. Які непараметричні альтернативи можна розглянути для двох незалежних і для двох парних вибірок?
44. Чому критерій Манна-Вітні не слід описувати просто як «t-тест без нормальності»?
45. Що означають аргументи функції Excel T.TEST?
46. Який тип T.TEST відповідає парному тесту?
47. Який тип відповідає двом незалежним вибіркам з рівними дисперсіями?
48. Який тип відповідає Welch t-тесту?
49. Чому у звіті недостатньо вставити лише p-value з Excel?
50. Які числові результати повинні обов'язково з'явитися в інженерному висновку?

10. Методичний міст до наступної практичної роботи

У ПР6 фактор фактично мав два рівні: режим А і режим В, стан «до» і «після». Ми перевіряли, чи пов'язана зміна рівня фактора зі зміною середнього результату. У реальному технологічному процесі фактор часто змінюється безперервно: швидкість різання, подача, температура, час обробки, навантаження. Тоді двох середніх уже недостатньо — потрібно оцінити силу та напрям зв'язку між кількісними змінними і побудувати модель, що описує залежність. Це є предметом кореляційного та регресійного аналізу в ПР7.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №7

Кореляційний та регресійний аналіз експериментальних даних

1. Мета роботи

- навчитися виявляти та кількісно оцінювати взаємозв'язок між двома кількісними ознаками;
- обчислювати та інтерпретувати коваріацію і коефіцієнт кореляції Пірсона;
- перевіряти статистичну значущість лінійного кореляційного зв'язку;
- будувати просту лінійну регресію методом найменших квадратів;
- оцінювати якість регресійної моделі за R^2 , стандартною похибкою та залишками;
- виконувати інтерполяційний прогноз і формулювати статистично та інженерно коректний висновок.

2. Очікувані результати навчання

Після виконання роботи студент повинен уміти: відрізнити функціональний і статистичний зв'язок; правильно побудувати діаграму розсіювання; обчислити r , b_0 , b_1 , R^2 ; перевірити гіпотезу про відсутність лінійної кореляції; проаналізувати залишки; розрізнити довірчий та прогнозний інтервали; розуміти межі екстраполяції та відмінність кореляції від причинності.

3. Теоретичні відомості

3.1. Зв'язок між двома кількісними ознаками

Нехай для кожного з n об'єктів або режимів експерименту виміряно дві кількісні ознаки X і Y . **Функціональний зв'язок** означає, що кожному x відповідає одне точно визначене y . **Статистичний зв'язок** означає, що зміна X пов'язана зі зміною розподілу Y , але окремі спостереження мають випадкове розсіювання.

3.2. Діаграма розсіювання

Діаграма розсіювання дозволяє оцінити напрям, форму і силу зв'язку, наявність кластерів та викидів і доцільність застосування лінійної моделі.

Важливо. Коефіцієнт кореляції не слід інтерпретувати без попереднього перегляду scatter plot.

3.3. Коваріація

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Додатна коваріація відповідає переважно прямому зв'язку, від'ємна — оберненому. Її числове значення залежить від одиниць вимірювання.

3.4. Коефіцієнт кореляції Пірсона

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$-1 \leq r \leq 1$. Знак визначає напрям лінійного зв'язку, а $|r|$ — його тісноту. Значення r , близьке до нуля, не виключає нелінійної залежності.

3.5. Передумови застосування кореляції Пірсона

- обидві ознаки кількісні;
- спостереження незалежні;
- зв'язок приблизно лінійний;
- немає домінуючих викидів;
- для класичної перевірки значущості бажана приблизна двовимірна нормальність або принаймні відсутність різких порушень передумов.

Для монотонного, але нелінійного зв'язку або порядкових даних доцільно розглянути ранговий коефіцієнт Спірмена.

3.6. Перевірка значущості коефіцієнта кореляції

$$H_0: \rho = 0, \quad H_1: \rho \neq 0.$$
$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \quad \nu = n-2.$$

Якщо $|t| > t_{1-\alpha/2; n-2}$ або $p < \alpha$, H_0 відхиляють.

3.7. Кореляція і причинність

Навіть сильний статистичний зв'язок не доводить причинності. Можливі приховані фактори, спільна причина або змішування режимів. Причинний висновок потребує інженерного механізму та належного плану експерименту.

3.8. Проста лінійна регресія

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon.$$
$$\hat{y} = b_0 + b_1 x.$$

3.9. Метод найменших квадратів

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$
$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$
$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

3.10. Коефіцієнт детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}, \quad SST = \sum (y_i - \bar{y})^2.$$
$$R^2 = r^2.$$

R^2 описує частку вибіркової варіації Y , яку пояснює модель, але не є «відсотком точності».

3.11. Перевірка значущості коефіцієнта нахилу

$$H_0: \beta_1 = 0, \quad H_1: \beta_1 \neq 0.$$
$$s_e = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}}.$$

$$SE(b_1) = \frac{s_e}{\sqrt{S_{xx}}}$$

$$t = \frac{b_1}{SE(b_1)}, \quad v = n - 2.$$

3.12. Довірчий інтервал для коефіцієнта нахилу

$$b_1 \pm t_{1-\alpha/2; n-2} SE(b_1).$$

3.13. Залишки і діагностика моделі

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Для адекватної лінійної моделі залишки мають випадково коливатися навколо нуля. Кривизна може свідчити про нелінійність, а систематична зміна розмаху — про неоднорідність дисперсії.

3.14. Інтерполяція, екстраполяція і прогноз

$$\hat{y}_0 = b_0 + b_1 x_0.$$

Інтерполяція — прогноз усередині дослідженого діапазону; **екстраполяція** — поза ним.

3.15. Довірчий і прогнозний інтервали

Для середнього відгуку:

$$\hat{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2; n-2} s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

Для окремого нового спостереження:

$$\hat{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2; n-2} s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

Прогнозний інтервал ширший, оскільки враховує випадкове відхилення окремої майбутньої деталі.

3.16. Межі застосування лінійної моделі

- малий r не означає повної відсутності залежності;
- великий r може бути спричинений викидом;
- нелінійний зв'язок може мати $r \approx 0$;
- лінійну модель не можна механічно екстраполювати далеко за межі експерименту;
- статистичний висновок має узгоджуватися з фізикою процесу.

Типові помилки: обчислювати r без scatter plot; трактувати кореляцію як причинність; називати R^2 точністю; ігнорувати залишки; робити висновок лише за p-value; вважати $r \approx 0$ доказом відсутності будь-якої залежності; використовувати модель для далекої екстраполяції.

4. Алгоритм виконання

1. Визначити фактор X і відгук Y .
2. Побудувати scatter plot.
3. Оцінити форму зв'язку та наявність викидів.

- Обчислити $\bar{x}, \bar{y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}$ і коваріацію.
- Знайти r та перевірити $H_0: \rho = 0$.
- Знайти b_1, b_0 і записати рівняння регресії.
- Обчислити R^2, SSE, s_e .
- Перевірити значущість b_1 і побудувати його довірчий інтервал.
- Обчислити залишки й проаналізувати їх графік.
- Знайти точковий прогноз, довірчий та прогнозний інтервали.
- Сформулювати статистичний та інженерний висновки.

5. Варіант 0 — повне розв'язання

Задача 1. Кореляційно-регресійний аналіз технологічного експерименту. Досліджується вплив подачі різального інструмента x (мм/об) на шорсткість поверхні $R_a = y$ (мкм) після токарної обробки. За результатами 12 режимів потрібно: оцінити форму зв'язку; знайти коваріацію та r ; перевірити значущість кореляції; побудувати лінійну регресію; знайти R^2, SSE, s_e ; перевірити значущість нахилу і побудувати 95% СІ для β_1 ; проаналізувати залишки; спрогнозувати R_a при $x_0 = 0.25$ мм/об і знайти 95% довірчий та прогнозний інтервали.

№	x , мм/об	$y=R_a$, мкм	$\hat{y}$, мкм	$e=y-\hat{y}$
1	0.10	1.76	1.857	-0.097
2	0.12	1.93	2.016	-0.086
3	0.14	2.26	2.174	0.086
4	0.16	2.37	2.332	0.038
5	0.18	2.53	2.490	0.040
6	0.20	2.69	2.648	0.042
7	0.22	3.18	2.807	0.373
8	0.24	2.82	2.965	-0.145
9	0.26	2.95	3.123	-0.173
10	0.28	3.04	3.281	-0.241
11	0.30	3.47	3.439	0.031
12	0.32	3.73	3.598	0.132

5.1. Візуальна оцінка

На діаграмі розсіювання точки утворюють висхідну хмару без вираженої кривизни. Тому лінійна модель виглядає прийнятною як перше наближення.

5.2. Середні та проміжні суми

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0.2100, & \bar{y} &= 2.7275. \\ S_{xx} &= 0.057200, & S_{xy} &= 0.452500, & S_{yy} &= 3.875625. \\ s_{xy} &= \frac{0.4525}{11} = 0.041136.\end{aligned}$$

5.3. Коефіцієнт кореляції та його значущість

$$\begin{aligned}r &= \frac{0.4525}{\sqrt{0.0572 \cdot 3.875625}} = 0.961058. \\ t &= 0.961058 \sqrt{\frac{10}{1 - 0.961058^2}} = 10.997564.\end{aligned}$$

Для $\nu = 10$ маємо $t_{0.975;10} \approx 2.2281, p \approx 6.61 \cdot 10^{-7}$. Отже, $H_0: \rho = 0$ відхиляємо.

5.4. Рівняння регресії

$$b_1 = \frac{0.4525}{0.0572} = 7.910839.$$

$$b_0 = 2.7275 - 7.910839 \cdot 0.21 = 1.066224.$$

$$\hat{R}_a = 1.066224 + 7.910839x.$$

Збільшення подачі на 0.01 мм/об пов'язане зі збільшенням прогнозованої шорсткості приблизно на 0.0791 мкм.

5.5. Коефіцієнт детермінації і залишкова варіація

$$R^2 = 0.923633.$$

$$SSE = 0.295970.$$

$$s_e = \sqrt{\frac{0.295970}{10}} = 0.172038 \text{ мкм.}$$

5.6. Значущість нахилу і 95% CI

$$SE(b_1) = \frac{0.172038}{\sqrt{0.0572}} = 0.719326.$$

$$t = \frac{7.910839}{0.719326} = 10.997564.$$

$$7.910839 \pm 2.2281 \cdot 0.719326.$$

$$6.3081 < \beta_1 < 9.5136.$$

5.7. Аналіз залишків

Найбільший за модулем залишок спостерігається при $x = 0.22$: приблизно 0.373 мкм. Явної систематичної кривизни в таблиці не видно, однак остаточний висновок роблять за графіком залишків.

5.8. Прогноз при $x=0.25$ мм/об

$$\hat{y}_0 = 1.066224 + 7.910839 \cdot 0.25 = 3.043934 \text{ мкм.}$$

95% довірчий інтервал для середнього відгуку:

$$2.9160 < E(Y | X = 0.25) < 3.1718 \text{ мкм.}$$

95% прогнозний інтервал для окремої нової деталі:

$$2.6398 < Y_{new} < 3.4480 \text{ мкм.}$$

Інженерний висновок до задачі 1. У діапазоні подачі 0.10–0.32 мм/об виявлено сильний статистично значущий прямий лінійний зв'язок між подачею та шорсткістю ($r = 0.961$, $p < 0.001$). Лінійна модель пояснює близько 92.4% вибіркової варіації. При $x = 0.25$ мм/об прогнозоване середнє значення R_a становить близько 3.04 мкм, а 95% прогнозний інтервал для окремої нової деталі — приблизно 2.64–3.45 мкм.

Задача 2. Нелінійний зв'язок при нульовій лінійній кореляції. Нехай $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, а $y = 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$. Знайти r та пояснити результат.

Маємо точний закон $y = x^2$. Через симетрію:

$$\bar{x} = 0, \quad S_{xy} = 0.$$

$$r = 0.$$

Висновок. Нульова лінійна кореляція не означає відсутність залежності: scatter plot чітко показує параболу. Тому перед інтерпретацією r необхідна візуальна оцінка форми зв'язку.

6. Перевірка та автоматизація в Microsoft Excel

6.1. Scatter plot

Дані x внести в B2:B13, y — у C2:C13. Побудувати **Insert** → **Scatter (XY)**.

6.2. Основні статистики

- =AVERAGE(B2:B13) — $\bar{x}$;
- =AVERAGE(C2:C13) — $\bar{y}$;
- =COVARIANCE.S(B2:B13;C2:C13) — коваріація;
- =CORREL(B2:B13;C2:C13) — r .

6.3. Параметри регресії

- =SLOPE(C2:C13;B2:B13) — b_1 ;
- =INTERCEPT(C2:C13;B2:B13) — b_0 ;
- =RSQ(C2:C13;B2:B13) — R^2 ;
- =LINEST(C2:C13;B2:B13;TRUE;TRUE) — розширена регресійна статистика.

6.4. Прогнози і залишки

Якщо b_0 у F2, b_1 у F3, то в D2: =\$F\$2+\$F\$3*B2. У E2: =C2-D2. Побудувати графік залишків.

6.5. Значущість кореляції

$$=r*\text{SQRT}((n-2)/(1-r^2))$$

$$=\text{T.DIST.2T}(\text{ABS}(t);n-2)$$

6.6. 95% CI для нахилу

$$=\text{T.INV.2T}(0.05;n-2), \text{ далі } =b_1-\text{tcrit}*SE_{b_1} \text{ і } =b_1+\text{tcrit}*SE_{b_1}.$$

6.7. Прогноз при $x_0=0.25$

$$=\text{INTERCEPT}(C2:C13;B2:B13)+\text{SLOPE}(C2:C13;B2:B13)*0.25$$

Довірчий і прогнозний інтервали обчислити за формулами розділу 3.15.

6.8. Regression y Analysis ToolPak

Data → **Data Analysis** → **Regression**. Порівняти **Coefficients**, **R Square**, **Standard Error**, **t Stat**, **P-value** з ручним розрахунком.

7. Вимоги до звіту

1. номер роботи, тема, мета і номер варіанта;
2. таблиця пар (x_i, y_i) ;
3. scatter plot;

4. ручні обчислення $\bar{x}, \bar{y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}, r$;
5. перевірка значущості кореляції;
6. обчислення b_0, b_1, R^2, SSE, s_e ;
7. таблиця прогнозів і залишків та графік залишків;
8. 95% СІ для β_1 ;
9. точковий прогноз, довірчий та прогнозний інтервали;
10. результати Excel і їх порівняння з ручними;
11. статистичний висновок;
12. інженерний висновок із зазначенням меж застосування моделі.

8. Приклад підсумкового інженерного висновку

У межах досліджених режимів виявлено сильний прямий статистично значущий зв'язок між подачею та шорсткістю ($r = 0.961, p < 0.001$). Лінійна модель $\hat{R}_a = 1.066 + 7.911x$ описує близько 92.4% вибіркової варіації R_a . Збільшення подачі на 0.01 мм/об пов'язане із середнім збільшенням прогнозованої шорсткості приблизно на 0.079 мкм. При подачі 0.25 мм/об модель прогнозує середню шорсткість близько 3.04 мкм. Модель доцільно використовувати для інтерполяції в межах 0.10–0.32 мм/об; далека екстраполяція без нового експерименту необґрунтована.

9. Контрольні питання

1. Що називають статистичним зв'язком?
2. Чим статистичний зв'язок відрізняється від функціонального?
3. Для чого будують діаграму розсіювання?
4. Що показує коваріація?
5. У яких межах лежить r ?
6. Що означає знак r ?
7. Що означає $|r|$?
8. Чи доводить $r = 0$ відсутність залежності?
9. Які передумови має кореляція Пірсона?
10. Коли доцільно застосувати кореляцію Спірмена?
11. Як викид впливає на r ?
12. Чому кореляція не доводить причинності?
13. Яку гіпотезу перевіряють для ρ ?
14. Що таке проста лінійна регресія?
15. Що означає β_0 ?
16. Що означає β_1 ?
17. У чому полягає метод найменших квадратів?
18. Як обчислюють b_1 ?
19. Як обчислюють b_0 ?
20. Що означає R^2 ?
21. Чому R^2 не є «відсотком точності»?
22. Як пов'язані r і R^2 ?
23. Що таке залишок?
24. Що показує SSE ?
25. Що показує s_e ?

26. Навіщо аналізувати графік залишків?
27. Як перевіряють значущість b_1 ?
28. Що означає 95% СІ для β_1 ?
29. Що таке інтерполяція?
30. Що таке екстраполяція?
31. Чому екстраполяція ризикована?
32. Чим довірчий інтервал середнього відгуку відрізняється від прогнозного?
33. Чому прогнозний інтервал ширший?
34. Які Excel-функції використовують для r, b_1, b_0, R^2 ?
35. Що повертає LINEST?
36. Коли слід розглянути нелінійну модель?
37. Як сформулювати інженерний висновок, якщо збільшення фактора статистично значуще, але погіршує якість?

10. Методичний міст до інтегрального заняття

ПР7 завершує послідовність окремих статистичних методів. На інтегральному занятті студент уже не отримує підказку, який метод застосувати. Він повинен пройти повний workflow: **дані** → **описова статистика** → **візуалізація** → **перевірка передумов** → **порівняння** → **кореляція** → **регресія** → R^2 → **залишки** → **прогноз** → **інженерний висновок**.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

«Від експериментальних даних до інженерного висновку: комплексний статистичний аналіз у Microsoft Excel»

Формат заняття. Це заняття не передбачає 30 індивідуальних варіантів і окремого індивідуального звіту. Вся група разом із викладачем працює з одним навчальним набором реалістичних інженерних даних. Основне завдання — не відтворити окрему формулу, а **правильно побудувати послідовність статистичного аналізу**, узгодити результати різних методів і сформулювати відповідальний інженерний висновок.

1. Мета заняття

- об'єднати методи ПР1–ПР7 в один цілісний workflow аналізу експериментальних даних;
- навчитися починати аналіз із постановки інженерного питання та перевірки структури даних;
- обґрунтовано обирати описові, графічні, порівняльні та регресійні методи;
- розрізняти статистичну та практичну значущість;
- аналізувати залишки й межі придатності моделі перед прогнозуванням;
- формулювати висновок мовою технологічного процесу, а не лише мовою p-value.

2. Очікувані результати навчання

Після заняття студент повинен уміти запропонувати послідовність аналізу нового набору інженерних даних; визначити тип кожної змінної; виявити пропуски, дублікати й підозрілі значення; обчислити та пояснити описові статистики; обрати адекватну візуалізацію; перевірити передумови вибраного критерію; виконати порівняння двох режимів; оцінити кореляцію та побудувати регресійну модель; інтерпретувати R^2 і залишки; виконати інтерполяційний прогноз; сформулювати статистичний та інженерний висновки.

3. Центральний workflow заняття

дані→структура→описова
статистика→візуалізація→передумови→порівняння→кореляція→регресія→ R^2 →залишки→прогноз
→інженерний висновок

Методичний принцип для викладача. На кожному етапі спочатку поставити групі питання: *«Який наступний крок? Навіщо він потрібен? Який метод тут допустимий?»* І лише після обговорення виконувати відповідну операцію в Excel. Це переносить акцент із натискання команд на статистичне мислення.

4. Інженерна ситуація та набір даних

Під час токарної обробки досліджували два технологічні режими:

- **режим А** — базовий;
- **режим В** — удосконалений.

Для кожного з 20 узгоджених експериментальних запусків задавали однакову подачу f для обох режимів і вимірювали шорсткість поверхні R_a . Пари А–В формувалися за однакової подачі та одного експериментального блока, тому для порівняння режимів дані розглядаються як **парні**.

№ блока	Подача f , мм/об	R_a , режим А, мкм	R_a , режим В, мкм	$d=A-B$, мкм
1	0.10	2.11	1.96	0.15
2	0.10	2.37	1.95	0.42
3	0.12	2.58	2.11	0.47
4	0.12	2.44	1.93	0.51
5	0.14	2.44	2.32	0.12
6	0.14	2.67	2.21	0.46
7	0.16	2.62	2.66	-0.04
8	0.16	2.52	2.63	-0.11
9	0.18	3.02	2.50	0.52
10	0.18	2.83	2.52	0.31
11	0.20	3.10	2.81	0.29
12	0.20	3.03	2.69	0.34
13	0.22	3.29	2.98	0.31
14	0.22	3.26	2.72	0.54
15	0.24	3.41	3.04	0.37
16	0.24	3.38	3.10	0.28
17	0.26	3.44	3.13	0.31
18	0.26	3.68	3.15	0.53
19	0.28	3.90	3.39	0.51
20	0.28	3.65	3.43	0.22

Питання до групи до початку обчислень. Які тут змінні? Яка з них фактор, яка — відгук? Яка змінна кількісна, а яка категоріальна? Чому А і В не слід автоматично трактувати як дві незалежні вибірки? Який результат означатиме технологічне покращення?

5. Етап 1. Перевірка структури і якості даних

Перед статистичними обчисленнями необхідно переконатися, що:

- кожен рядок відповідає одному узгодженому експериментальному блоку;
- одиниці вимірювання однакові в усіх рядках;
- немає пропущених значень і дублікатів;
- подача лежить у фізично допустимому діапазоні;
- числа не записані текстом;
- не переплутано стовпці режимів А та В;
- підозрілі значення перевіряються за первинним журналом, а не видаляються автоматично.

Excel. Перетворіть діапазон на таблицю $Ctrl+T$. Для перевірки використайте COUNT, COUNTBLANK, MIN, MAX, сортування та умовне форматування. Додайте стовпець $d=A-B$.

6. Етап 2. Описова статистика

Спочатку описуємо дані, не роблячи висновків про генеральні сукупності.

Показник	Режим А	Режим В
n	20	20
Середнє, мкм	2.987	2.661
Медіана, мкм	3.025	2.675
Стандартне відхилення, мкм	0.506	0.473
Мінімум, мкм	2.11	1.93
Максимум, мкм	3.90	3.43

Середня шорсткість у режимі В нижча на

$$\bar{d} = \bar{R}_A - \bar{R}_B = 0.3255 \text{ мкм.}$$

Але різниці вибірових середніх недостатньо: потрібно оцінити її статистичну невизначеність.

Excel. Для кожного режиму: AVERAGE, MEDIAN, STDEV.S, VAR.S, MIN, MAX, QUARTILE.INC. Не копіюйте лише число — поясніть, що воно характеризує.

7. Етап 3. Візуалізація

Побудуйте щонайменше три графічні подання:

1. **Box & Whisker** для А і В — порівняння центра, розсіювання та потенційних викидів.
2. **Scatter plot** $f-R_a$ для режиму В — форма зв'язку перед обчисленням кореляції.
3. **Scatter plot** залишків e_i проти f_i — діагностика регресійної моделі.

У даних є навмисно неідеальна ситуація: в одному з експериментальних блоків режим В дав гірший результат, ніж А. Це привід перевірити первинні дані та технологічні обставини, але не підстава автоматично видаляти рядок лише тому, що він «псує» очікувану картину.

8. Етап 4. Перевірка передумов

Для порівняння режимів основною змінною є різниця

$$d_i = R_{A,i} - R_{B,i}.$$

Перед парним t-критерієм аналізуємо саме розподіл d_i , а не окремо А і В. Перевірте гістограму/boxplot різниць, можливі грубі викиди та симетричність. За $n = 20$ не слід механічно застосовувати критерій Пірсона з дрібним групуванням: очікувані частоти легко стають надто малими.

Для регресії перевіряємо лінійність scatter plot, відсутність домінуючих викидів, випадкову структуру залишків і приблизно сталий їх розмах.

Запитання групі. Чому перевірка передумов залежить від методу, який ми збираємося застосувати? Чому «перевірити нормальність усіх стовпців» — не універсальний алгоритм?

9. Етап 5. Порівняння двох технологічних режимів

Оскільки дані парні, перевіряємо:

$$H_0: \mu_d = 0, \quad H_1: \mu_d \neq 0.$$
$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

Для даних заняття:

$$\bar{d} = 0.3255, \quad s_d = 0.1857, \quad t = 7.8383, \quad \nu = 19.$$
$$p \approx 2.267e - 07.$$

95% довірчий інтервал для середнього зменшення шорсткості:

$$0.2386 < \mu_d < 0.4124 \text{ мкм.}$$

Стандартизований розмір ефекту для парних даних:

$$d_z = \frac{\bar{d}}{s_d} = 1.753.$$

Проміжний інженерний висновок. За однакових значень подачі режим В у середньому зменшує шорсткість приблизно на **0.326 мкм**. Довірчий інтервал не містить нуля, а статистичний ефект великий. Однак практична цінність такого покращення повинна оцінюватися також відносно технічних вимог до поверхні, вартості режиму та інших технологічних показників.

Excel. Створіть стовпець різниць. Обчисліть AVERAGE, STDEV.S, стандартну похибку та t вручну. Перевірте результат функцією T.TEST(діапазон_A;діапазон_B;2;1), де останній аргумент 1 означає парний тест. Критичне значення: T.INV.2T(0.05;19).

10. Етап 6. Кореляція: чи пов'язана подача з шорсткістю?

Для режиму В досліджуємо зв'язок між подачею f та шорсткістю R_a . Спочатку scatter plot, після нього — Pearson r .

$$r = 0.975091, \quad R^2 = r^2 = 0.950803.$$

Перевірка $H_0: \rho = 0$ дає:

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 18.6515, \quad p \approx 3.203e-13.$$

Між подачею та шорсткістю спостерігається дуже сильний прямий лінійний зв'язок. Це не є самостійним доказом причинності, але в керованому технологічному експерименті результат узгоджується з фізичним змістом процесу різання.

Excel. Використайте CORREL. Значущість r перевірте через t -статистику, а не лише за величиною коефіцієнта.

11. Етап 7. Лінійна регресія

Будуємо модель для режиму В:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_a &= b_0 + b_1 f. \\ \widehat{R}_a &= 1.175182 + 7.822727 f.\end{aligned}$$

Інженерне трактування нахилу: збільшення подачі на 0.01 мм/об у дослідженому діапазоні пов'язане із середнім збільшенням прогнозованої шорсткості приблизно на

$$0.01 \cdot b_1 \approx 0.078 \text{ мкм.}$$

95% довірчий інтервал для генерального коефіцієнта нахилу:

$$6.9416 < \beta_1 < 8.7039.$$

Excel. SLOPE, INTERCEPT, RSQ або Data Analysis → Regression. Порівняйте коефіцієнти з рівнянням лінії тренду на scatter plot.

12. Етап 8. Що насправді означає R^2 ?

$$R^2 = 0.9508 \approx 95.1\%.$$

У межах цієї вибірки лінійна модель з подачею пояснює приблизно 95.1% варіації шорсткості режиму В. Це **не означає**, що модель має «95.1% точності» або що решта варіації обов'язково є лише випадковою похибкою.

13. Етап 9. Аналіз залишків

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Для моделі:

$$SSE = 0.208981, \quad s_e = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = 0.107750 \text{ мкм.}$$

Побудуйте графік залишків проти подачі. Шукайте:

- кривизну — ознаку можливої нелінійності;
- «воронку» — можливу неоднорідність дисперсії;
- окремі дуже великі залишки;
- серії залишків одного знака;
- систематичний тренд.

Рішення про адекватність моделі не приймають лише за R^2 . Навіть велике R^2 не компенсує систематичної структури залишків або фізично беззмістовної моделі.

14. Етап 10. Прогноз

Потрібно оцінити шорсткість режиму В при $f_0 = 0.21$ мм/об. Це **інтерполяція**, оскільки значення лежить усередині дослідженого діапазону 0.10–0.28 мм/об.

$$\hat{y}_0 = 2.8180 \text{ мкм.}$$

95% довірчий інтервал для **середньої** шорсткості за такого режиму:

$$2.7644 < E(R_a | f = 0.21) < 2.8716 \text{ мкм.}$$

95% прогнозний інтервал для **окремої нової деталі**:

$$2.5853 < R_{a,new} < 3.0506 \text{ мкм.}$$

Прогнозний інтервал ширший, бо враховує не лише невизначеність середньої лінії, а й випадкове розсіювання окремої деталі.

Excel. Додайте стовпці $\hat{y}$ і e . Для прогнозу обчисліть INTERCEPT + SLOPE*x0. Довірчий і прогнозний інтервали побудуйте за формулами ПР7; не підміняйте прогноз просто значенням на лінії тренду.

15. Узгодження всіх результатів

Питання	Метод	Результат	Що це означає
Чи відрізняються режими?	Парний t-тест + CI + d_z	$p < 0.001$, CI різниці не містить 0	Режим В у середньому дає нижчу шорсткість.
Чи пов'язана подача з шорсткістю В?	Scatter plot + Pearson r	$r = 0.975$	Сильний прямий лінійний зв'язок.
Чи придатна лінійна модель?	R^2 + залишки	$R^2 = 0.951$; залишки аналізуються графічно	Високе R^2 підтримує модель, але остаточне рішення потребує діагностики залишків.
Що буде при $f=0.21$?	Регресійний прогноз	$\hat{R}_a = 2.818$ мкм	Для середнього та окремої деталі невизначеність різна.

16. Підсумковий інженерний висновок — зразок

У дослідженому діапазоні подач 0.10–0.28 мм/об удосконалений режим В забезпечив меншу середню шорсткість порівняно з базовим режимом А. Середнє зменшення становило близько **0.326 мкм**; 95% довірчий інтервал для середнього ефекту — від **0.239** до **0.412 мкм**. Статистичні дані дають переконливі підстави вважати різницю невипадковою, але технологічну доцільність режиму В слід оцінювати разом із вимогами креслення, продуктивністю та собівартістю.

Для режиму В подача має сильний прямий зв'язок із шорсткістю ($r = 0.975$). У межах дослідженого діапазону отримано модель $\hat{R}_a = 1.175 + 7.823f$ з $R^2 = 0.951$. При $f = 0.21$ мм/об прогнозована середня шорсткість становить приблизно **2.818 мкм**. Модель доцільно використовувати для інтерполяції в дослідженому діапазоні після перевірки залишків; далеку екстраполяцію за межі експерименту без додаткових дослідів виконувати не слід.

17. Типові помилки, які потрібно виявити під час заняття

- починати з p-value, не перевірявши структуру даних;
- ігнорувати парність А–В і застосувати тест для незалежних вибірок;
- видаляти нетиповий рядок лише тому, що він погіршує результат;
- обчислювати Pearson r без scatter plot;
- трактувати кореляцію як автоматичний доказ причинності;
- називати R^2 «точністю моделі»;
- не перевіряти залишки;
- плутати довірчий інтервал середнього з прогнозним інтервалом окремого спостереження;
- екстраполювати регресію далеко за діапазон експерименту;
- формулювати висновок як « H_0 приймається» або « $p=...$ », не пояснюючи інженерного змісту.

18. Орієнтовний сценарій заняття

Етап	Орієнтовний час	Дія групи
Постановка задачі, структура даних	10 хв	Визначити фактор, відгук, парність, одиниці, можливі проблеми.
Описова статистика і візуалізація	15 хв	Створити таблицю, характеристики, boxplot і scatter plot.
Передумови та порівняння А–В	15 хв	Проаналізувати різниці, виконати парний t-тест, CI, розмір ефекту.
Кореляція і регресія	20 хв	Знайти r, рівняння, R^2 , перевірити значущість.
Залишки і прогноз	15 хв	Побудувати залишки, виконати прогноз та інтервали.
Спільний інженерний висновок	10 хв	Узгодити статистичні результати та сформулювати рішення.

19. Питання для підсумкової дискусії

1. Чому статистичний аналіз починається не з вибору функції Excel?
2. Що в цьому наборі є експериментальною одиницею?
3. Чому режими А і В порівнювали парним тестом?
4. Що змінилося б, якби А і В вимірювали на незалежних випадкових вибірках?
5. Чому перед тестом аналізували різниці d_i ?
6. Чи можна видалити нетипову пару лише через її відмінність від інших?
7. Чим статистична значущість відрізняється від технологічної корисності?
8. Що показує d_z ?
9. Чому кореляцію потрібно починати зі scatter plot?
10. Що означає знак r ?
11. Чому $r \approx 0$ не завжди означає відсутність залежності?
12. Чому кореляція сама по собі не доводить причинності?
13. Як інтерпретувати b_1 у цій задачі?
14. Що означає R^2 і чого він не означає?
15. Навіщо аналізувати залишки при великому R^2 ?
16. Який графік залишків свідчив би про нелінійність?
17. Чому прогнозний інтервал ширший за довірчий інтервал середнього?
18. Чому прогноз при $f = 0.21$ є інтерполяцією?
19. Чому прогноз при $f = 0.50$ мм/об був би сумнівним?
20. Які додаткові змінні варто було б вимірювати в реальному технологічному експерименті?
21. Яке інженерне рішення можна прийняти за результатами аналізу, а якого — ще не можна?

20. Завершення практикуму

Підсумок траєкторії ПР1–ПР8. Практикум починався з окремої випадкової події та її ймовірності, далі переходив до випадкової величини, закону розподілу, вибірки, статистичного оцінювання, перевірки гіпотез, порівняння генеральних сукупностей, кореляції та регресії. На інтегральному занятті ці методи перестають бути окремими темами й утворюють єдиний цикл:

інженерне питання → дані → статистична модель → перевірка передумов → обчислення → оцінка невизначеності → діагностика → інтерпретація → інженерне рішення.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шелестовський Б. Г., Габрусєв Г. В., Габрусєва І. Ю. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Тернопіль : СМП «Тайп», 2023. 142 с. URL: <https://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/41009>.
2. Кушлик-Дивульська О. І., Горбачук В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними та економічними спеціальностями. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. 359 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/79914>.
3. Веригіна І. В., Островська О. В., Сугакова О. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 143 «Атомна енергетика». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 273 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/66847>.
4. Тавров Д. Ю., Темнікова О. Л. Теорія ймовірностей. Практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання» спеціальності 113 «Прикладна математика». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 349 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/67491>.
5. Гавриленко О. В., Олійник Ю. О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями F6 «Інформаційні системи та технології», F2 «Інженерія програмного забезпечення». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 246 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/77800>.
6. Радченко К. О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Збірник задач : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Системне програмування та спеціалізовані комп'ютерні системи» спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 119 с.
7. Копич І. М., Сороківський В. М., Кісілевич О. В., Пенцак О. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Львів : Вид-во Львівського торговельно-економічного університету, 2023. 381 с.
8. Солнцев С. О., Черненко О. В., Кофанов О. Є. Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 132 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/80115>.