

УДК 532.546

Б.Сидорчук

Рівненський державний технічний університет

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ В СЕРЕДОВИЩАХ, ЩО ДЕФОРМУЮТЬСЯ

Запропонований досі підхід та вироблений новий ефективний метод розв'язування нелінійних задач процесу фільтрації, що враховують наявність фільтраційних деформацій придренового середовища, поширено на нестационарні випадки.

Умовні позначення:

- r_o, R_o – радіуси відповідно дрени (зволожувача) та її зони впливу;
 $H_o(t)$ – обмежена монотонно спадна функція;
 $h = h(r, t)$ – напір на колі радіуса r у момент часу t ;
 k – коефіцієнт фільтрації;
 I_{kr} – критичне значення градієнта напору $dh(r, t)/dr$;
 r_c – точка розділу області фільтрації на збурену та незбурену зони.

Процес радіальної фільтрації в однорідному ізотропному середовищі вивчали, як правило, на основі розв'язування диференційного рівняння $\partial(k_o br \partial h / \partial r) / r \partial r = \partial h / \partial t$, де коефіцієнт фільтрації k_o вважався незалежним від координати точки масиву фільтрації і часу. Насправді, великі градієнти фільтраційного напору, які виникають навколо дрени, спричиняють виникнення суфозійних явищ, а отже, і зміну коефіцієнта фільтрації, що, в свою чергу, перерозподіляє напори і їх градієнти. У роботах [1-4] запропоновано підхід та вироблено новий ефективний метод розв'язування нелінійних задач процесу стаціонарної фільтрації з урахуванням фільтраційних деформацій придренового середовища. Наведемо приклади нестационарної задачі, розв'язання якої базується на використанні такого підходу та «традиційного».

Процес нестационарної фільтрації до дрени із середовища можна описати, як відомо, наступною модельною задачею (див., напр., [1, 6]):

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) r \frac{\partial h(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t}, \quad h(r, 0) = 0, \right. \\ \left. h(r_o, t) = h_o, \quad h(R_o, t) = H_o(t) \right] \quad (1)$$

Розв'язок даної задачі (відповідно напір, його градієнт та витрата) при $k = k_o$ виглядає:

$$h_o(r, t) = W(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{*n}(t) T_n(t) + T_{ln}(t)) R_n(r), \quad (2)$$

$$I_o = \frac{\partial h_o(r, t)}{\partial r} = \frac{H_o(t) - h_o}{\ln(R_o / r_o)} \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{*n}(t) T_n(t) + T_{ln}(t)) R_n(r), \quad (3)$$

$$q_o = q_o(t) = 2\pi k_o \partial h_o(r_o, t) / \partial r, \quad (4)$$

$$\text{де } \rho_{*n} = \int_{r_o}^{R_o} (h_o - W(r, t)) R_n(r) dr \left(\int_{r_o}^{R_o} r R_n^2(r) dr \right)^{-1};$$

$$W(r,t) = h_0(t) + \frac{H_0(t) - h_0}{\ln(R_0/r_0)} \ln \frac{r}{r_0}; \quad T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}; \quad T_{ln}(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-(t-\tau)\lambda_n^2} d\tau;$$

$$f_n(t) = \frac{2}{R_0 - r_0} \int_{r_0}^{R_0} -\frac{\partial W(r,t)}{\partial t} R_n(r) dr; \quad R_n(r) = c_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r\right) + Y_0\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r\right); \quad n=1,2,\dots;$$

$J_0(z)$, $Y_0(z)$ – відомі бesselіві функції нульового порядку відповідно першого та другого роду; λ_n – власні значення відповідної задачі Штурма-Ліувіля, $n=1,2,\dots$.

Величини λ_n , c_n , $n=1,2,\dots$ знаходимо з відповідних рівнянь

$$J_1\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} R_0\right) Y_0\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r_0\right) + J_0\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r_0\right) Y_1\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} R_0\right); \quad c_n = -Y_0\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r_0\right) J_0^{-1}\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{k_0}} r_0\right).$$

При наявності фільтраційних деформацій придренового середовища, опишемо зміну коефіцієнта фільтрації (див., напр., [1-5]) як

$$k\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) = \begin{cases} k_0 \left(\frac{ar_c}{r} + b \right), & a + b = 1, \text{ при } \frac{\partial h}{\partial r} > I_{kp}, \\ k_0, & \text{при } \frac{\partial h}{\partial r} \leq I_{kp}, \end{cases} \quad (5)$$

Розв'яжемо задачу (1) з використанням (5) наступним чином. Нестационарний процес можна розглядати як сукупність миттєвих стаціонарних процесів, оскільки зміни параметрів фільтрації у часі відбуваються значно повільніше порівняно з їх змінами у просторі.

Побудуємо різницьовий аналог даної задачі, а саме:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \left(\frac{\partial h_i}{\partial r} \right) r \frac{\partial h_i(r)}{\partial r} \right) - \frac{1}{\Delta t} h_i(r) = -\frac{h_{i-1}(r)}{\Delta t}, \\ h_i(r_0) = h_0, \quad h_i(R_0) = H_{oi}, \quad i=1,2,\dots, \end{cases} \quad (6)$$

де $h_i(r) = h(r, t_i)$; $t_i = \Delta t * i$, $i=1,2,\dots$; Δt – крок зміни параметра t ; $H_{oi} = H_0(t_i)$.

На першому кроці ($i=1$, $k(\partial h_i(r)/\partial r) = k_0 = \text{const}$) задачу (1) запишемо так:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} - h_1(x) = 0, \\ h_1(x_0) = h_0, \quad h_1(X_0) = H_{o1}, \end{cases} \quad (7)$$

де $x_0 = r_0 / \sqrt{k_0 \Delta t}$; $X_0 = R_0 / \sqrt{k_0 \Delta t}$; $x = r / \sqrt{k_0 \Delta t}$.

Розв'язок даної задачі (відповідно напір, його градієнт та витрата) отримаємо у вигляді (див., напр., [1], [7])

$$h(x, t_1) = c_1 I_0(x) + \rho_1 K_0(x), \quad x_0 \leq r \leq X_0, \quad (8)$$

$$I_1 = \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} = c_1^* I_1(x) + \rho_1^* K_1(x), \quad x_0 \leq x \leq X_0, \quad (9)$$

$$q_1 = 2\pi k_0 \partial h(x_0) / \partial x, \quad (10)$$

де $\rho_1 = (H_{o1} I_0(x_0) - h_0) / (K_0(X_0) I_0(x_0) - K_0(x_0) I_0(X_0))$; $c_1 = (h_0 - \rho_1 K_0(x_0) I_0^{-1}(x_0))$;

$c_1^* = -c_1$; $\rho_1^* = -\rho_1$; I_0 , K_0 – вироджені функції Бесселя нульового порядку

відповідно першого та другого роду; I_1, K_1 – вироджені функції Бесселя першого порядку відповідно першого та другого роду.

Якщо виконується умова

$$\frac{\partial h_1(r)}{\partial r} < I_{kp} \text{ для } \forall r \in [r_o, R_o], i = 1, \quad (11)$$

то знову розв'язуємо задачу (1) при $k = k_o$, поклавши $i = 2$, а саме

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_2(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} - h_2(x) = -h_1(x), \\ h_2(x_o) = h_o, \quad h_2(X_o) = H_{o2}. \end{cases} \quad (12)$$

У результаті розв'язку задачі (12) для визначення величини напору отримаємо формулу:

$$h(x, t_2) = c_2 I_o(x) + \rho_2 K_o(x) + (x_o k_o \Delta t W(x_o))^{-1} * (K_o(x) P_1(x) - I_o(x) P_2(x)), \quad r_o \leq r \leq R_o, \quad (13)$$

$$\text{де } P_1(x) = \int_{x_o}^x \tilde{r} h(\tilde{r}, t_1) I_o(\tilde{x}) d\tilde{r}; \quad P_2(x) = \int_{x_o}^x \tilde{r} h(\tilde{r}, t_1) K_o(\tilde{x}) d\tilde{r};$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= (H_{o2} I_o(x_o) - h_o I_o(X_o) + I_o(x_o)) (P_2(X_o) * I_o(X_o) - P_1(X_o) * K_o(X_o)) * \\ & (K_o(X_o) I_o(x_o) - K_o(x_o) I_o(X_o))^{-1}; \quad W(x_o) = \frac{x}{x_o} (I_o'(x_o) K_o(x_o) - I_o(x_o) K_o'(x_o)); \\ c_2 &= (h_o - \rho_2 K_o(x_o) I_o^{-1}(x_o)). \end{aligned}$$

Якщо умова (11) при $i = 2$ виконується, то розв'язуватимемо задачу (1) при $k = k_o$, поклавши $i = 3$ і так далі. Коли ж на j -ому кроці матимемо $\partial h_{(j-1)} / \partial r \geq I_{kp}$ для певного проміжку $[r_o, r_{c(j-1)}]$, тоді з рівняння

$\partial h(r_{c(j-1)}, t_{(j-1)}) / \partial r = I_{kp}$ знаходимо початкове наближення точки розділу $r_{c(j-1)}$ області фільтрації на збурену ($[r_o, r_{c(j-1)}]$) та незбурену ($[r_{c(j-1)}, R_o]$) зони. У збуреній зоні коефіцієнт фільтрації збурюємо згідно з (5).

Отже, на j -ому кроці розв'язуємо дві задачі:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_o \left(\frac{a r_{c(j-1)}}{r} + b \right) r \frac{\partial h_{1j}(r)}{\partial r} \right) - \frac{1}{\Delta t} h_{1j}(r) = -\frac{h_{1(j-1)}(r)}{\Delta t}, \\ h_{1j}(r_o) = h_o, \quad r_o \leq r \leq r_{c(j-1)}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_o r \frac{\partial h_{2j}(r)}{\partial r} \right) - \frac{1}{\Delta t} h_{2j}(r) = -\frac{h_{2(j-1)}(r)}{\Delta t}, \\ h_{2j}(r_o) = H_{oj}, \quad r_{c(j-1)} \leq r \leq R_o \end{cases} \quad (15)$$

при умовах спряження у точці $r_{c(j-1)}$

$$h_{1j}(r_{c(j-1)}) = h_{2j}(r_{c(j-1)}) \quad \partial h_{1j}(r_{c(j-1)}) / \partial r = \partial h_{2j}(r_{c(j-1)}) \quad (16)$$

Розв'язок (9)–(11) отримаємо у вигляді

$$\left[\begin{aligned} h_1(r, t_j) &= c_{1j} S_1(r) + \rho_{1j} S_2(r) + (x_0 k_0 \Delta t W_1(r_0))^{-1} (S_2(r) P_{1j}(x) - \\ &\quad - S_1(r) P_{2j}(x)) \quad r_0 \leq r \leq r_c(j-1), \\ h_2(r, t_j) &= c_{2j} I_0(x) + \rho_{2j} K_0(x) + (x_0 k_0 \Delta t W_2(x_0))^{-1} (K_0(x) P_{2j}(x) - \\ &\quad - I_0(x) P_{2j}(x)) \quad r_c(j-1) \leq r \leq R_0, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\text{де } P_{1j}(x) = \int_{x_0}^x \tilde{r} h(\tilde{r}, t_1) I_0(\tilde{x}) d\tilde{r}; \quad P_{2j}(x) = \int_{x_0}^x \tilde{r} h(\tilde{r}, t_1) K_0(\tilde{x}) d\tilde{r};$$

$$\rho_{2j} = A_1 / A_3 + A_2 (A_3 - S_1(r_0)) (S_2'(r_c) S_1(r_0) - S_2(r_0) S_1'(r_c));$$

$$A_1 = h_0 S_1'(r_0) / S_1(r_0) - \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - I_0'(x_c) (H_{0j} - \gamma_1 + \gamma_2) / I_0(x_0);$$

$$A_2 = S_1(r_0) ((H_{0j} - \gamma_1 + \gamma_2) I_0'(x_c) I_0'(x_0) - h_0 S_2(r_c) / S_1'(r_0) + \beta_1 - \beta_2) * \\ (S_2(r_c) S_1(r_0) - S_2(r_0) S_1(r_c));$$

$$A_3 = K_0'(x_c) - K_0(x_0) I_0'(x_c) - K_0(x_c) I_0'(x_0) - I_0(x_c) K_0(x_0) S_1(r_0) / I_0'(x_0) * \\ * (S_2(r_c) S_1(r_0) - S_2(r_0) S_1(r_c));$$

$$\gamma_1 = I_0(x_0) P_{2j}(x_0) / (x_c * W_2(r_c)); \quad \gamma_2 = K_0(x_0) P_{1j}(x_0) / (x_c * W_2(r_c));$$

$$\beta_1 = S_1(r_c) / (x_0 W_1(x_0)) \int_{x_0}^{x_c} \tilde{r} h_1(r, t_{(j-1)}) P_2(\tilde{r}) d\tilde{r}; \quad \beta_2 = S_2(r_c) / (x_0 W_2(x_0)) \int_{x_0}^{x_c} \tilde{r} h_1(r, t_{(j-1)}) P_1(\tilde{r}) d\tilde{r};$$

$$W_1(r) = \frac{r_0}{r} W(r_0) = \frac{r}{r_0} (S_1'(r_0) S_2(r_0) - S_1(r_0) S_2'(r_0));$$

$$W_2(x) = \frac{x}{x_0} W_2(x_0) = (I_0'(x_0) K_0(x_0) - I_0(x_0) K_0'(x_0));$$

$$x_c = r_c / \sqrt{k_0 \Delta t}; \quad \bar{\beta}_1 = S_1(r_c) / S_1'(r_c); \quad \bar{\beta}_2 = S_2(r_c) / S_2'(r_c);$$

$$S(r) = c_{1j} S_1(r) + \rho_{1j} S_2(r) = \sum_{m=0}^{\infty} L_{mj} r^m, \quad m = \overline{2, \infty};$$

$$L_{(m+1)j} = 1 / (a r_c m(m+1)) (\sqrt{k_0 \Delta t} L_{(m-2)j} - b m^2 L_{mj}), \quad m = \overline{2, \infty};$$

$$L_{1j} = c_{1j}, \quad L_{2j} = \rho_{1j}; \quad c_2 = (h_0 - \rho_2 K_0(x_0) I_0^{-1}(x_0)).$$

На $j+1$ -ому кроці з рівняння $\partial h_2(r_c, t_j) = \alpha$ знаходимо наступне наближення r_{cj} точки розділу r_c і так далі. Даний процес збіжний, тому що існує єдина точка розділу $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{cn} = r_c$, яка ділить область фільтрації на збурену і незбурену ділянки.

Граничні (дійсні) значення функцій напору, їх градієнтів та фільтраційної витрати отримаємо відповідно у вигляді

$$\left[\begin{aligned} h_1(r) &= c_1 S_1(r) + \rho_1 S_2(r) + (x_0 k_0 \Delta t W_1(r_0))^{-1} (S_2(r) P_1(x) - S_1(r) P_2(x)), & r_0 \leq r \leq r_c, \\ h_2(r) &= c_2 I_0(x) + \rho_2 K_0(x) + (x_0 k_0 \Delta t W_2(x_0))^{-1} (K_0(x) P_2(x) - I_0(x) P_2(x)), & r_c \leq r \leq R_0, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left[\begin{aligned} I_1 = \frac{dh_1(r)}{dr} &= c_1 S'_1(r) + \rho_1 S'_2(r) + (x_0 k_0 \Delta t W_1(r_0))^{-1} (S'_2(r) P_1(x) + S_2(r) P'_1(x) - S'_1(r) P_2(x) - S_1(r) P'_2(x)) & r_0 \leq r \leq r_c, \\ I_2 = \frac{dh_2(r)}{dr} &= -c_2 I_1(x) - \rho_2 K_1(x) + (x_0 k_0 \Delta t W_2(x_0))^{-1} (-K_1(x) P_2(x) + K_0(x) P'_2(x) + I_1(x) P_2(x) - I_0(x) P'_2(x)) & r_c \leq r \leq R_0, \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$q_a = 2\pi k_0 I_1(r_0). \quad (20)$$

На рис.1 зображені графіки функцій $I = I(r)$ за формулами (3) та (19) (відповідно криві 1, 2) для значень $k_0 = 0,5$ м/добу, $t = 12,0$ год, $r_0 = 0,1$ м, $R_0 = 1,0$ м, $h_0 = 1,0$ м при $\Delta t = 0,1$; $n = 120$. Як бачимо з графіка, градієнти напору, розраховані згідно із запропонованою методикою (формула (19)), на інтервалі $[0,1; 0,32]$ спадають, а на $[0,32; 1,0]$ - зростають.

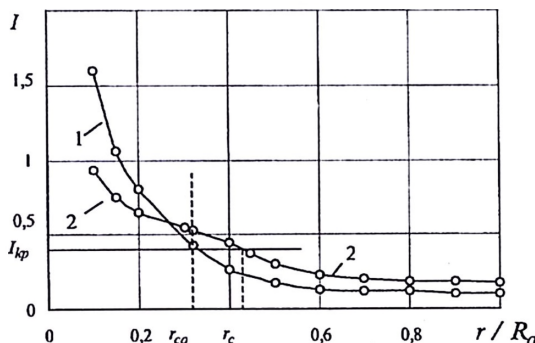


Рис.1. Графіки функцій $I = I(r)$ за формулами (3) та (19) (відповідно криві 1, 2) для значень $k = k_0 = 0,5$ м/добу, $t = 12,0$ год, $r_0 = 0,1$ м, $R_0 = 1,0$ м, $h_0 = 1,0$ м, $\alpha = 0,3$; $I_{kp} = 0,4$.

На рис.2 зображено графіки залежності витрати від часу $q = q(t)$ за формулами (4) та (20) (відповідно криві 1, 2) для значень $k_0 = 0,5$ м/добу, $r_0 = 0,1$ м, $R_0 = 1,0$ м, $h_0 = 1,0$ м, $\alpha = 0,3$ при $\Delta t = 0,1$; $n = 720$. Як бачимо, питома витрата, обчислена з урахуванням фільтраційних деформацій (крива 2), перевищує витрату ($t > 0$), обчислену за формулою (4). Таке зростання витрати можливе за рахунок вимивання суфозійних частинок із придренової зони в порожнину дрена.

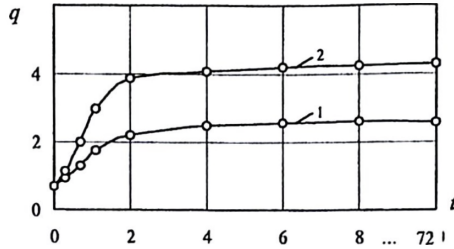


Рис.2. Графіки залежності витрати від часу $q = q(t)$ за формулами (4) та (20) (відповідно криві 1, 2) для значень $k_0 = 0,5$ м/добу, $r_0 = 0,1$ м, $R_0 = 1,0$ м, $h_0 = 1,0$ м, $\alpha = 0,3$

Аналіз показує, що фільтраційні деформації, які виявляються при перевищенні чинними градієнтами їх критичного значення, суттєво впливають на весь процес фільтрації та значною мірою здатні змінювати фільтраційну витрату.

Нами запропоновано ряд інших моделей зміни коефіцієнта фільтрації у збуревій зоні (див. [1]).

The offered earlier approach and developed new effective method of solution of the nonlinear tasks of process of filtering, which take into account presence deformations filtration of deformations of near drainage sphere, is imposed on non-stationary cases.

Література

1. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Про моделювання впливу градієнтів напору на фільтраційні характеристики придреної зони // Київ, 1997. – 25 с. – Деп. в ДНТБ України 23.10.96 р. – № 1997. – Ук 96.
2. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням малих деформацій середовища // Актуальні проблеми водного господарства: 36. наук. статей. – Т. 1. – Рівне, 1997. – С. 11–15.
3. Хлапук М. М., Бомба А. Я. Особливості закону Дарсі при моделюванні процесів фільтрації в середовищах, що деформуються // 36. стат. за матеріалами III наук.-техн. конференції професорсько-викладацького складу, аспірантів та студентів академії 24 березня - 16 квітня 1997 р. Ч. 2. Проблеми гідротехніки та гідроенергетики. – Рівне, 1997. – С. 70–72.
4. Хлапук Н. Н., Дмитрієв А. Ф., Бомба А. Я. Влияние градиентов напора на коэффициент фильтрации грунта придреной зоны // Киев, – 1997. – 14 с. – Деп. в ДНТБ Украины 19.02.97 г., № 163 - Ук 97.
5. Хлапук М. М., Дмитрієв А. Ф., Бомба А. Я. Вплив деформацій ґрунту в навіколодреної зоні на роботу дренажних систем // Водне господарство України. – 1997. – №5. – С. 9–12.
6. Олейник А. Я., Насиковский В. П. Расчет несовершенного дренажа в однородном грунте при неустановившемся режиме фильтрации // Мелиорация и вод. хоз. – во. – 1969. – Вып. 10. – С. 91–102.
7. Олейник А. Я., Поляков В. П. Дренаж переувлажненных земель. – Киев: Наук. думка, 1987. – 279с.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

Статтю подав до друку докт. фіз.-мат. наук, проф. В.С.Дейнека