

УДК 519.218

М.Приймак, канд.техн.наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОСЛІДОВНОСТІ КОВЗНОГО СЕРЕДНЬОГО ПРИ ДІЇ
ПЕРІОДИЧНОГО БІЛОГО ШУМУ

Показано, що коли білий шум, який належить до зображення послідовності ковзного середнього, є періодичним, то при цьому періодичним (за Слуцьким) буде і ковзне середнє.

Розв'язання багатьох задач, пов'язаних з аналітичним дослідженням і статистичним аналізом випадкових сигналів у електротехніці, акустиці, біомедицині та ін., часто стає можливим завдяки вдалому вибору їх моделі. При цьому зростає роль моделей, що враховують механізм утворення відповідних сигналів. Це повністю стосується випадкових послідовностей (часових рядів), що отримуються безпосередньо (коли спостереження за сигналом проводяться в дискретні моменти часу) або в результаті дискретизації сигналів з неперервним аргументом.

Найбільш всебічно вивченими, особливо в рамках спектрально-кореляційної теорії, вважаються стаціонарні послідовності. Відомо, що для стаціонарної послідовності

$$\{\xi_k, k \in Z\} \quad (1)$$

її кореляційна функція $R(\tau) = M \xi_k^0 \xi_{k+\tau}^0$ допускає спектральне зображення

$$R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad (2)$$

де $F(\lambda)$ - спектральна функція, аргумент якої λ у технічній літературі часто інтерпретується як частота.

Важливим при розгляді багатьох питань теоретичного і прикладного характеру є результат, згідно з яким існує така ортогональна стохастична міра $z(\Delta)$, $\Delta \in \mathbb{F}([-\pi, \pi])$, $\mathbb{F}$ – σ -алгебра, що аналогічно зображенню кореляційної функції у вигляді (2) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ P - майже напевно

$$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dz(\lambda), k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

При цьому $M|dz(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$. Зображення (2) і (3) є розклад кореляційної функції і відповідно елементів випадкової послідовності у частотній області.

Спектральне уявлення кореляційної функції (2) і стаціонарної послідовності (3) отримано аналітичними методами, в основі яких лежить відомий факт про можливість зображення у вигляді інтегралу Фур'є-Стілтєсса додатньо визначеної функції. А саме такою є кореляційна функція $R(\tau)$ стаціонарної послідовності (1). Тому зображення (3) тільки постулює факт утворення елементів послідовності $\xi_k, k \in \mathbb{Z}$ як суперпозиції елементарних гармонічних коливань з випадковими амплітудами і фазами, що містяться у випадковій мірі $dz(\lambda)$, хоч це не обов'язково відповідає дійсності. Часто у вигляді стохастичного інтегралу (3) зображають також і випадкові величини нестационарних послідовностей, але при цьому випадкова міра $z(\lambda)$ вже відмінна від ортогональної.

Крім спектрального зображення, у частотній області на практиці також широко використовується зображення випадкових послідовностей у часовій області. При цьому вважається, що випадкова послідовність спостерігається на виході лінійної системи, яку задає імпульсна характеристика. Аналогічний метод зображення у часовій області має місце і для випадкових процесів. Всебічно це питання розглядається у [1], де випадковий процес поданий у вигляді стохастичного інтегралу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \tau) d\eta(\tau). \quad (4)$$

У (4) функція $\varphi(t, \tau)$, що інтерпретується як імпульсна характеристика системи, при кожному фіксованому t інтегрована з квадратом, тобто $\varphi(t, \tau) \in L_2(-\infty, \infty)$, $\eta(\tau)$ -неоднорідний (однорідний) випадковий процес з незалежними приростами, який ще часто називають породжувальним процесом. Важливо, що для лінійного випадкового процесу (4) записана його багатовимірна характеристична функція, що дозволяє вивчати цей процес з використанням моментних функцій порядку $n > 2$.

Широке використання у прикладних дослідженнях має частковий випадок (4), тобто процес

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\tau). \quad (5)$$

Якщо при цьому породжувальний процес $\eta(\tau)$ є однорідним, то лінійний процес (5) буде стаціонарним у вузькому розумінні.

Враховуючи, що в багатьох областях поряд з стаціонарними сигналами досить часто доводиться мати справу з сигналами стохастично періодичними, для яких періодичними є їх певні ймовірнісні характеристики, хоча для самих реалізацій

детермінована періодичність відсутня, у ряді робіт [2-4] розглядається питання врахування цієї періодичності з допомогою лінійного процесу (4) та його часткового випадку (5). Позитивне розв'язання цього питання виявилось можливим, коли із класу процесів з незалежними приростами $\{\eta(\tau): \tau \in (-\infty, \infty)\}$ було виділено [2,4-6] підклас процесів з незалежними періодичними приростами. У цих же роботах показало, що коли для лінійного процесу (5) його породжувальний процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними періодичними приростами, то процес (5) при цьому буде періодичним.

У [5,6] дано означення періодичного білого шуму як узагальненої похідної $\eta'(\tau)$ від процесу з незалежними періодичними приростами, а також впроваджені поняття гаусівського і пуассонівського періодичних білих шумів.

Так, використовуючи поняття періодичного білого шуму, можна стверджувати, що коли на лінійну стаціонарну систему з імпульсною характеристикою $\phi(s)$ діє періодичний білий шум, то на виході цієї системи спостерігатиметься періодичний процес.

Враховуючи цей результат і ґрунтуючись на механізмі утворення сигналів імпульсного характеру, в [2,4] вдалося з допомогою лінійного періодичного процесу обґрунтувати моделі стохастично періодичних сигналів: навантажень енергосистем; дробового ефекту електронних приладів у ненасиченому режимі, коли середній струм зміщується періодично; шумів кавітації в акустиці та ін.

Щодо випадкових послідовностей

$$\{\xi_k, k \in Z\}, \quad (1)$$

то, крім їх подання в частотній області у вигляді (3) також існують методи зображення цих послідовностей і в часовій області. При цьому їх розглядають як послідовності на виході лінійної системи, на вхід якої надходить білий шум. Серед них добре відомі послідовності ковзного середнього

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta_{k-j}, k \in Z, \quad (6)$$

авторегресії

$$\xi_k + b_1 \xi_{k-1} + \dots + b_n \xi_{k-n} = \eta_n, \quad (7)$$

та змішаної послідовності ковзного середнього-авторегресії порядку (p, q) :

$$\xi_n + b_1 \xi_{n-1} + \dots + b_q \xi_{n-q} = a_0 \eta_n + \dots + a_p \eta_{n-p}. \quad (8)$$

У (6) числа a_j такі, що $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$, а послідовність

$$\{\eta_n, n \in Z\},$$

що входить в (6)-(8), є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин, яку переважно називають білим шумом.

Перевагою послідовностей (6)-(8) порівняно із спектральним зображенням (3) є те, що в (6)-(8) відображено механізм утворення цих послідовностей. Однією із задач, яка виникає при використанні послідовностей (6)-(8), є оцінка їх коефіцієнтів, які ще називають параметрами моделей, а саме моделі - параметричними. З точки зору поняття "фільтрації" у часовій області послідовність ковзного середнього (6) є нерекурсивним фільтром, а послідовності (7) і (8) - рекурсивними фільтрами.

Зупинімося детальніше на послідовності ковзного середнього (6) і розглянемо

можливість врахування з її допомогою стохастичної періодичності. Іншими словами, розгляньмо умови, при виконанні яких ця послідовність стає періодичною (у ймовірнісному розумінні), тобто коли періодичними є її певні ймовірнісні характеристики. З цієї метою вважатимемо, що для ковзного середнього

$$\xi_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \eta_{k-j}, k \in Z, \quad (6)$$

білий шум $\{\eta_k, k \in Z\}$, що належить до (6), відмінний від стаціонарного, а власне є періодичним білим шумом. Під цим розуміється, що періодичною є його одновимірна функція розподілу (білий шум як послідовність незалежних випадкових величин повністю задається одновимірною функцією розподілу), тобто

$$F(x, k) = P\{\eta_k < x\} = F(x, k + L). \quad (9)$$

Використовується

Теорема. Якщо для послідовності ковзного середнього

$$\xi_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \eta_{k-j}, k \in Z \quad (6)$$

її білий шум $\{\eta_k, k \in Z\}$ є періодичним з періодом L , то ця послідовність буде періодичною з цим же періодом L , тобто періодичною буде її багатовимірна функція розподілу.

Оскільки доведення теореми порівняно складне, ми проведемо його, обмежившись тільки одновимірною функцією розподілу ковзного середнього (6). При цьому скористаємся відомим фактом, що періодичність функції розподілу випадкової величини еквівалентна періодичності її характеристичної функції.

Спочатку розгляньмо характеристичну функцію випадкової величини η_k періодичного білого шуму $\{\eta_k, k \in Z\}$. З урахуванням періодичності його функції розподілу (9) характеристична функція, очевидно, також є періодичною:

$$f_k(u) = Me^{iu\eta_k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_{k+L}(x) = f_{k+L}(u).$$

Розгляньмо тепер характеристичну функцію ковзного середнього (6). Беручи до уваги, що характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх характеристичних функцій, можемо записати, що

$$\begin{aligned} f_{\xi_k}(u) &= Me^{iu\xi_k} = Me^{iu \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \eta_{k-j}} = \prod_{j=-\infty}^{\infty} Me^{iu a_j \eta_{k-j}} = \prod_{j=-\infty}^{\infty} f_{k-j}(\alpha_j; u) = \\ &= \prod_{j=-\infty}^{\infty} f_{k+L-j}(\alpha_j; u) = f_{\xi_{k+L}}(u), \end{aligned}$$

тобто характеристична функція ковзного середнього (6) є періодичною.

Отриманий у роботі результат про періодичність ковзного середнього можна успішно використати для розв'язування багатьох задач в електротехніці, акустиці, біотехніці, пов'язаних з дослідженням стохастично періодичних дискретних сигналів. Серед них слід виділити проблему обґрунтування моделей вказаних сигналів у вигляді

ковзного середнього (6). Важливими також є задачі оцінки періодичних ймовірнісних характеристик послідовності (6) та оцінки її коефіцієнтів α_j , а на основі цих оцінок - розв'язок задач ідентифікації, розпізнавання. Чекає свого розв'язання і дослідження властивостей ковзного середнього залежно від функції розподілу періодичного білого шуму $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$, випадкові величини якого можуть мати нормальний, пуассонівський, Коші, рівномірний, експоненціальний та інші періодичні розподіли.

It has been shown, that if the white noise, that is included into the image of sliding average, is periodical, then, in this case, the sliding average itself will be periodical (by Sluckiy).

Література

1. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его применения в радиотехнике. - Киев: Наукова думка, 1973.
2. Приймак Н.В. Оценка периода корреляции и ее использование при исследовании стохастически периодических радиотехнических сигналов. Автореф. дис. канд. техн. наук. 05.12.01. - М.: МЭИ, 1987.
3. Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы. Препринт №120. - Львов: Физико-механический институт АН УССР, 1986.-30 с.
4. Баранов Г.Л., Марченко Б.Г., Приймак Н.В. Построение модели и анализ стохастически периодических нагрузок энергосистем // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. Т.37.- №2.- 1991.-С.12-21.
5. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації.-1996.-Вип.10(86). - С.22-27.
6. Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і їх характеристичні функції //Вісник Тернопільського приладобудівного інституту.-1996.-№2.-С.138-141.

Статтю подав до друку докт.фіз.-мат.наук, проф. Драган Я.П.