

УДК 539.3

О.Шкодзінський, канд. техн. наук, В.Пісьціо

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОСОБЛИВОСТІ ПОЛІВ НАПРУЖЕНЬ ТА ДЕФОРМАЦІЙ У
ВЕРШИНІ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО КЛИНА З ВЕКТОРОМ
ПОЛЯРИЗАЦІЇ В ПЛОЩИНІ ПЛАСТИНИ.

У роботі розглядається задача дослідження особливості фізичних полів у вершині п'єзокерамічного клину з вектором поляризації в площині пластины. Приведено методику зведення тривимірної системи рівнянь, що описує задачу, до матричного одновимірного рівняння, яке вирішується чисельним методом Рунге-Кутта. Приведені графіки залежності порядку особливості від кутів між сторонами клина та вектором поляризації.

Умовні позначення:

$C_{11}^E, C_{12}^E, C_{13}^E, C_{33}^E, C_{44}^E, C_{66}^E$ - пружні жорсткості при постійному електростатичному полі;

$e_{31}^b, e_{33}^b, e_{15}^b$ - п'єзомодулі при постійному механічному напруженні в матеріалі;

$\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$ - діелектричні проникливості при постійній деформації;

b_{ij} - тензор механічних напружень;

$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ - складові вектора електростатичного поля;

$\Phi, \Delta \Phi$ - електричний потенціал в матеріалі;

$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ - тензор деформації;

D_i - складові вектора електричного зміщення $\mathbf{D}$;

$\mathbf{U}$ - вектор переміщень;

ω - частота сигналу на електродах п'єзотрансформатора;

ρ - питома маса матеріалу п'єзотрансформатора.

Промисловість має потребу в розробці та серійному виробництві економних, малогабаритних, безбмоточних високовольтних блоків живлення. Одним із шляхів задоволення вказаної потреби є застосування плоских п'єзокерамічних трансформаторів, що мають вектор поляризації в площині пластины. Ефективному використанню такого типу пристроїв перешкоджають труднощі, пов'язані з недостатністю інформації про поведінку фізичних полів, необхідної при розрахунку п'єзоелектричних перетворювачів.

Розглянемо клин з п'єзокераміки, сторони якого утворюють кути α і β з вектором поляризації, що розміщений в площині клина. Введемо прямокутні декартові координати (рис. 1) так, щоб вісь Ox співпадала з вектором поляризації, вісь Oy була перпендикулярна до площини пластини, а площина xOz , ділила пластинку клина товщиною $2h$, на дві рівні частини. Для цього випадку, рівняння, що описують стан п'єзокерамічного середовища, у відповідності з [1] можна записати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}^E \\ 0 & 0 & e_{31}^E \\ 0 & 0 & e_{33}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 2c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{66}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^E & 0 \\ e_{15}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31}^E & e_{31}^E & e_{33}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^E & 0 \\ e_{15}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E, c_{66}^E = \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E)$ - пружні жорсткості; $e_{31}^E, e_{33}^E, e_{15}^E$ - п'єзомодулі; $\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$ - діелектричні проникливості; E_i - складові вектора електростатичного поля; ϵ_{ij} - складові тензора деформацій; D_i - складові вектора електричного зміщення.

При симетрії граничних умов відносно площини xOz задача є симетричною. Розкладаючи напруження в степеневий ряд по y і обмежуючись членами з степенями меншими другого, прийдемо до висновку, що у цьому наближенні b_{11}, b_{33} та b_{13} не залежать, а b_{22}, b_{12}, b_{23} лінійно залежать від y . Завдяки тому, що при плоскому напруженому стані зовнішні грані, паралельні площині xOz , вільні від навантаження можна вважати, що $b_{22}=0, b_{12}=0, b_{23}=0$ по всій товщині пластинки. З врахуванням зроблених допущень, запишемо наступні вирази для ненульових складових тензора напружень:

$$\sigma_{11} = c_{11} \cdot \epsilon_{11} + c_{13} \cdot \epsilon_{13} - e_{31} \cdot E_z \quad (4)$$

$$\sigma_{13} = 2 \cdot c_{44} \cdot \epsilon_{13} - e_{15} \cdot E_x \quad (5)$$

$$\sigma_{33} = c_{13} \cdot \epsilon_{11} + c_{33} \cdot \epsilon_{13} - e_{33} \cdot E_z \quad (6)$$

Компоненти вектора електростатичної індукції набудуть вигляду:

$$D_x = \epsilon_{11} \cdot E_x + 2 \cdot e_{15} \cdot \epsilon_{13}; \quad (7)$$

$$D_y = \epsilon_{22} \cdot E_y; \quad (8)$$

$$D_z = \epsilon_{33} \cdot E_z + 2 \cdot e_{31} \cdot \epsilon_{11} + 2 \cdot e_{33} \cdot \epsilon_{13}; \quad (9)$$

$$\text{де } c_{11} = c_{11}^E - \frac{(c_{12}^E)^2}{c_{11}^E}, \quad c_{13} = c_{13}^E - \frac{(c_{13}^E \cdot c_{12}^E)}{c_{11}^E}, \quad c_{33} = c_{33}^E - \frac{(c_{31}^E)^2}{c_{11}^E}, \quad (10)$$

$$e_{31} = e_{31}^E - \frac{e_{31}^E \cdot c_{12}^E}{c_{11}^E}, \quad e_{33} = e_{33}^E - \frac{e_{31}^E \cdot c_{13}^E}{c_{11}^E}, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{11}^E;$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{11}^E + \frac{(e_{15}^E)^2}{c_{44}^E}, \quad \epsilon_{33} = \epsilon_{33}^E + \frac{(e_{31}^E)^2}{c_{11}^E}.$$

В квазістатичному наближенні (коли швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль рівна нескінченності) вектор напруженості електромагнітного поля представимо у вигляді градієнта скалярної величини $-\Psi$, що в покоординатній формі запишеться:

$$E_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad E_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad E_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Рівняння, що зв'язує компоненти вектора електростатичної індукції $\text{div} \mathbf{D} = 0$, або в покоординатній формі:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Через малу товщину пластинки функція-вектор напруженості електричного поля набуде вигляду:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

З врахуванням (7) і (9) рівняння 12 запишемо у формі:

$$\epsilon_{11} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + 2 \cdot \epsilon_{15} \cdot \frac{\partial E_{13}}{\partial x} + \epsilon_{33} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial z} + 2 \cdot \epsilon_{31} \cdot \frac{\partial E_{11}}{\partial z} + 2 \cdot \epsilon_{33} \cdot \frac{\partial E_{33}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

В свою чергу, рівняння, що описують гармонійний рух з частотою ω плоского пружного середовища представимо у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \rho \omega^2 U_1 = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \rho \omega^2 U_3 = 0. \quad (15)$$

Враховуючи вирази (4), (5), (6) для ненульових компонентів тензора напружень отримаємо рівняння:

$$c_{11} \cdot \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x} + c_{13} \cdot \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial x} + (c_{15} + c_{31}) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} + 2c_{44} \cdot \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial z} + \rho \cdot \omega^2 U_1 = 0; \quad (16)$$

$$2c_{44} \cdot \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x} + c_{33} \cdot \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial z} + c_{13} \cdot \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial z} + c_{15} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + c_{33} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \rho \cdot \omega^2 U_3 = 0. \quad (17)$$

Підставляючи в (13), (16) і (17) вирази для компонентів тензора деформацій отримаємо систему рівнянь:

$$c_{11} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + c_{44} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z} + (c_{15} + c_{31}) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} + \rho \cdot \omega^2 U_1 = 0; \quad (18)$$

$$(c_{13} + c_{44}) \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} + c_{44} \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + c_{33} \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} + c_{15} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + c_{31} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \rho \cdot \omega^2 U_3 = 0; \quad (19)$$

$$- \epsilon_{11} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \epsilon_{33} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + (c_{15} + c_{31}) \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} + c_{15} \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + c_{31} \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

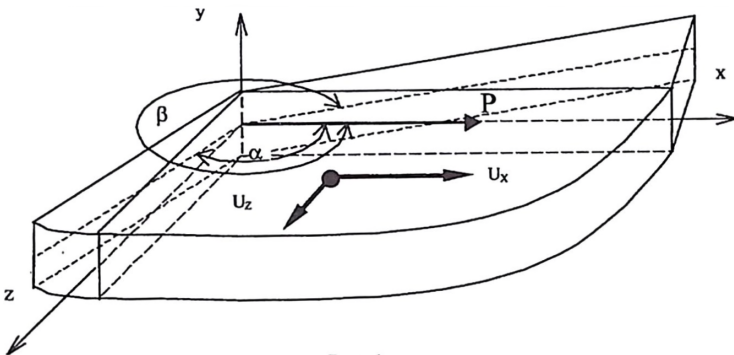


Рис. 1.

Ці рівняння матричній формі можуть бути подані у виді:

$$A \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + B \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x \partial z} + C \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} + \rho \cdot \omega^2 \cdot D \cdot \mathbf{V} = \mathbf{O} \quad (21)$$

де $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Psi \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & c_{15} + c_{31} \\ 0 & c_{15} + c_{31} & -3c_{11} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & c_{44} + c_{13}c_{15} + c_{31} \\ c_{44} + c_{13} & 0 & 0 \\ c_{15} + c_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$C = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & c_{33} \\ 0 & c_{33} & -3c_{33} \end{bmatrix}$$
; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Для зручності розглянемо цю систему рівнянь в полярній системі координат наступним чином: за відомими формулами переходу до полярної системи координат переведемо тільки частинні похідні від величин по координатах x і z в нову систему координат, а проекції вектора переміщень $\mathbf{U}$ будемо розглядати, як ізольовані скалярні величини. Тоді останню систему після відповідних перетворень розглядатимемо у виді:

$$r \cdot A_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + B_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \phi} + r^2 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial r^2} - r \cdot B_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r \partial \phi} + A_1 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \phi^2} + r^2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{V} = \mathbf{O} \quad (25)$$

де $A_1 = A \cdot \sin^2(\phi) - B \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) + C \cdot \cos^2(\phi)$;

$B_1 = 2A \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) - B \cdot (\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi)) + 2C \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi)$;

$C_1 = A \cdot \cos^2(\phi) + B \cdot \sin(\phi) \cdot \cos^2(\phi) + C \cdot \sin^2(\phi)$;

Так як розглядається поведінка розв'язку для п'єзокерамічного середовища при малих відстанях від початку координат r та малих частотах, ми знехтуємо членом з $r^2 \rho \omega^2 \mathbf{V}$. Перейшовши до статичної деформації навколо точки $r=0$ отримаємо розв'язок задачі динаміки.

Тоді будемо шукати розв'язок відповідної задачі статичної у виді $\mathbf{V}(r, \phi) = \sum_n r^n \mathbf{U}_n(\phi)$, (де $\mathbf{U}_n(\phi)$ – власна функція задачі), та отримаємо наступне матричне рівняння:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}_n}{d\phi^2} = (n-1) \cdot A_1^{-1}(\phi) B_1(\phi) \cdot \frac{d\mathbf{U}_n}{d\phi} + (n \cdot E + A_1^{-1}(\phi) \cdot C_1(\phi) \cdot n \cdot (n-1)) \cdot \mathbf{U}_n$$

Розглянемо випадок, при якому потенціал та проекції вектора переміщення скінченні при $r=0$, що відповідає фізичному змісту задачі, звідки при умові обмеженості енергії фізичних полів в клині випливає, що $0 \leq n \leq 1$.

У випадку жорсткого закріплення та короткозамкнутих електродів на бокових сторонах п'єзокерамічного клина граничні умови можна сформулювати наступним чином:

$$\text{при } \phi = \alpha \quad \mathbf{U}(r, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{при } \phi = \beta \quad \mathbf{U}(r, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для визначення ненульових значень власних чисел n та власних функцій замість невідомих значень похідних по ϕ від $\mathbf{V}(r, \phi)$ в початкових умовах скористаємось наступними системами початкових умов:

$$\left. \frac{d \mathbf{U}_n}{d\phi} \right|_{\phi=\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left. \frac{d \mathbf{U}_n}{d\phi} \right|_{\phi=\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left. \frac{d \mathbf{U}_n}{d\phi} \right|_{\phi=\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тоді розв'язок, що відповідає граничним умовам, при врахуванні лінійності рівнянь, можна побудувати у вигляді $\mathbf{U}_n(\phi) = A \cdot \mathbf{U}_n^1(\phi) + B \cdot \mathbf{U}_n^2(\phi) + C \cdot \mathbf{U}_n^3(\phi)$, де A, B, C – деякі числа.

Якщо, при деякому n будуть існувати різні значення A, B, C , то це означає, що n – власне число і, відповідно, $\mathbf{U}_n(\phi)$ – власна функція задачі.

Можна легко показати, що для визначення власних чисел потрібно побудувати

$$\text{дeterminant } D_n(\phi) = \begin{vmatrix} U_n^1(\phi) & U_n^2(\phi) & U_n^3(\phi) \\ U_n^1(\phi) & U_n^2(\phi) & U_n^3(\phi) \\ U_n^1(\phi) & U_n^2(\phi) & U_n^3(\phi) \end{vmatrix}$$

де $U_n^i(\phi)$ - i -тий елемент функції $U_n(\phi)$, що відповідає i -тій початковій умові. З іншого боку побудова зворотної функції $\beta(\alpha, n)$ є простішою, ніж пряма задача, тому для визначення власного числа n в залежності від кутів α і β , можна побудувати систему розв'язків для наперед заданого числа n і відповідної системи початкових умов та знайти таке значення $\phi = \beta$, при якому функція $D_n(\phi) = 0$.

Для побудови системи розв'язків $U_n^i(\phi)$ використаємо метод Рунге-Кутта з

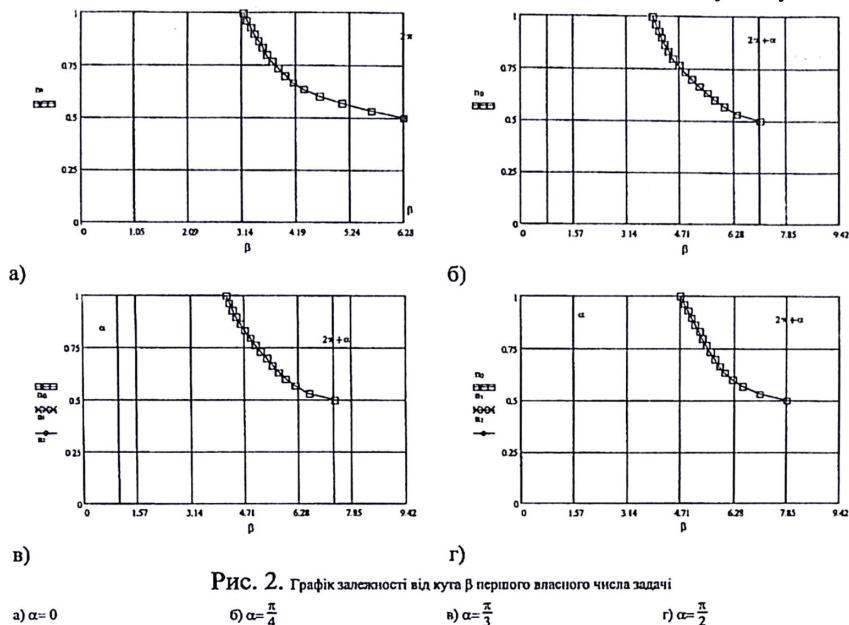


Рис. 2. Графік залежності від кута β першого власного числа задачі

постійним кроком для визначеного значення кута α , на основі, яких ми будемо графік функції $D_n(\phi)$ і знаходимо значення кута $\phi=\beta$, при якому $D_n(\phi)=0$.

На основі наведеного алгоритму створена обчислювальна програма для визначення функції $\beta(\alpha, n)$ при будь-яких значеннях α і n . В результаті роботи програми для п'єзокераміки PZT-4 з параметрами [1]: $\varepsilon_{11}=6.45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м ; $\varepsilon_{33}=5.62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м ; $c_{11}=13.9 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_{12}=7.785 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_{13}=7.43 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_{33}=11.5 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_{44}=2.569 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $e_{31}=-5.2$ Н/Кл ; $e_{33}=15.1$ Н/Кл ; $e_{15}=12.7$ Н/Кл; були побудовані графіки залежностей, власних чисел n_i від кутів α, β (рис.2). З цих графіків видно, що при зміні кута розходження клину від 0 до 180°, як і можна було очікувати, власні числа на проміжку $0 \leq n \leq 1$ відсутні, як і в ізотропному матеріалі без п'єзоефекту. Тобто напруження не можуть прямувати до нескінченності при кінцевих переміщеннях. При більшому куті розходження клину (від 180° до 360°) закон зміни власних чисел, відхиляється від відповідної залежності для умови відсутності п'єзоефекту. При цьому мінімальне значення кута $\beta=\alpha$, коли напруження скінчені, залишається рівним у розглянутому випадку 180°.

In the article the task methodical of researching a singularity of strains fields in top piezoceramical of a wedge with a polarization vector in a plane of a slice is given.

Література.

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел., - М.: Наука . Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.- 472с.
2. Хан Х. Теория упругости: основы линейной теории и ее применения: Пер. с нем.- М.: Мир, 1988 344с.

Статтю подав до друку докт. техн. наук, проф. П.В.Ясній