

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Кручинін Дмитро Сергійович

УДК 517.958:532.72

ДИСЕРТАЦІЯ

**ОПТИМАЛЬНЕ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЗАРЯДЖЕНИХ
ЧАСТИНОК В ЛІНІЙНИХ ПРИСКОРЮЮЧИХ СИСТЕМАХ
З ТРУБКАМИ ДРЕЙФА В ФОРМІ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРІВ**

01.05.02 — *математичне моделювання та обчислювальні методи*
(технічні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 /Д.С. Кручинін/

Науковий керівник: Гаращенко Федір Георгійович, докт. техн. наук, професор

Київ 2026

АНОТАЦІЯ

Кручинін Д.С. Оптимальне фокусування пучка заряджених частинок в лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфа в формі еліптичних циліндрів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 — «Математичне моделювання та обчислювальні методи» (з технічних наук). — Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, 2026.

Дисертаційну роботу присвячено розробці математичних моделей, методів та алгоритмів оптимального фокусування пучка заряджених частинок у лінійних прискорювальних системах із трубками дрейфа еліптичного перерізу. У роботі досліджено процеси динаміки, транспортування та фокусування заряджених частинок в електрофізичних системах, а також розроблено підходи до математичного моделювання руху електронів у фрактальних середовищах. Основний зміст дисертаційної роботи складається з чотирьох розділів.

У вступі подано загальну характеристику роботи, обґрунтовано актуальність теми та необхідність проведення досліджень, сформульовано мету роботи та задачі дослідження та практичне значення отриманих результатів.

У розділі 1 «Математичне моделювання систем частинок з внутрішньою структурою зв'язків і варіаційні принципи механіки» розглядаються фрактальні моделі внутрішніх зв'язків складних систем та енергія зв'язку фрактальних кластерів зі скейлінгом.

У даному розділі досліджуються математичні моделі складних систем частинок, у яких визначальну роль відіграє внутрішня структура зв'язків (контактних, пружних, хімічних або ефективних) та її ієрархічна організація. Для широкого класу реальних агрегатів, кластерів і мережевих матеріалів така структура демонструє масштабну самоподібність, що природно описується фрактальними характеристиками. З огляду на це, класичні евклідові підходи до

опису енергії, кінетики та термодинаміки є неповними, а адекватне моделювання вимагає поєднання мережевих (графових), скейлінгових та варіаційних методів.

У розділі 2 «Математичне моделювання еволюції, варіації структури зв'язків систем частинок та їх варіаційні принципи» розглянуто моделі варіацій зв'язків у системі частинок та модифікація варіаційного принципу для систем із змінними зв'язками. Метою цього розділу є побудова математичних моделей для систем частинок зі змінною структурою зв'язків, формулювання узагальнених варіаційних принципів для таких систем і виведення рівнянь еволюції, придатних для подальшої чисельної реалізації.

У другому розділі була отримана математична модель з урахуванням варіації фрактальної структури зв'язків, яку можна записати у вигляді мінімізації модифікованої функції примусу, яка враховує структуру системи.

У розділі 3 «Моделювання динаміки та еволюції систем заряджених частинок у прискорювальних системах з фіксованими і віртуальними електродами» наведено аналогію електрофізичних та механічних систем на основі модифікованого варіаційного принципу. Отримано та проаналізовано математичні моделі для електрофізичних систем з внутрішньою фрактальною структурою.

У цьому розділі розглянуто математичні моделі, що описують рух, колективну взаємодію та еволюцію систем заряджених частинок (електронних і іонних пучків, плазмових згустків) у прискорювальних та електрофізичних пристроях, де електродна структура може бути як геометрично заданою (фіксовані електроди), так і такою, що формується самою динамікою.

У третьому розділі проаналізовано математичну модель системи з Джозефсонівським контактом між фрактальними середовищами. Вперше отримані рівняння для транспорту електронів у фрактальному ефекті Джозефсона. Проведено регуляризацію рівнянь динаміки заряджених частинок у фрактальному середовищі за допомогою операторів Джексона та розроблена математична модель узагальнення закону Ома. Вивчена математична модель, яка описує динаміку заряджених частинок у постійному магнітному полі.

У розділі 4 «Комп'ютерне моделювання прискорення і фокусування в прискорювальних системах з фіксованими і віртуальними електродами і трубками дрейфу» розглянуті задачі розв'язування нестійких траєкторій частинок у прискорювачі, використання методів практичної стійкості на основі другого методу Ляпунова, функції Ляпунова та нелінійних чисельних алгоритмів дозволяє стійко проводити надійний чисельний аналіз траєкторій заряджених частинок у прискорювачі.

В даній роботі алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та структурно-параметричної оптимізації застосовуються для дослідження рівнянь руху пучків заряджених частинок з різною формою задання прискорюючих та фокусуючих полів.

Одним з перших центрів прискорювальної техніки в Україні став Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» (ННЦ ХФТІ), заснований у 1928 р. Саме тут почали розробляти та створювати лінійні резонансні прискорювачі електронів з середини ХХ ст. і до 1991 р. А. Вальтер, Г. Латишев, О. Лейпунський, К. Сінельников — молоді вчені УФТІ, які у 1932 р. здійснили одне з перших керованих прискорювальних експериментів.

У роботі враховано підходи до математичного моделювання та чисельного аналізу, розвинуті у працях Ф.Г. Гаращенко, А.Я. Бомби, М.Р. Петрика, О.Ю. Чернухи у галузі математичного моделювання складних систем.

У цьому розділі подано методологію та практичні алгоритми комп'ютерного моделювання процесів прискорення, фазового захоплення та фокусування заряджених частинок у прискорювальних структурах з фіксованими електродами. У цьому розділі представлена теорія алгоритмів чисельного розрахунку областей стійкості та дослідження рівнянь руху пучків заряджених частинок з різною формою задання прискорюючих та фокусуючих полів. Досліджено математичну модель, яка відповідає реальним процесам в різних прискорюючо-фокусуючих системах.

Ключові слова: математичне моделювання, лінійний прискорювач, фрактальна структура, квантові процеси, диференціальне рівняння, чисельний метод.

ABSTRACT

Kruchynin D.S. Optimal focusing of a beam of charged particles in linear accelerating systems with drift tubes in the form of elliptical cylinders. — Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 — “Mathematical modeling and computational methods” (in technical sciences). — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Complex Systems Modeling, Faculty of Computer Sciences and Cybernetics, Kyiv, 2026.

The topic of the dissertation work of Kruchinin D.S. is devoted to the construction of mathematical models in acceleration and focusing systems and modeling of electron motion in fractal structures. The purpose of this dissertation is modeling of particle motion in electrophysical installations. The topic of the dissertation is relevant and practically important. The dissertation has scientific novelty and practical value and is of great importance for the development of the science of modeling electron motion in electrophysical installations.

The main content of the dissertation consists of four sections.

The introduction provides a general description of the work, justifies the relevance of the topic and the need for research, formulates the purpose of the work and research tasks and the practical significance of the results obtained.

In section 1 “Mathematical modeling of particle systems with an internal structure of bonds and variational principles of mechanics” fractal models of internal bonds of complex systems and the binding energy of fractal clusters with scaling are considered.

This section considers mathematical models of complex particle systems in which the internal structure of bonds (contact, elastic, chemical or effective) and its hierarchical organization play a decisive role. For a wide class of real aggregates, clusters and network materials, such a structure demonstrates large-scale self-similarity, which is naturally described by fractal characteristics. In the first section, the following results were obtained. Mathematical models describing the evolution of mechanical and

electrophysical systems are defined, taking into account the analogies between mechanical and electrophysical systems. Model equations for fractal dimension are obtained.

In section 2 "Mathematical modeling of evolution, variations of the structure of bonds of particle systems and their variational principles" models of variations of bonds in a particle system and modification of the variational principle for systems with variable bonds are considered. The purpose of this section is to build mathematical models for particle systems with variable bond structure, formulate generalized variational principles for such systems and derive evolution equations suitable for further numerical implementation.

In the second section, a mathematical model was obtained taking into account the variation of the fractal structure of bonds, which can be written as a minimization of a modified forcing function that takes into account the structure of the system.

In section 3, "Modeling the dynamics and evolution of charged particle systems in accelerator systems with fixed and virtual electrodes," an analogy of electrophysical and mechanical systems based on the modified variational principle is presented. Mathematical models for electrophysical systems with an internal fractal structure are obtained and analyzed.

This section considers mathematical models that describe the motion, collective interaction, and evolution of charged particle systems (electron and ion beams, plasma clumps) in accelerator and electrophysical devices, where the electrode structure can be either geometrically given (fixed electrodes) or formed by the dynamics itself.

In the third section, a mathematical model of a system with a Josephson contact between fractal media is analyzed. Equations for electron transport in the fractal Josephson effect are obtained for the first time. The equations of dynamics of charged particles in a fractal environment are regularized using Jackson operators and a mathematical model of generalization of Ohm's law is developed.

A mathematical model describing the dynamics of charged particles in a constant magnetic field is introduced.

In section 4 “Computer simulation of acceleration and focusing in accelerator systems with fixed and virtual electrodes and drift tubes” the problems of solving unstable particle trajectories in the accelerator are considered, the use of practical stability methods based on the second Lyapunov method, the Lyapunov function and nonlinear numerical algorithms allows for a stable and reliable numerical analysis of charged particle trajectories in the accelerator.

In this work, algorithms for numerical calculation of stability regions and structural-parametric optimization are used to study the equations of motion of charged particle beams with different forms of specifying accelerating and focusing fields.

One of the first centers of accelerator technology in Ukraine was the National Scientific Center “Kharkiv Physics and Technology Institute” (NSC KPTI), founded in 1928. It was here that linear resonant electron accelerators began to be developed and created from the middle of the 20th century. and until 1991. A. Walter, G. Latyshev, O. Leipunsky, K. Sinelnikov - young scientists of UFTI, who in 1932 carried out one of the first controlled accelerator experiments.

The thesis has developed approaches to mathematical modeling and numerical analysis, developed by F.G. Garashchenka, A.Ya. Bombi, M.R. Petrika, O.Yu. Chernukhy at the mathematical modeling of folding systems.

This section presents the methodology and practical algorithms for computer simulation of the processes of acceleration, phase capture and focusing of charged particles in accelerator structures with fixed electrodes. This section presents the theory of algorithms for numerical calculation of stability regions and the study of equations of motion of charged particle beams with different forms of specifying accelerating and focusing fields. A mathematical model that corresponds to real processes in various accelerating-focusing systems has been investigated.

Key words: mathematical modeling, linear accelerator, fractal structure, quantum processes, differential equation, numerical method.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Оцінки областей практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями і їх використання // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2011. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 123-130.

2. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Про чисельні дослідження динаміки пучка в електрофізичних установках // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2014. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 81-87.

3. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С., Новіков В.Е. До чисельного моделювання параметричних електрофізичних пристроїв // Вісник Національного університету водного господарства та інженерії природокористування. — 2024. — Вип. 4. — С. 71-83.

Статті в іноземних виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз даних

4. Kruchinin S.P., Klepikov V.F., Novikov V.E., Kruchinin D.S. Nonlinear current oscillations in the fractal Josephson junction // Materials Science. — 2005. — Vol. 23, No 4. — P. 1009-1013. (Scopus Q4)

5. Garaschenko F., Kruchinin D., Novikov V. Quantum analysis of oscillatory processes in fractal media // Int. J. Mod. Phys. B. — 2008. — Vol. 22. — P. 3923-3929. (Scopus Q3)

6. Klepikov V., Kruchinin D., Novikov V. Dynamics of charged particles in fractal media // Modern Physics Letters B. — 2020. — Vol. 34, No. 19-20. — P. 2040066. doi: 10.1142/S0217984920400667. (Scopus Q4)

7. Yatsenko V., Kruchinin D., Vlahovic B., Morozova I., Kruchinin S. Superconducting gravimeters based on advanced nanomaterials and quantum neural network // Advanced Nanomaterials for Detection of CBRN, NATO Science for Peace

and Security Series A: Chemistry and Biology / J. Bonca, S. Kruchinin (eds.). 2020. — Springer Nature B. V. — P. 227-234. https://doi.org/10.1007/978-94-024-2030-2_15.

8. *Kruchinin S.P., Eglitis R.I., Kruchinin D.S., Krak I.V., Babak V.P., Novikov V.E., Polishchuk A.P.* Modeling of mechanical and electrical systems with fractal structure under impulse action and coherent acceleration // *Symmetry*. — 2024.— Vol. 16, No. 12. — P. 1700. <https://doi.org/10.3390/sym16121700>. (Scopus Q1)

Тези доповідей на конференціях

9. *Кручинін Д.С.* Моделювання руху частинок в електрофізичних установках. Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІРТКК-2024) / Сімнадцята міжнародна науково-практична конференція. 21-22 травня 2024 р. Київ, Україна. Збірка тез. — С. 378-379.

10. *Кручинін Д.С.* Моделювання руху електронів в фрактальних структурах. Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІРТК-2024) / Сімнадцята міжнародна науково-практична конференція. 21-22 травня 2024 р. Київ, Україна. Збірка тез. — С. 380-381.

11. *Kruchinin D.* Quantum analysis of oscillatory processes in fractal media / *Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Science: Development and Factors its Influence»* (August 6-8, 2024). Amsterdam, Netherlands, No 211. — Pp. 36-40.

12. *Kruchinin D., Krak Yu.* Fractal Josephson junction / *Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Science and Education in Progress»*. (August 16-18, 2024). Dublin, Ireland. —Pp. 35-40.

ЗМІСТ

Вступ	13
Розділ 1. Математичне моделювання систем частинок з внутрішньою структурою зв'язків і варіаційні принципи механіки	21
1.1 Лінійна прискорююча система з трубками дрейфа	21
1.2 Фрактальна модель внутрішніх зв'язків у складних системах частинок	22
1.3 Скейлінг та енергія зв'язку фрактальних кластерів	31
1.4 Інерційність та кінетика процесів еволюції в неінерційній системі координат при когерентному прискоренні складних систем частинок	37
1.5 Термодинаміка та когерентно корельовані стани складних ієрархічних систем частинок	40
1.6 Варіаційні принципи динаміки систем частинок	57
1.7 Формалізація фізичних явищ у вигляді математичних моделей та методи їх ідентифікації для вирішення інженерних задач	61
1.8 Висновки до розділу 1	67
Розділ 2. Математичне моделювання еволюції, варіації структури зв'язків систем частинок та їх варіаційні принципи	68
2.1 Моделі варіації зв'язків у системі частинок	68
2.2 Варіації зв'язків у системі частинок та модифікація варіаційного принципу для систем із змінними зв'язками	70
2.3 Рівняння еволюції для систем зі зв'язками, що змінюються	84
2.4 Адаптація еволюційних моделей для чисельного розв'язання та використання варіаційних принципів як інструменту мінімізації обчислювальних витрат	93
2.5 Висновки до розділу 2	96

Розділ 3. Моделювання динаміки та еволюції систем заряджених частинок у прискорювальних системах з фіксованими і віртуальними електродами	97
3.1 Електромеханічні аналогії та моделі динаміки електрофізичних систем	97
3.2 Моделі керування та оптимізації коливальних систем заряджених частинок, змінні, що спостерігаються та неспостерігаються	105
3.3 Моделі електрофізичних систем на основі рівнянь пружного середовища	107
3.4 Регуляризація нестійких процесів і рівняння Кірхгоффа для електротехнічних ланцюгів зі зв'язками, що змінюються, та їх основні властивості	122
3.5 Когерентність, пам'ять та динаміка заряджених частинок при моделюванні контактів Джозефсона	130
3.6 Пам'ять, динаміка заряджених частинок у фрактальних середовищах та фрактальний закон Ома	136
3.7 Динаміка заряджених частинок у постійному магнітному полі	148
3.8 Варіаційний принцип під час моделювання електрофізичних систем	154
3.9 Обчислювальні методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь з дробовими похідними та оцінка їхньої алгоритмічної ефективності	156
3.10 Висновки до розділу 3	159
Розділ 4. Комп'ютерне моделювання проискорення і фокусування в прискорювальних системах з фіксованими і віртуальними електродами і трубками дрейфа	160
4.1 Рівняння руху та постановка задачі	160
4.2 Оптимізація повздовжнього руху частинок у лінійних прискорювачах	170
4.3 Вибір початкового керування для оптимізації повздовжнього руху	172

4.4	Дослідження задач практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями	174
4.5	Критерії практичної стійкості	178
4.6	Моделювання динаміки пучка	181
4.7	Алгоритмічна організація розроблених методів та архітектура програмного комплексу для моделювання прискорювальних систем	187
4.8	Висновки до розділу 4	189
	Висновки	191
	Список використаних джерел	193
	Додаток А	199
	Додаток Б	202
	Акти впроваджень	203

ВСТУП

Актуальність теми. Інтенсивний розвиток сучасних прискорювальних технологій зумовлює необхідність підвищення ефективності керування пучками заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах. Особливої ваги набуває задача забезпечення оптимального фокусування пучка, оскільки саме від нього залежать стабільність динаміки частинок, мінімізація втрат та досягнення заданих параметрів пучка. Традиційні конструкції трубок дрейфу, як правило, мають осесиметричну (циліндричну) геометрію, що обмежує можливості керування просторово-часовими параметрами пучка. У зв'язку з цим зростає інтерес до альтернативних геометричних конфігурацій, зокрема трубок дрейфу у формі еліптичних циліндрів, які дозволяють створювати анізотропні електромагнітні поля та забезпечувати більш гнучке керування процесами фокусування.

Актуальність дисертаційного дослідження зумовлена необхідністю розвитку методів математичного моделювання та чисельного аналізу процесів фокусування пучків заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах із неосесиметричною геометрією. Особливого значення набуває розробка математичних моделей, що дозволяють адекватно описувати динаміку пучка в електромагнітних полях, сформованих трубками дрейфу еліптичної форми, а також створення ефективних алгоритмів чисельної реалізації таких моделей.

У дисертаційній роботі алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та структурно-параметричної оптимізації застосовуються для дослідження рівнянь руху пучків заряджених частинок з різною формою задання прискорюючих та фокусуєчих полів.

Одним з перших центрів прискорювальної техніки в Україні став Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» (ННЦ ХФТІ), заснований у 1928 р. Саме тут почали розробляти та створювати лінійні резонансні прискорювачі електронів з середини XX ст. і до 1991 р. А. Вальтер,

Г. Латишев, О. Лейпунський, К. Сінельников — молоді вчені УФТІ, які у 1932 р. здійснили одне з перших керованих прискорювальних експериментів.

Одним із сучасних наукових методів дослідження прискорюючих та фокуруючих систем, фрактальних матеріалів є математичне моделювання, основи якого закладені в роботах Ф.Г. Гаращенко, А.Я. Бомби, М.Р. Петрика, О.Ю. Чернухи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана на кафедрі моделювання складних систем у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка в рамках фундаментальних досліджень України.

Основні положення та результати роботи є складовою частиною закінчених НДР.

Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі моделювання складних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках держбюджетних тем: «Розробка структурованих математичних та програмних технологій для моделювання, аналізу, оцінки та оптимізації складних систем» (б/т №01БФ015-05, номер державної реєстрації № 0101U000968), «Розвиток теорії та створення програмно-алгоритмічних засобів для моделювання, аналізу, оцінки та оптимізації складних систем в умовах невизначеності» (б/т №11БФ015-01, номер державної реєстрації № 0111U004651) та «Створення інформаційно-аналітичних технологій моделювання та оптимізації структурно заданих систем» (б/т №16БФ015-01, номер державної реєстрації № 0116U004775).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка математичних моделей, методів та алгоритмів оптимального фокусування пучка заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфу у формі еліптичних циліндрів, а також підвищення ефективності транспортування пучка за рахунок мінімізації втрат енергії та покращення його просторово-енергетичних характеристик.

Основними завданнями дисертації є:

1. Розробити та обґрунтувати підхід до математичного моделювання заряджених частинок як складних динамічних систем із внутрішньою структурою зв'язків.
2. Розвинути підхід до математичного моделювання заряджених частинок як системи зі змінною структурою внутрішніх зв'язків та дослідити вплив еволюції структури на динаміку системи.
3. Побудувати математичні моделі руху електронів у фрактальних структурах.
4. Дослідити коливальні процеси у фрактальних середовищах із використанням методів математичного та комп'ютерного моделювання.
5. Розробити математичні та комп'ютерні моделі руху електронів у системах прискорення та фокусування.
6. Дослідити критерії практичної стійкості лінійних систем та методи оцінювання областей стійкості; математичного та комп'ютерного моделювання.
7. Розробити нетрадиційні математичні моделі технічних об'єктів, що формалізують складні фізичні явища для вирішення інженерних задач проектування прискорювальних систем.
8. Модифікувати обчислювальні методи для ефективного чисельного розв'язання побудованих моделей.
9. Розробити алгоритмічну організацію комп'ютерного моделювання процесів фокусування для автоматизації розрахунків областей стійкості.
10. Здійснити верифікацію розроблених комп'ютерних моделей та алгоритмів для формування конкретних інженерних рекомендацій щодо конструювання технічних об'єктів.

Об'єкт дослідження — процес фокусування та транспортування пучка заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфу нециліндричної (еліптичної) форми, що розглядається як процес математичного та комп'ютерного моделювання реальних технічних об'єктів.

Предмет дослідження — математичні моделі та чисельні методи аналізу процесів фокусування і динаміки пучка заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах з еліптичними трубками дрейфу.

Методи дослідження — у дисертаційній роботі використано методи математичного моделювання, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії стійкості за Ляпуновим, варіаційних принципів механіки та чисельного аналізу. Для моделювання динаміки заряджених частинок застосовано рівняння класичної електродинаміки та рівняння руху Лоренца. Чисельне інтегрування систем диференціальних рівнянь виконано методом Рунге—Кутти третього порядку. Для аналізу процесів фокусування та оцінювання областей стійкості використано методи комп'ютерного моделювання та чисельного експерименту.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

1. Вперше розроблено математичну модель фокусування пучка заряджених частинок у лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфу у формі еліптичних циліндрів, яка, на відміну від існуючих моделей, враховує анізотропію електромагнітного поля, зумовлену нециліндричною геометрією каналу. Це дозволило підвищити точність опису процесів фокусування та транспортування пучка.

2. Вперше досліджено вплив еліптичності поперечного перерізу трубок дрейфу на стійкість руху та параметри фокусування пучка заряджених частинок, що дало можливість визначити умови підвищення ефективності транспортування частинок у прискорювальному каналі.

3. Удосконалено математичні моделі чисельного аналізу динаміки заряджених частинок у прискорюючо-фокусуючих системах за рахунок застосування методів практичної стійкості та функцій Ляпунова, що забезпечило підвищення надійності чисельного моделювання нестійких траєкторій.

4. Вперше отримано математичну модель транспорту електронів у фрактальному ефекті Джозефсона, яка враховує нелінійні властивості середовища та ефекти пам'яті у фрактальних структурах.

5. Вперше побудовано математичну модель узагальненого закону Ома для фрактальних структур із використанням операторів Джексона,

Практичне значення отриманих результатів. У роботі сформульовано основні співвідношення математичних моделей прискорювачів заряджених частинок та імпульсних електромагнітних систем із внутрішньою фрактальною структурою.

Реалізація та впровадження результатів роботи. Результати дисертаційної роботи використано у ПАТ «Квантор» під час розроблення програмно-розрахункових моделей, алгоритмів чисельного аналізу та засобів комп'ютерного моделювання електрофізичних процесів у неоднорідних електромагнітних полях

Результати роботи впроваджено у навчальному процесі Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій в рамках виконання освітньо-наукової програми “Комп'ютерні науки”. Отримані результати використано для розроблення математичних моделей, алгоритмічних та програмних засобів для аналізу, оцінки та оптимізації складних інформаційних систем.

Впровадження підтверджені відповідними актами.

Особистий внесок здобувача. Усі теоретичні та практичні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: побудова математичних моделей, розробка програм для чисельного моделювання та розрахунки.

У роботі [1] особистий внесок здобувача: побудована математична модель руху електронів з фазовими обмеженнями. Отримані рівняння для динаміки пучка в лінійних резонансних прискорювально-фокусувальних системах з трубками дрейфа. Проведено комп'ютерне моделювання руху електронів в таких системах.

У роботі [2] особистий внесок здобувача: запропоновано нелінійний метод чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь разом з рівняннями для поточних індексів Ляпунова. Здійснено чисельне розв'язання системи рівнянь.

У роботі [3] особистий внесок здобувача: наведено та розглянуто чисельне моделювання параметричних пристроїв з використанням перемикачів. Виконано розрахунок параметричного генератора імпульсів на відрізках кабелів.

У роботі [4] особистий внесок здобувача: виконано чисельне моделювання струму та напруги в Джозефсонівському тунельному контакті з фрактальним ізолюючим шаром. Проведено розрахунки фазових портретів коливань напруги в Джозефсонівському контакті.

У роботі [5] особистий внесок здобувача: отримано рівняння руху електронів для фрактальних структур. Отримано закон Ома для фрактальних структур. Проведені чисельні розв'язки для фрактального закону Ома.

У роботі [6] особистий внесок здобувача: отримано рівняння руху частинок у фрактальних середовищах. Вивчено динаміку заряджених частинок у постійному магнітному полі. Проведено чисельне розв'язання системи рівнянь методом Рунге — Кута.

У роботі [7] особистий внесок здобувача: запропонована нова методологія для надпровідного датчика, який вимірює гравітаційні збурення. Розроблено прикладне програмне забезпечення.

У роботі [8] особистий внесок здобувача: було застосовано варіаційний принцип Гауса-Герца для вивчення еволюції складних систем під впливом імпульсних процесів. Проведено об'єднання результатів нелокальної теорії Власова та принципу Гауса-Герца, що дозволяє сформулювати варіаційний принцип для еволюції фрактальних систем. Виконано чисельне розв'язання системи рівнянь методом Рунге—Кутти.

У роботі [9] особистий внесок здобувача: розроблено алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості в системах прискорення та

фокусування. Проведено комп'ютерне моделювання руху електронів в таких системах.

У роботі [10] особистий внесок здобувача: отримано рівняння руху частинок у фрактальних середовищах. Досліджено динаміку заряджених частинок у постійному магнітному полі. Проведено чисельне розв'язання системи рівнянь.

У роботі [11] особистий внесок здобувача: отримано рівняння руху частинок у фрактальних середовищах, підрахована похідна Джексона. Отримано закон Ома для фрактальних структур.

У роботі [12] особистий внесок здобувача: проведено дослідження генератор хаотичних коливань на основі Джозефсонівського тунельного контакту з фрактальним ізолюючим шаром. Проведено розрахунки фазових портретів коливань напруги в Джозефсонівському контакті.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, включених до дисертації, оприлюднені здобувачем на наукових конференціях, симпозіумах, нарадах, а саме: міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (Київ, Україна, 2024), Міжнародна конференція “Science: Development and factors its influence”(Амстердам, Нідерланди, 2024), Міжнародна конференція “Science and Education in Progress” (Дублін, Ірландія, 2024), НАТО-семінар “Advanced Nanomaterials for Detection of CBRN” (Одеса, Україна, 2019).

Результати також доповідались на наукових семінарах у Київському авіаційному інституті, Київському національному університеті ім. Т.Г. Шевченка, у Тернопільському національному технічному університеті ім. І.Пулюя.

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано у 12 наукових працях. Результати дисертації опубліковано таким чином: статті у наукових журналах — 7; в збірниках наукових праць — 1; в тезах конференцій — 4.

З них: 5 статей, що індексуються науково-метричними базами Scopus та Web of Science, з яких 1 за квантилем (Scopus Q1), 1 стаття за квантилем (Scopus

Q3), 2 статті за квантилем (Scopus Q4) та 3 статті у фахових наукових періодичних виданнях.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 187 сторінок, із них основного тексту 148 сторінок, 47 рисунків за текстом, список використаних джерел із 86 найменувань на 6 сторінках.

РОЗДІЛ 1.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ЧАСТИНОК З ВНУТРІШНЬОЮ СТРУКТУРОЮ ЗВ'ЯЗКІВ І ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

1.1. Лінійна прискорювальна система з трубками дрейфу

Лінійна прискорювальна система з трубками дрейфу є електродинамічним пристроєм, призначеним для прискорення пучків заряджених частинок за рахунок взаємодії з високочастотним електромагнітним полем. Цей тип прискорювачів широко застосовується у фізиці високих енергій, ядерній медицині та прикладних дослідженнях.

Конструктивно прискорювальна система є циліндричним резонатором являє собою циліндричний резонатор, всередині якого розташовано послідовність провідних електродів — трубок дрейфу. Трубки дрейфу закріплені на опорних стрижнях і розташовані вздовж осі прискорювача з певним кроком, що визначається умовами синхронізації руху частинок з фазою високочастотного електричного поля.

Принцип дії системи базується на періодичному прискоренні частинок у міжтрубкових зазорах, де наявна поздовжня складова електричного поля. Усередині трубок дрейфа електричне поле практично відсутнє, що забезпечує екранування частинок від гальмуючих фаз поля. Довжина кожної трубки вибирається таким чином, щоб частинка перебувала всередині трубки протягом півперіоду високочастотного поля.

У даній роботі розглядається модифікована прискорююча система, в якій трубки дрейфа мають форму еліптичних циліндрів. Така геометрія дозволяє цілеспрямовано змінювати просторовий розподіл електромагнітного поля та покращувати фокуруючі властивості системи. На відміну від традиційних круглих трубок, еліптичний переріз створює анізотропний розподіл поля, що може бути

використано для компенсації просторового заряду пучка та зменшення його розбіжності.

Фокусування пучка в системі здійснюється за допомогою вбудованих магнітних елементів, зокрема квадрупольних магнітів, які можуть бути інтегровані всередину трубок дрейфа або розташовані між ними. У випадку еліптичної геометрії трубок додатковий ефект фокусування досягається за рахунок геометрично індукованої неоднорідності електричного поля.

1.2. Фрактальна модель внутрішніх зв'язків у системі частинок

У даному розділі досліджуються математичні моделі складних систем частинок, у яких визначальну роль відіграє внутрішня структура зв'язків (контактних, пружних, хімічних або ефективних) та її ієрархічна організація. Для широкого класу реальних агрегатів, кластерів і мережевих матеріалів така структура демонструє масштабну самоподібність, що природно описується фрактальними характеристиками. З огляду на це, класичні евклідові підходи до опису енергії, кінетики та термодинаміки є неповними, а адекватне моделювання вимагає поєднання мережевих (графових), скейлінгових та варіаційних методів.

У випадках, коли застосування простих геометричних моделей виявилось вдалим, це призвело до величезних наукових досягнень. Однак багато природних систем настільки складні і нерегулярні, що використання тільки знайомих об'єктів класичної геометрії для їх моделювання є безнадійним (наприклад, модель гірського хребта або крони дерева в термінах класичної геометрії). Динаміка реальних природних систем також може бути складною та нерегулярною. .

Фрактали та математичний хаос — відповідні засоби для дослідження моделей складних систем. Термін фрактал відноситься до деякої статичної геометричної конфігурації, такий як миттєвий знімок водоспаду. Хаос — термін динаміки динаміки, що використовується для опису явищ, подібних до турбулентної поведінки в природі. У цьому розділі ці поняття використовуються

для єдиного підходу до багатьох фізичних явищ, що відбуваються в природі та електрофізичних пристроях. Там проявляються і характерні для фракталів властивості самоподібності.

У багатьох роботах по фракталах самоподібність використовується як визначальна властивість. Наслідуючи Бенуа Мандельброту [14], ми приймаємо точку зору, згідно з якою фрактали повинні визначатися в термінах фрактальної (дрібної) розмірності. Звідси й походження слова фрактал. Поняття дробової розмірності є дуже складною концепцією, яку ми викладемо в кілька етапів. Пряма — це одновимірний об'єкт, а площа — двовимірний. Як ми побачимо далі, добре перевернувши пряму або площину, можна підвищити розмірність отриманої конфігурації; при цьому нова розмірність зазвичай буде дробовою в деякому сенсі, який нам належить уточнити. Зв'язок дробової розмірності та самоподібності полягає в тому, що за допомогою самоподібності можна сконструювати безліч дробової розмірності найпростішим чином. Навіть у разі набагато складніших фракталів, таких, як межа множини Мандельброта, коли чиста самоподібність відсутня, є майже повне повторення базової форми у дедалі більш зменшеному вигляді.

В англійській мові хаос зазвичай визначається як стан повного безладдя або плутанини. Деякі словники вдаються до поняття стану, у якому керує випадок. Термін хаос у математиці використовується у вузькому значенні.

Хоча універсального визначення математичного хаосу не існує, є, мабуть, повна згода в тому, що будь-який вид хаосу має властивість непередбачуваності. Цю властивість називають істотною залежністю від початкових умов. Флуктуації, що спостерігаються в стані хаосу, тільки здаються випадковими — їх значення повністю зумовлені вхідними параметрами. Але на практиці ми ніколи не маємо абсолютно точної інформації про початкові умови. Помилки, хай і незначні, завжди мають місце при вимірі вхідних параметрів. Те, що здається нам випадковим результатом на виході динамічної системи, зумовлено великими помилками, які можуть виникнути, коли система поводить хаотично.

Колись вважалося, що в детермінованій системі, за наявності достатнього обсягу обчислювальних ресурсів, ми завжди можемо зробити точне передбачення. У присутності хаосу це негаразд. Ніякий найпотужніший комп'ютер не дозволить нам зробити точний прогноз на основі математичної системи із суттєвою залежністю від початкових умов.

Фрактали (що ще не отримали цього імені), що з'явилися в математичній літературі близько ста років тому були зустрінуті з ворожістю, як це бувало і в історії багатьох інших математичних ідей. Відомий математик, Шарль Ерміт, навіть охрестив їх монстрами. Принаймні загальна думка визнала їх патологією, що представляє інтерес тільки для дослідників, які зловживають математичними чудасіями, а не для справжніх учених.

У результаті зусиль Бенуа Мандельброта таке ставлення змінилося, і фрактальна геометрія стала шанованою прикладною наукою. Мандельброт ввів у вживання термін фрактал, ґрунтуючись на теорії фрактальної (дрібної) розмірності Хаусдорфа [20], запропонованої в 1919 році. За багато років до появи його першої книги з фрактальної геометрії Мандельброт приступив до вивчення появи монстрів та інших патологій у природі. Він знайшов нішу для тих, що мали погану репутацію множин Кантора, кривих Пеано, функцій Вейерштрасса та їх численних різновидів, які вважалися нонсенсом.

Анрі Пуанкаре ініціював дослідження в галузі нелінійної динаміки близько 1890 року, що призвело до появи сучасної теорії хаосу. Інтерес до предмета помітно збільшився, коли Едвард Лоренц, який займався нелінійним моделюванням погоди, у 1963 році виявив неможливість довгострокових прогнозів погоди. Лоренц зауважив, що навіть мізерні помилки при вимірі параметрів поточного стану погодних умов можуть призвести до абсолютно неправильних передбачень про стан погоди у майбутньому. Ця істотна залежність від початкових умов є основою математичної теорії хаосу.

Траєкторії частинок броунівського руху, яким займалися Роберт Броун ще в 1828р. і Альберт Ейнштейн в 1905р., являють собою приклад фрактальних кривих, хоча їх математичний опис був дан тільки в 1923р. Норбертом Вінер. У 1890 році

Пеано сконструював свою знамениту криву - безперервне відображення, що переводить відрізок у квадрат і, отже, підвищує його розмірність з одиниці до двійки. Кордон сніжинки Коха (1904р.), чия розмірність 1,2618, - це ще одна добре відома крива, що підвищує розмірність.

Фрактал, аж ніяк не схожий на криву, який Мандельброт назвав пилом - це класична множина Кантора (1875р.). Ця множина настільки розріджена, що вона не містить інтервалів, але, проте, має стільки ж точок, скільки інтервал. Мандельброт використовував такий «пил» для моделювання стаціонарного шуму в телефонії. Фрактальна пилюка того чи іншого роду з'являється в численних ситуаціях. Фактично, вона є універсальним фракталом у тому сенсі, що будь-який фрактал, — атрактор системи ітерованих функцій — є або фрактальним пилом, або його проекцією на простір з більш низькою розмірністю.

Різні деревоподібні фрактали застосовувалися як для моделювання дерев-рослин, а й бронхів, роботи нирок, кровоносної системи та інших. Багато чудових властивостей фракталів і хаосу відкриваються щодо ітерованих відображень. При цьому починають із деякої функції $y = f(x)$ і розглядають поведінку послідовності $f(x), f\{f(x)\}, f\{f[f(x)]\}, \dots$ У комплексній площині роботи такого роду сходять, мабуть, до імені Келі, який досліджував метод Ньютона знаходження кореня в додатку до комплексних, а не тільки речових, функцій (1879р.). Чудового прогресу у вивченні комплексних ітерованих відображень домоглися Гастон Жюліа і П'єр Фату (1919р.) [15].

Фундаментальною характеристикою фрактальних об'єктів є фрактальна розмірність, введення якої ґрунтується на припущенні про їх масштабну самоподібність [16, 17]. Для розрахунку фрактальної розмірності було запропоновано низку методів, безпосередньо застосування яких пов'язані з чисельною обробкою безлічі координат точок, що належать фрактальним структурам (див., наприклад, [18]).

У разі дивних атракторів найбільш об'єктивною характеристикою, пов'язаною з фрактальною розмірністю, є розмірність Хаусдорфа-Безиковича D_H , оскільки вона інваріантна по відношенню до перетворення координат.

Найбільш простий алгоритм, що оцінює D_H , зводиться до обчислення величини D_c

$$D_c = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \inf N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (1.1)$$

де інфімум береться за всіма можливими покриттями точок атрактора, причому використовується розбиття фазового простору на однакові осередки розміру ε . У випадку $D_c \geq D_H$ і більшості досліджених систем $D_c = D_H$. Труднощі безпосереднього чисельного розрахунку D_c пов'язані з повільною збіжністю граничного співвідношення (1.1) по ε . Для оцінки значення D_c було запропоновано різні методи, що використовують скейлінгові властивості інваріантної функції розподілу точок множини у фазовому просторі системи, що дозволило покращити збіжність чисельних алгоритмів при розрахунках D_H . Основні із запропонованих методів для розрахунку розмірності дивного атрактора використовують обчислення кореляційного показника [18], показника зростання розміру накопичення точок (кластерів), що знаходяться на дивному аттракторі [19], розрахунок усередненої відстані до найближчого сусіда для точок, розташованих на дивному аттракторі. В якості альтернативи в роботі [13] запропоновано новий метод розрахунку фрактальної розмірності, заснований на аналітичному зв'язку між функцією розподілу відстаней $F(r)$, що визначає ймовірність того, що відстань між двома довільними точками на дивному аттракторі менше r , і усередненою відстанню до найближчого сусіда

$$\bar{\delta}(\gamma, N) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \quad (1.2)$$

де γ — показник усереднення. Зв'язок між цими величинами визначається виразом

$$\bar{\delta}(\gamma, N) = \left\{ \gamma \int_0^{\delta_{\max}} [1 - F(\delta)]^{N-1} \delta^{\gamma-1} d\delta \right\}^{1/\gamma} \quad (1.3)$$

За допомогою знайденої із цього співвідношення величини усередненої відстані розраховується фрактальна розмірність дивного атрактора. Основною перевагою запропонованого методу є те, що з обчислення розмірності атрактора використовуються локальні властивості функції розподілу відстаней. Це, зокрема, дозволяє усунути вплив несамоподібності атракторів, зумовлений наявністю кордонів та сингулярностей.

Як показує аналіз літератури, структура дивних атракторів для багатьох дисипативних динамічних систем є суттєво неоднорідною і відповідає уявленню про структурно складні утворення. Крім фрактальної розмірності для аналізу таких об'єктів зручно використовувати мультифрактальні характеристики.

Поняття про мультифрактальні об'єкти виникає щодо розподілу фізичних чи якихось інших величин на геометричному носії [20]. В теорії динамічних систем мультифрактальні характеристики можуть бути використані при аналізі структури фазового простору системи, а також вивчення особливостей поведінки в часі основних параметрів її стану. У разі фазового простору як фізична величина на атракторі може бути обрано значення максимального поточного показника Ляпунова (ППЛ), пов'язане з точками фазової траєкторії системи та характеризує ступінь її локальної нестійкості.

Розглянемо характер розподілу ППЛ на деякий притягуючий множині у фазовому просторі системи, зв'язавши значення ППЛ з точками фазового простору. Середню щільність ППЛ на атракторі позначимо через $\bar{\mu}_0$. Подумки розділимо область атрактора на ділянки, з характерним розміром вдвічі меншим за характерний розмір атрактора. У кожній з таких ділянок можна визначити середню густину ППЛ. У випадку ці щільності будуть різними і відрізнятимуться від величини. Процес розділення області атрактора можна продовжити і на кожному кроці будуть визначатися значення середніх щільностей у менших і менших ділянках. На кожному з етапів цього процесу всі множини ділянок можна розділити на підмножини, які характеризуються однаковою щільністю ППЛ. Ці підмножини зручно охарактеризувати параметром, який визначає характер залежності щільності μ_α забруднення від розмірів ділянки l .

$$\mu_{\alpha}(l) = \mu_0 \cdot l^{\alpha-1} \quad (1.4)$$

Параметр α відомий у математиці як показник Ліпшиця-Гельдера. Він визначає сингулярність поведінки густини при переході до дрібних масштабів і може бути названий показником сингулярності. Розподіл на аттракторі ділянок із певним показником сингулярності α характеризується фрактальною розмірністю $f(\alpha)$. Крива залежності фрактальної розмірності від показника сингулярності має цілу низку характерних особливостей і містить у собі повнішу інформацію про структуру об'єкта, ніж значення його фрактальної розмірності. Проведення мультифрактального аналізу передбачає розрахунок ще низки величин, що несуть додаткову інформацію про фрактальні властивості системи, що вивчається.

Розглянемо приклади найпростіших фрактальних об'єктів та знайдемо їх фрактальні розмірності.

Розділимо відрізок прямий на N рівних частин. Тоді кожен частину можна вважати копією всього відрізка, зменшеною в $1/\tau$ разів. Очевидно, що N і пов'язані співвідношенням $N\tau = 1$. Якщо квадрат розбити на N рівних квадратів (з площею, в $1/\tau^2$ разів менше площі вихідного), то співвідношення запишеться як $N\tau^2 = 1$. Якщо куб розбити на N рівних кубів (з об'ємом, в $1/\tau^3$ разів менше об'єма вихідного), то співвідношення набуде наступного вигляду: $N\tau^3 = 1$. Зауважимо, що розмірність D_f з'являється як ступінь у співвідношенні між N — числом рівних підоб'єктів, і коефіцієнтом подоби τ . А саме:

$$N\tau^{D_f} = 1. \quad (1.5)$$

Якщо для деякої множини показник D_f в рівності (1.5) не є цілим, то таку множину називають самоподібним фракталом, а величину D_f називають фрактальною (дрібною) розмірністю чи розмірністю подібності. З (1.5) випливає явний вираз для D_f через N і τ :

$$D_f = \frac{\log(N)}{\log(1/\tau)}. \quad (1.6)$$

Найпростішим і важливим прикладом фрактальної самоподібної множини є класичний пил Кантора. Вихідна множина в цьому випадку є відрізок $[0, 1]$. Побудова класичного пилу Кантора починається з викидання середньої третини (не включаючи кінці) одиничного відрізка. Тобто, і перший крок полягає у видаленні відкритого інтервалу $(1/3, 2/3)$. На наступному та всіх інших кроках ми викидаємо середню третину (не включаючи кінці) всіх відрізків поточного рівня (див. Рис. 1.1).



Рис. 1.1. Побудова Канторового пилу

Таким чином, ми отримуємо послідовність множин: $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

Гранична множина C , яка являє собою перетин множин C_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, називається класичним пилом Кантора з розмірністю: $D_f = \frac{\log(2)}{\log(1/(1/3))} \approx 0.6309$.

Ця множина настільки розріджена, що вона не містить інтервалів, але, проте, має стільки ж точок, скільки інтервал. Фрактальна пилюка того чи іншого роду з'являється в численних ситуаціях. Фактично, вона є універсальним фракталом — атрактор системи ітерованих функцій є або фрактальним пилом, або його проекцією на простір з більш низькою розмірністю.

Килим Серпінського. Приклад простого самоподібного фракталу на площині — килим Серпінського (рис. 1.2), придуманий Ст. Серпінським у 1915 році. Сам термін килим належить Мандельброту. З побудови випливає, що на кожному етапі килим є об'єднанням попарно неперетинних копій початкової множини з коефіцієнтом подібності $1/2$. Нехай початкова множина S_0 — рівносторонній трикутник разом із областю, яку він замикає (див. рис. 1.1).



Рис. 1.2. Етапи побудови килима Серпінського

Розіб'ємо його на чотири менші трикутні області, з'єднавши відрізками середини сторін вихідного трикутника. Видаємо нутро маленької центральної трикутної області. Назвемо множину, що залишилася S_1 . Потім повторимо процес для кожного з трьох маленьких трикутників, що залишилися і отримаємо наступне наближення S_2 .

Продовжуючи, таким чином, послідовність вкладених множин, перетин яких S_n -ий перетин і утворює килим S .

З побудови видно, що весь килим є об'єднанням на кожному кроці $N = 3$ істотно непересічних зменшених у два рази копій з коефіцієнтом подібності $\tau = 1/2$ (як по горизонталі, так і по вертикалі). Отже, S — самоподібний фрактал з розмірністю: $D_f = \frac{\log(3)}{\log(1/(1/2))} \approx 1,585$.

Очевидно, що сумарна площа частин, викинутих при побудові, точно дорівнює площі вихідного трикутника. На першому етапі ми викинули $1/4$ частину площі. На наступному кроці ми викинули три трикутники, причому площа кожного дорівнює $1/4^2$ площі вихідного. Таким чином, ми переконуємось, що повна частка викинутої площі склала:

$$1/4 + 3(1/4^2) + 3^2(1/4^3) + \dots + 3^{n-1}(1/4^n) + \dots$$

Ця сума дорівнює 1. Отже, ми можемо стверджувати, що решта безліч S , тобто килим має площу міри нуль

Існують і аналоги килимів у тривимірному просторі. Мандельброт назвав такі множини губками. Губка, зображена на рис. 1.3 називається губкою Менгера.

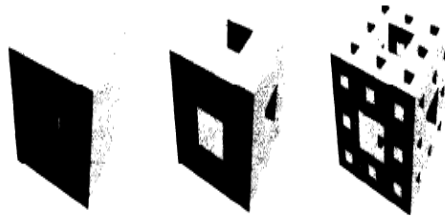


Рис. 1.3. Губка Менгера

Це самоподібний фрактал з $N = 20$ та $\tau = 1/3$. Його розмірність дорівнює:

$$D_f = \frac{\log(20)}{\log(1/(1/3))} \approx 2,7268$$

Така губка має об'єм міри нуль. Крім регулярних самоподібних фрактальних множин існують і їх узагальнення — не самоподібні фрактальні множини.

1.3. Скейлінг та енергія зв'язку фрактальних кластерів

Усі первинні джерела енергії, засновані на Природі мають одну основу — процеси зі зміною енергії зв'язку систем. Це як найпоширеніші джерела енергії, заснованих на перетворенні енергії зв'язку атомного і молекулярного рівнів, наприклад, при спалюванні органічного палива, і ядерних процесів, породжуваних зміною енергії зв'язку нуклонів в ядрах атомів при перебігу ядерних реакцій. Під енергією зв'язку B системи з i компонент (частинок) розуміється різниця між повною енергією системи тіл або частинок W і сумарної енергії тих самих тіл або частинок, які перебувають у стані спокою у разі відсутності взаємодії $\sum_i W_i$:

$$B = \sum_i W_i - W, \quad (1.7)$$

де W_i — повна енергія, i — компонента в незв'язаному стані, що покоїться. Дефект маси системи Δm — різниця між сумою мас елементів системи m_i та повною масою системи m

$$\Delta m = \sum_i m_i - m. \quad (1.8)$$

Дефект маси системи характеризує її стійкість. Крім маси найважливішою характеристикою системи має бути інерція системи щодо на неї сил. Маса системи залежить від її структури і зв'язків у ній і визначає інерцію системи, що покоїться. Інерція, на відміну від маси залежить від системи відліку (див., наприклад, [4]).

При всій різноманітності рухів частинок та систем їх можна класифікувати. У природі існує багато періодичними, регулярними явищами — від руху маятника до коливань атомів. Незважаючи на те, що в природі немає строго періодичних рухів (хоча б через їх обмеженість у часі) все ж таки періодичність виявилася надзвичайно корисним поняттям для пояснення основних законів і механізмів у багатьох різноманітних процесах, особливо для багатьох фізичних систем, інваріантних щодо зрушень у просторі та часі.

Більшість реальних явищ є нелінійними і замість періодичності з'являється аперіодичний і хаотичний рух, а геометричні структури, що при цьому виникають, відрізняються порушенням безперервності. При всій різноманітності нелінійної еволюції існують загальні властивості, що поєднують більшість з них — самоподібність — інваріантність щодо зміни масштабу (скейлінг). Скейлінг проявляється у багатьох нелінійних фізичних процесах, особливо щодо критичних явищ, що характеризують поведінку речовин на околиці точок фазових переходів.

Із загального визначення системи відразу впливає, що система має, як мінімум, два просторові масштаби — зовнішній макроскопічний масштаб L , що визначає її характерні розміри як цілісного об'єкта, і мінімальний просторовий масштаб l_1 , пов'язаний з характерним розміром мінімальних елементів системи (мономерів), з яких вона складається. При цьому мономері вважаються в аналізованих процесах, що не мають внутрішньої структури. Таким чином, для загального аналізу самоорганізації у системах багатьох частинок найважливішими характеристиками систем є:

- просторова обмеженість та, отже, її просторові масштаби;

- внутрішня структура її зв'язків та складність, які можуть бути адекватно охарактеризовані якоюсь із фрактальних розмірностей;
- просторові та масові характеристики структурних одиниць системи (мономерів).

Загальною моделлю таких систем є кластери різних масштабів [5]. Можна сказати, що еволюція системи йде через утворення мезоскопічних структур — кластерів із масштабами l_i , такими, що задовольняють нерівності $l_1 < l_i < L$.

Зростання структури з множини A мономерів природно ділить систему на дві частини: структуровану з A_{cog} мономерів і безструктурну з решти $A_g = A - A_{cog}$ мономерів. Частка всіх мономерів, що утворили структуровану частину, називається параметром порядку $\eta \approx A_{cog} / (A_{cog} + A_g)$.

Таким чином, в результаті еволюції системи з мономерів виникає кластер, складений з елементів, які у свою чергу є фрактальними кластерами меншого масштабу l_i з A_i мономерів. Найбільш важливими для здійснення процесів управління є багатомасштабні системи, що мають масштабну інваріантність у сфері масштабів $l_1 < l_i < L$.

У випадку зв'язку у системі та їх складність можна характеризувати фрактальними розмірностями, наприклад, розмірністю зв'язності D_c , яка визначається структурою зв'язків, або масовою фрактальною розмірністю системи D_f , яка визначається розподілом речовини у системі [21].

Однією з характерних для фрактала статечних залежностей є залежність усередненої по кутах кореляційної функції від відстані до геометричного центру. При цьому середня щільність частинок у кластері $\rho(r)$ у міру віддалення від центру всередині кластера змінюється за законом, що збігається із законом спадання просторових кореляцій:

$$\rho(r) = \rho_1 (l_1/r)^{3-D_f}, \quad (1.9)$$

ρ_1 — густина мономерів, з яких побудована фрактальна структура. З цих загальних співвідношень фрактальної геометрії випливає просте співвідношення

між масовим числом фрактального кластера A (тобто числом мономерів, з якого складається кластер), зовнішнім розміром кластера R_A та характерним розміром l_m мономерів:

$$A \propto (R_A/l_m)^{D_f} \text{ або } R_A = l_m A^{1/D_f}. \quad (1.10)$$

Зі співвідношення (1.6) також випливає залежність фрактальної розмірності кластера з масовим числом A и середньою густиною від масового числа A_m та середньої щільності ρ_m безструктурних одиниць — мономерів, з яких побудований кластер:

$$D_f = 3 \frac{\ln(A/A_m)}{\ln(A/A_m) + \ln(\rho_m/\rho)}. \quad (1.11)$$

Фрактальна розмірність характеризує властивості масштабної інваріантності системи, які пов'язані з її параметром когерентності. Наведемо оцінку співвідношення між параметром когерентності та фрактальною розмірністю.

Когерентну частину системи у загальному випадку вважатимуться фрактальним кластером. Оскільки потенційна енергія речовини, переважно, пропорційна щільності, вона підпорядковується статичному закону (3), справедливому щільності речовини кластера. Тобто потенційна енергія кластера є функцією з коефіцієнтом подібності $k_{sc} = D_f - 3$: $U(r) \propto \rho(r) \propto r^{k_{sc}}$, т.е. $U(\alpha r) = \alpha^{k_{sc}} U(r)$.

З віріальної теореми для систем з потенційною енергією, що має подібність, співвідношення між середніми значеннями кінетичної $\overline{W_{kin}}$ та потенційної енергії

$\overline{U}$ задовольняє рівності $\frac{\overline{W_{kin}}}{\overline{U}} = \frac{k_{sc}}{2}$. Якщо врахувати, що когерентна частина має в

основному потенційну енергію, а вся кінетична енергія зосереджена в нерегулярній та некогерентній складовій, то можна отримати оцінку параметра

порядку $\eta \approx \overline{U} / (\overline{W_{kin}} + \overline{U}) = 1 / \left(1 + \frac{k_{sc}}{2}\right)$. Звідки слідує:

$$\eta \approx (3 - D_f) / (D_f - 1), \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (1.12)$$

На кожному щаблі ієрархії масштабів від найбільшого до найменшого масштабу можуть існувати параметри порядку. Якщо параметри порядку різних масштабах виявляються пов'язані між собою, можна сказати, що виник єдиний багатомасштабний макроскопічний об'єкт.

Розглянемо простий і, одночасно, важливий приклад класичних багатомасштабних систем — систему багатьох частинок, що взаємодіють, здатних утворювати кластерну структуру всередині системи. Найпростішою загальною моделлю таких систем є крапля рідини, що складається з A молекул, які можуть утворювати кластери із кількох молекул.

Будемо позначати ці кластери A_m , де m — кількість молекул у кластері. У свою чергу ці кластери можуть утворювати дендритну структуру з фрактальною розмірністю D_f . Тобто вже одна крапля є багатомасштабним макроскопічним об'єктом, який складається з когерентної частини, утвореної дендритом з мономерів A_m , до якого входить ηA молекул, та безструктурної рідкої частини з $(1 - \eta) A$ молекул.

Взаємодію молекул рідини можна грубо описати потенціалом Леннарда-Джонса

$$U(r) = \varepsilon_0 \left(\left(r_{\min} / r \right)^{12} - 2 \left(r_{\min} / r \right)^6 \right), \quad (1.13)$$

який відповідає тяжінню молекул на досить великих відстанях $r > r_{\min}$ та різкого відштовхування на малих $r < r_{\min}$. Такий характер взаємодії забезпечує цілісність системи молекул із характерною відстанню між молекулами $r_{\min}$ та позитивну енергію зв'язку між молекулами порядку ε_0 .

Повна об'ємна енергія зв'язку B_v рідкої краплі визначається інтегралом $B_v = \int U(r - r') \rho(r) \rho(r') d^3r d^3r'$ і через різке відштовхування на малих відстанях виявляється пропорційною не квадрату, а першого ступеня кількості молекул у краплі A . Зі зростанням щільності зростають поправки за рахунок неідеальності системи частинок, в результаті можна записати:

$$B_v \approx g_0 A + a_0 (\rho / \rho_0)^{2/3}, \quad g_0 \approx \varepsilon_0. \quad (1.14)$$

Відповідно до положень простої та ефективної класичної теорії рідкої краплі Я. Френкеля [7] крім зазначеного позитивного вкладу в енергію зв'язку існує і негативний внесок, від поверхневої енергії межі розділу фаз: B_{surf} , яка пропорційна площі кордону S_{drop} :

$$B_{surf} = -\sigma S_{drop}, \quad S_{drop} = 4\pi R_A^2 (A/A_m)^{\gamma-2/3}, \quad \gamma = 2/D_f, \quad \frac{2}{3} \leq \gamma \leq 1. \quad (1.15)$$

Коефіцієнт $\gamma = 2/3$ для суцільної структури ($D_f = 3$), та $\gamma = 1$ для розвиненої системи «павутинок» або «бульбашок» ($D_f = 2$).

Якщо система частинок має заряд, то з'являється ще один внесок в енергію зв'язку — енергія кулонівського відштовхування однойменно заряджених частинок B_q :

$$B_q = -\frac{3}{5} \frac{e^2 Z(Z-1)}{R_A}. \quad (1.16)$$

Система частинок крім потенційної енергії має і кінетичну енергію хаотичного руху B_T , також прагне до порушення цілісності системи та зменшення її енергії зв'язку:

$$B_{kin} = -\rho_0 A^{\frac{3-D_f}{D_f}} T. \quad (1.17)$$

Внесок в енергію системи виродженої електронної ферми — рідини з урахуванням квазінейтральності виражається через її щільність таким чином:

$$B_{el} = -\frac{3}{4} a_\varepsilon \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{4/3} \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3}. \quad (1.18)$$

Таким чином, повна енергія зв'язку системи має вигляд:

$$B_{drop} = B_v + B_{surf} + B_q + B_{kin} + B_{el}. \quad (1.19)$$

Квазистаціонарні стани відрізняються своєю енергією зв'язку, а еволюція систем є переходами між квазистаціонарними станами, які можуть бути описані в рамках рівнянь варіаційного принципу еволюції, отриманих у другому розділі.

1.4. Інерційність та кінетика процесів еволюції у неінерційній системі координат при когерентному прискоренні складних систем частинок

У звичайній кінетиці у фазовому просторі частинок при еволюції передбачається виконанням детальна рівновага, що визначає нульовий потік у фазовому просторі та структуру підінтегрального вираження інтегралів зіткнень. Зазначимо, що вплив на частинки нерівноважних, несиметричних флуктуацій вакууму в неінерційній системі відліку порушує детальну рівновагу частинок. Формування відхилення потоку від нульового рівноважного значення пов'язане з можливістю утворення стійких квазістаціонарних просторово однорідних станів частинок, властивості яких подібні до турбулентних потокових станів суцільного середовища. У роботах [8-10] вперше показано можливість існування таких станів, у рамках різних кінетичних рівнянь для частинок з інтегралами зіткнень, що враховують як пряму парну взаємодію частинок, так і їх парну взаємодію через власні коливання середовища при використанні евклідової геометрії для багатовимірного фазового простору з урахуванням виникнення в деякий енергетичний інтервал інерційної системи відліку.

У неінерційній системі відліку з когерентним прискоренням, ініційованим початковими масовими силами, виникають турбулентні потоки флуктуацій вакууму та потоки ентропії $\vec{j}_S$ від самоузгоджених полів у систем частинок. Відповідно до варіаційного принципу еволюції, у відповідь на когерентне прискорення та відповідні ентропійні потоки, зв'язки в системі (і, отже, відповідні об'єкти зв'язності простору — часу, в якому розвивається система) починають варіюватися так, щоб система частинок була максимально вільна в гармонії з анізотропією простору, що виникла в результаті прискорення. Відображенням цієї гармонії є те, що функція розподілу повинна задовольняти кінетичному рівнянню, за формою, що збігається з рівнянням для вільних частинок, тобто, фактично, узагальненому рівнянню Власова, що відображає збереження щільності ймовірності у формі рівняння безперервності з дивергенцією потоку. При цьому внесок варіації зв'язків і геометрії простору відображається в тому, що це

рівняння (за формою, що збігається з рівнянням для вільних частинок), має бути записано в геометрії Картана, об'єкти зв'язності якого треба ще визначити:

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{u}, t)}{\partial t} + \text{div}_{\vec{r}} [\vec{u} f(\vec{r}, \vec{u}, t)] + \text{div}_{\vec{u}} [\langle \dot{\vec{u}} \rangle f(\vec{r}, \vec{u}, t)] = -\text{div}_{\vec{u}} (\vec{j}_S). \quad (1.20)$$

$$\vec{j}_S = \left(\frac{1}{\alpha_S} \bar{\sigma}_S \vec{u} \right) f(\vec{r}, \vec{u}, t), \quad \langle \dot{\vec{u}} \rangle = \frac{1}{m} \vec{F}_B$$

з урахуванням співвідношень нормування, до якої входить метрика базового простору — часу та дотичних до нього у відповідних точках шарів:

$$dN = f(x^i, u^i) \sqrt{-g} d^4x \sqrt{-q} d^4u, \quad u^i = \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Найпростіші рішення, що відповідають найбільш симетричним рухам, можна отримати прямо з наведеного вище рівняння безперервності, якщо уявити його в підступному вигляді у просторі Картана за компонентами:

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma u^\alpha u^\gamma \frac{\partial f}{\partial u^\sigma} + \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\left\langle \frac{\hat{D}\vec{u}}{d\tau} \right\rangle^\alpha f + P_s \right) = 0. \quad (1.21)$$

У важливому окремому випадку, коли явний внесок дивергенції $\text{div}_{\vec{u}}(\cdot)$ в кінетичні рівняння можна не враховувати, то підступне рівняння квазістаціонарних станів набуває вигляду:

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma u^\alpha u^\gamma \frac{\partial f}{\partial u^\sigma} = 0. \quad (1.22)$$

Це наближення справедливе у двох випадках:

- коли повністю відсутні зовнішні сили в системі та потік у фазовому просторі $P_S = 0$. (Цей випадок відповідає повній рівновазі в системі);
- коли зовнішні сили прямо не діють у системі, але потік енергії, частинок або ентропії постійний у фазовому просторі $P_S = \text{const}$. (Цей випадок відповідає сильному відхиленню від рівноваги).

Ізотропні у просторі швидкостей розв'язання кінетичного рівняння без дивергенції стаціонарні у лабораторному часі, задовольняють обмеженням:

$\partial f / \partial x^0 = 0$; $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^0 = 0$, $g_{0i} = 0, i = 1, 2, 3$. Зручно запровадити нові швидкості за допомогою співвідношень:

$$(1-q)\xi^2 = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta, \quad \xi^\alpha = \frac{u^\alpha}{\sqrt{-(1-q)g_{00}u^0}}, \quad u^2 = u_\alpha u^\alpha. \quad (1.23)$$

Після поділу змінних для функції

$$f(x^\alpha, u^\alpha, u^0, t) = f(x^\alpha, u^\alpha, u^0) = \rho(x^\alpha)\psi(u^2)\psi_0(u^0) \quad (1.24)$$

отримуємо систему 3-х рівнянь, яка (з урахуванням співвідношення $g_{00} \approx D(x^1) \approx \exp_q\left(\frac{2a_m}{c^2}x^1\right)$) має рішення:

$$\rho(x^i) = \rho_0 \exp_q\left(-\frac{x}{l_{eff}}\right), \quad \text{де } \psi_0(u^0) = \psi_0(0) \frac{1}{u_0^{\frac{q_{cr}}{q_{cr}-1}}}, \quad \psi(\xi^2) = \left[\exp_q(-\xi^2)\right]^q. \quad (1.25)$$

За відсутності потоку ентропії (тобто при $q=1$) реалізується однорідний рівноважний випадок, тому що функція розподілу $\psi(\xi^2)$ за швидкостями (або енергіям) переходить у функцію розподілу Максвелла, функція розподілу $\rho(x^i)$ у розподіл Больцмана, а функція $\psi_0(u^0)$ стає константою. У міру когерентного прискорення та потоків ентропії в системі ($q \neq 1$) функції розподілу за енергіями та координатами змінюють експоненційну залежність на квазіступеневу.

Отримані рішення, в яких функції розподілу частинок від координат мають статичну асимптотику, свідчать про виникнення фрактальних структур спочатку просторово-однорідної ідеальної системи і доводить ключову роль когерентного прискорення взагалі у виникненні структур в системі частинок (у тому числі і заряджених).

1.5. Термодинаміка та когерентно корельовані стани складних ієрархічних систем частинок під дією когерентних прискорень

Самоузгоджена вибухова варіація складних систем ініціюється когерентним прискоренням та масовими силами. Найвідомішим і одним з найпоширеніших прикладів масових сил є гравітаційні сили, які, будучи на космологічних масштабах, як відомо, основним фактором еволюції, призводять, як показано в чисельних експериментах, до утворення специфічних структур у Всесвіті, що еволюціонує, — виникненню «млинців», які далі еволюціонують в скупчення галактик. Підвищення когерентності системи та зменшення характерних розмірів у напрямку когерентності за рахунок дії масових сил є одним із ключових елементів ініціювання самоорганізації у будь-яких складних системах. У випадку ізотропна в початковий час система, має розподіл частинок у просторі з характерним масштабом l_0 еволюціонує в деформований стан із великою кількістю зовнішніх просторових масштабів. У найпростішому випадку врахуємо анізотропію еволюції, ввівши як макроскопічні геометричні характеристики системи замість одного її радіусу два масштаби: $l_{\perp} < l_0$ у виділеному напрямку (напрямок когерентного прискорення); $l_s > l_0$ в ортогональних напрямках.

Менший просторовий масштаб можна назвати масштабом просторової когерентності системи, що характеризує товщину «млинця», а більший масштаб — характерним масштабом взаємодії, що характеризує максимальний розмір кореляцій у системі.

Фазовий об'єм системи $\Omega_{ph} = \Omega_p \Omega_r$ є твір обсягів. Тут Ω_r обсяг у координатному просторі, а Ω_p — у імпульсному просторі. Фазовий обсяг системи можна оцінити за функцією розподілу, тому з квазістаціонарності функції розподілу системи $\frac{\partial f}{\partial t} \approx 0$ слідує умові стаціонарності фазового обсягу $\frac{\partial \Omega_{ph}}{\partial t} \approx 0$ при виконанні умови сталості потоку. У разі рівності нулю потоку стан системи є рівноважним, а Ω_{ph} константа. Якісні властивості квазістаціонарних станів з

ненульовим постійним потоком у фазовому просторі можуть бути описані методами регуляризації на основі дробових операторів, розвиненими у роботі [20]. Умова стаціонарності фазового обсягу з урахуванням регуляризації набуває вигляду:

$$D^{1-\nu}\Omega_{ph}(t)=0, \quad (D^\alpha f)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^\tau\frac{f(t)}{(t-x)^\alpha}dt \quad (1.26)$$

і має рішення

$$\Omega_{ph}(t)=\Omega_{ph0}\frac{\tau^\nu}{(\tau-t)^\nu}, \quad (1.27)$$

де Ω_{ph0} — величина фазового обсягу початковий момент часу. У цьому співвідношенні індекс похідної ν пропорційний масовій силі або потоку у фазовому просторі і переходить у рівноважний вираз при $\nu=0$. Отриманий вище вираз для фазового обсягу системи, що під дією масових сил, показує виникнення режиму із загостренням та скорочення масштабу когерентності $l_\perp$ призводить до зростання характерного масштабу взаємодії l_s відповідно до співвідношення:

$$l_s=l_0\sqrt{\frac{\Omega_{ph}}{\Omega_{p0}}}\sqrt{\frac{l_0}{l_\perp}}=l_0\frac{1}{(1-t/\tau)^{\nu/2}}\sqrt{\frac{l_0}{l_\perp}}. \quad (1.28)$$

У співвідношенні для характерного масштабу взаємодії фазовий обсяг системи не зберігається і з'являється додатковий нестаціонарний множник, який завдяки виробництву ентропії вибуховим чином змінює локалізацію станів. Виникає новий клас явищ, що з нелокальністю, а причиною є виникнення когерентних станів і процесів, керованих зовнішніми джерелами енергії та інформації.

Нехай характерні масштаби з урахуванням анізотропії базового та дотичного просторів позначені таким чином:

$l_\parallel$ — просторовий масштаб вздовж виділеної осі у базовому просторі;

$\langle p_{\parallel} \rangle$ — характерний імпульс вздовж виділеного напрямку першого дотичного розшарування;

$\langle a_{\parallel} \rangle$ — характерний імпульс вздовж виділеного напрямку другого дотичного розшарування (прискорення);

$l_{\perp}$ — просторовий масштаб у ортогональній площині базового простору;

$\langle p_{\perp} \rangle$ — характерний імпульс у ортогональній площині першого дотичного розшарування;

$\langle a_{\perp} \rangle$ — характерний імпульс у ортогональній площині другого дотичного розшарування (прискорення).

При сильній деформації станів поздовжній масштаб вздовж напрямку прискорення скорочується, а поперечний масштаб (масштаб вздовж поверхні, ортогонального напрямку прискорення) сильно зростає і відповідно:

- уздовж прискорення в стані системи проявляється дискретність енергії та частоти через граничні умови на межах системи, що наближаються один до одного;
- у площині ортогональній до напрямку прискорення просторовий масштаб різко збільшується, частоти зменшуються, і система в цьому напрямку поводить як безмежне суцільне середовище;
- зростає анізотропія масштабів у дотичних розшаруваннях, у напрямках вздовж прискорень та у площині ортогонального прискорення.

В результаті діелектричні властивості системи, що взаємодіє із середовищем (вакуумом), визначаються двома компонентами діелектричного тензора — поперечною та поздовжньою діелектричною проникністю. Причому поздовжня діелектрична проникність містить вклади і від поперечних (дискретних) станів і від безперервних поздовжніх станів, які локалізовані в різних областях енергій і частот. У цьому випадку у поздовжньої діелектричної проникності з'являються нулі, що відповідають лінійним законам дисперсії поздовжнім коливанням електромагнітних полів та перенормування кулонівської взаємодії.

Анізотропія фазового простору (відношення масштабів однієї просторової компоненти у двох наступних поспіль дотичних просторах) відображається в імпеданс:

$$Z_{rp} = \frac{S(r, p_r)}{r^2} \approx \frac{r \cdot p_r}{r^2} \approx \frac{p_r}{r}. \quad (1.29)$$

Характерні масштаби в одному просторовому напрямку сусідніх дотичних просторів задовольняють нерівностям співвідношень невизначеності, які з урахуванням кореляцій та колективності (зміни ентропії ΔS у дотичному фазовому просторі системи та зміни ентропії в енергетичному просторі ΔS_a) мають вигляд:

$$l_{\parallel} \langle p_{\parallel} \rangle \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-r_{\parallel}^2}} \Delta S, \quad l_{\perp} \langle p_{\perp} \rangle \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-r_{\perp}^2}} \Delta S, \quad (1.30)$$

$$\langle p_{\parallel} \rangle \langle a_{\parallel} \rangle \geq \frac{\hbar_a}{2\sqrt{1-r_{p_{\parallel}}^2}} \Delta S_a, \quad \langle p_{\perp} \rangle \langle a_{\perp} \rangle \geq \frac{\hbar_a}{2\sqrt{1-r_{p_{\perp}}^2}} \Delta S_a$$

Скориставшись цими співвідношеннями невизначеностей для кожного напрямку, після поділу одного на інший отримуємо:

$$\frac{l_{\parallel}}{\langle a_{\parallel} \rangle} \geq \frac{\hbar \Delta S}{\hbar_a \Delta S_a} \frac{\sqrt{1-r_{p_{\parallel}}^2}}{\sqrt{1-r_{\parallel}^2}} \text{ для поздовжнього спрямування;}$$

$$\frac{l_{\perp}}{\langle a_{\perp} \rangle} \geq \frac{\hbar \Delta S}{\hbar_a \Delta S_a} \frac{\sqrt{1-r_{p_{\perp}}^2}}{\sqrt{1-r_{\perp}^2}} \text{ для поперечного спрямування.}$$

У кожному з напрямків базового простору система частинок має певний механічний імпеданс (див. (4)), що відображає анізотропію фазового обсягу у відповідних дотичних просторах:

$$Z_{\parallel} = \frac{l_{\parallel} \langle p_{\parallel} \rangle}{l_{\parallel}^2} = \frac{\langle p_{\parallel} \rangle}{l_{\parallel}}, \quad Z_{\perp} = \frac{l_{\perp} \langle p_{\perp} \rangle}{l_{\perp}^2} = \frac{\langle p_{\perp} \rangle}{l_{\perp}} \text{ — анізотропія фазового простору станів;}$$

$$Z_{p_{\parallel}} = \frac{\langle p_{\parallel} \rangle \langle a_{\parallel} \rangle}{\langle p_{\parallel} \rangle^2} = \frac{\langle a_{\parallel} \rangle}{\langle p_{\parallel} \rangle}, \quad Z_{p_{\perp}} = \frac{\langle p_{\perp} \rangle \langle a_{\perp} \rangle}{\langle p_{\perp} \rangle^2} = \frac{\langle a_{\perp} \rangle}{\langle p_{\perp} \rangle} \text{ — анізотропія фазового простору}$$

дотичного розшарування

З аналітичних рішень рівнянь Власова у просторі Картана для неінерційної системи відліку без зовнішніх сил із заданим прискоренням видно:

- для позитивних когерентних прискорень просторового масштабу анізотропія фазового об'єму (імпеданс) прагне нуля (тіло оболонки);
- для негативних когерентних прискорень просторового масштабу анізотропія фазового об'єму (імпеданс) прагне нескінченності (кордон оболонки).

Усереднюючи імпульси та прискорення за отриманими розподілами отримуємо оцінку для характерних поздовжніх та поперечних імпульсів:

$$\langle p_{\perp} \rangle = p_{\perp}(a_{cog}), \quad \langle p_{\parallel} \rangle = p_{\parallel}(a_{cog}). \quad (1.31)$$

Використовуючи рішення рівнянь Власова для функцій розподілу за прискореннями залежно від вибраних значень прискорень швидкості, отримуємо після усереднення:

$$\langle a_{\perp} \rangle = a_{\perp}(\dot{a}_{cog}), \quad \langle a_{\parallel} \rangle = a_{\parallel}(\dot{a}_{cog}). \quad (1.32)$$

Застосовуючи співвідношення послідовно, отримуємо для характерних поздовжніх та поперечних імпульсів залежно від прискорення швидкості:

$$\langle p_{\perp} \rangle = p_{\perp}(a_{\perp}(\dot{a}_{cog})), \quad \langle p_{\parallel} \rangle = p_{\parallel}(a_{\parallel}(\dot{a}_{cog})), \quad (1.33)$$

а для просторових масштабів та імпедансів:

$$l_{\perp} \geq \frac{\hbar \Delta S}{2 p_{\perp}(a_{cog}) \sqrt{1-r_{\perp}^2}}, \quad Z_{\perp} = 2 \frac{p_{\perp}(a_{cog})^2}{\hbar \Delta S} \sqrt{1-r_{\perp}^2}, \quad (1.34)$$

$$l_{\parallel} \geq \frac{\hbar \Delta S}{2 p_{\parallel}(a_{cog}) \sqrt{1-r_{\parallel}^2}}, \quad Z_{\parallel} = 2 \frac{p_{\parallel}(a_{cog})^2}{\hbar \Delta S} \sqrt{1-r_{\parallel}^2}.$$

Зміна ентропії у фазовому просторі пов'язана з фрактальністю структур при когерентному прискоренні та відображається у зміні обсягу мінімального осередку фазового простору. Як масштаб величини дії, природно, розглядати величину:

$$S_0 = \Delta r_l p_F(\rho_{fr}), \quad (1.35)$$

Для фрактальних кластерів мінімальний розмір осередку для одного ступеня свободи визначається фрактальною розмірністю дорівнює

$$\left(\frac{\tilde{\hbar}}{2}\right)^{\frac{D_{fph}}{2}}, \quad (1.36)$$

де $\tilde{\hbar} = \frac{S_0}{\hbar}$ — постійна Планка, характерна дія S_0 , відповідне даному масштабу явищ, нормоване на $\hbar$, а D_{fph} — фрактальна розмірність фазового простору одного ступеня свободи, де, як і раніше, масштабом довжини є масштаб когерентності, а масштабом імпульсів — величина імпульсу Фермі для середньої щільності фракталу.

Таким чином, принцип Гейзенберга для системи з одним ступенем свободи та фрактальним фазовим простором можна записати, використовуючи безрозмірні змінні

$$\frac{\langle \Delta p \Delta x \rangle}{S_0} \geq \left(\frac{\tilde{\hbar}}{2}\right)^{\frac{D_{fph}}{2}-1}. \quad (1.37)$$

«Розплющування» хвильової функції внаслідок зменшення характерного розміру когерентності відбувається завжди, проте у разі збільшення кореляцій у системі цей процес суттєво прискорюється за рахунок зміни зв'язків у процесі еволюції. «Розплющування» хвильової функції системи змінює перекриття в підпросторі $r_{\perp}$ хвильових функцій частинок, що входять до системи, сприяючи подальшому зростанню кореляцій між частинками всередині системи та збуреного кластера.

Динаміка окремих макроскопічних елементів, які об'єднуються в одну велику систему, стає когерентною завдяки електромагнітній (ЕМ) взаємодії між собою та із зовнішнім полем. У цьому самоузгоджене ЕМ поле системи визначає фазу хвильової функції загальної когерентної системи.

Динаміка процесу еволюції — це динаміка числа і структури зв'язків, отже, фрактальної розмірності, параметра системи, ентропії та інформації. Для опису макроскопічних систем з великою кількістю N безструктурних елементів

(часток, мономерів) завжди вводиться поняття фізично нескінченно малого обсягу із середнім числом частинок у нескінченно малому обсязі N_{ph} . Таке розбиття відповідає деякому (адекватному даному стану системи) ступеню когерентності системи та різко скорочує число ступенів свободи в системі.

Ступінь упорядкованості системи характеризується числом можливих станів її елементів та ентропією зазвичай (за Больцманом і Шенноном) у вигляді логарифмічної функції:

$$S = K_k \ln(\Omega). \quad (1.38)$$

Множник: K_k у цій формулі вказує, які саме масштаби суттєві для завдання стану системи, і є адіабатичним інваріантом системи, що розглядається. Число можливих станів системи у визначенні ентропії може бути замінено ймовірностями станів системи $p(\Omega)$. Тоді формула, що виражає ентропію як функцію стану системи, є:

$$S = -K_k \ln(p(\Omega)). \quad (1.39)$$

Число Ω станів елементів системи, що містить багато елементів, як правило, величезно.

У наведених визначеннях ентропія розуміється як характеристика максимуму ймовірності стану системи — як функція, що описує найімовірніший стан системи. Ці визначення мають бути доповнені умовами нормування ентропії, які відносять визначення ентропії до повного числа N елементів системи та до її повної енергії. Термодинамічне визначення ентропії через передану системі кількість тепла ΔQ та температури T :

$$dS = \frac{\Delta Q}{T} m \quad (1.40)$$

не суперечить і є окремим випадком.

Повільна динаміка системи багатьох частинок характеризується адіабатичними інваріантами, що зберігаються (наприклад, дією і ентропією, імпульсом). Проте, синтез нових структур і станів можливий, лише за зміни

імпедансу (порушення адіабатичності динаміки системи, і адіабатичних інваріантів).

Поняття адіабатичного інваріанта ввів на початку XX століття П. Еренфест [24]. Якщо в коливальній системі повільно змінювати параметри, то її частота змінюватиметься. При цьому зовнішня сила здійснює роботу, яка безперервно змінює енергію та частоту коливань маятника, але відношення енергії W коливань маятника до його частоти ω залишатиметься постійним:

$$\frac{W}{\omega} = \text{const.} \quad (1.41)$$

Це постійне ставлення і є адіабатичний інваріант системи. Зокрема, фундаментальна постійна Планка $\hbar$ є адіабатичний інваріант на квантовому рівні, і має розмірність дії. Визначення теплових адіабатичних процесів у системі як процесів у системі без її теплового обміну з оточенням не протирічить визначенню Еренфеста.

Важливо відзначити, що фізичний сенс дії — обсяг фазового простору $\delta p \cdot \delta x$, а імпедансу — аспектне відношення елемента об'єму фазового простору $\delta p / \delta x$, нагадаємо, що розмірність дії Дж с, а імпедансу — Дж с/ x^2 для будь-якої розмірності узагальненої координати δx . Мінімальний обсяг фазового простору визначає співвідношення невизначеності.

Нижче буде розглянуто узагальнення цих співвідношень як фазове дотичне розшарування звичайного фазового простору, і на дотичне розшарування енергетичного фазового простору.

Загалом адіабатична система може отримувати енергію ззовні (наприклад, від середовища) при пов'язаних з цією енергією змін параметрів системи.

У системи, яка складається з багатьох елементів, ентропія її адіабатичного стану зберігається $dS = 0$. Однак при цьому в системі можливі внутрішні переходні процеси перерозподілу енергії, яка надійшла ззовні. За їх рахунок ентропія адіабатичної системи може зрости і в результаті відбувається зміна ентропії — $dS \geq 0$.

З огляду на визначення те, що ентропія є адіабатичний інваріант системи - характерна, ефективна дія, її величина є характерний розмір системи у фазовому просторі.

Нормування ентропії задає зв'язок енергії системи та одиниці виміру її розміру у фазовому просторі.

Розбиття фазового простору на ефективні осередки об'ємом $(2\pi\hbar)^3$ для кожної частки зазвичай обґрунтовується співвідношенням Гайзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.42)$$

однак, з урахуванням кореляцій між координатами та імпульсами частинок з коефіцієнтом кореляції k_{rp} , справедливніше загальне співвідношення Шредінгера-Робертсона:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-k_{rp}^2}}. \quad (1.43)$$

Форма співвідношень невизначеностей Шредінгера-Робертсона враховує динамічні властивості корельованої системи, однак це співвідношення для складної багатомасштабної системи має бути модифіковане з урахуванням можливої зміни структури, інформації та ентропії на k ієрархічному рівні:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{1-k_{rp}^2}} K_k \quad \text{або} \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar_{eff}}{2}, \quad \hbar_{eff} = \frac{\hbar}{\sqrt{1-k_{rp}^2}} K_k. \quad (1.44)$$

Це співвідношення призводить до елементарних осередків фазового простору N частинок та $3N$ ступенів свободи, які можуть мати довільно більшу величину

$$\Omega_{eff} \approx (l_{eff})^{6N}, \quad l_{eff} \approx \frac{\hbar_{eff}}{2\langle \Delta p_x \rangle}.$$

Зручно замість повного фазового об'єму системи Γ запровадити безрозмірний обсяг γ , вимірний в елементарних осередках фазового простору:

$$\gamma \approx \frac{\Gamma}{(2\pi\hbar_{eff})^{6N}}. \quad (1.45)$$

Виникнення розбиття фазового простору системи на такі великі елементарні обсяги узгоджується з виникненням у системі деякої кластерної, ієрархічної (фрактальної) структури. У процесі еволюції статистична вага $w(\gamma)$ та ентропія пов'язані співвідношенням: $\frac{d\gamma}{dt} = w(\gamma) \frac{dS}{dt}$, яке відображає те, що зростання статистичної ваги зменшує зміну ентропії:

$$dS = \frac{d\gamma}{w(\gamma)} \quad \text{або} \quad S(w) = \int_{\gamma(1)}^{\gamma(w)} \frac{d\gamma}{w(\gamma)}. \quad (1.46)$$

Константа при інтегруванні обрана із того, що ентропія одного стану дорівнює 0, а повне значення ентропії відповідає всьому обсягу фазового простору. У разі гладкого простору $w(\gamma) = \gamma$, але для складних систем фазовий простір кластеризований, має фрактальну розмірність D_f і задовольняє співвідношенням:

$$w(\gamma) = \gamma^{d_f}, \quad d_f = \frac{\ln w}{\ln l_{eff}}, \quad 0 \leq d_f \leq 1, \quad (1.47)$$

де $d_f = \frac{D_f}{6N}$ — фрактальна розмірність за одним ступенем свободи.

Підставляючи $w(\gamma) = \gamma^{d_f}$ в інтеграл для ентропії отримуємо вираз:

$$S = \int_1^{\gamma(w)} \frac{d\gamma}{\gamma^{d_f}} = \frac{\gamma^{1-d_f} - 1}{1-d_f} = \frac{w^{\frac{1-d_f}{d_f}} - 1}{1-d_f} = \frac{1}{d_f} \frac{w^{\frac{1}{d_f}-1} - 1}{\frac{1}{d_f} - 1} = -q \frac{p^{1-q} - 1}{1-q}, \quad q = \frac{1}{d_f} \geq 1, \quad (1.48)$$

який можна записати у звичному вигляді, якщо використовувати узагальнений логарифм $\ln_q(x)$ [25]:

$$S = -q \ln_q(p), \quad \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}. \quad (1.49)$$

Поряд з узагальненим логарифмом широко використовується і функція зворотна до узагальненого логарифму, яка називається узагальненою експонентою і задається співвідношенням: $\exp_q(x) = \{1 + (1-q)x\}^{\frac{1}{1-q}}$, при позитивному вираженні у

дужках. Макроскопічні властивості систем багатьох частинок та систем зі складною структурою описуються функціями розподілу за відповідними змінними. Нехай система з числом частинок має підсистему з виділеними властивостями когерентності та числом частинок N_{cog} . Ці числа частинок природно визначають параметри порядку співвідношенням: $\eta = \frac{N_{cog}}{N}$, $N = N_{cog} + N_g$.

Для визначення функцій розподілу складних систем частинок зручно використовувати термодинамічний формалізм, що дозволяє знайти найбільш ймовірну функцію розподілу з урахуванням обмежень, які визначають умови нормування за кількістю частинок та середньої енергії. Найімовірніші функції розподілу визначаються екстремумом ентропії. Для визначення необхідних екстремумів ентропії з урахуванням обмежень скористаємося методом множників Лагранжа. Необхідний оптимум ентропії для функції розподілу $f_i(\varepsilon_i)$ з урахуванням обмежень на кількість частинок N та енергію W :

$$\sum_{i=1}^w \varepsilon_i f_i = W, \quad \sum_{i=1}^w f_i = \eta, \quad (1.50)$$

знаходиться, як безумовний екстремум функції $\tilde{S}(f_i, \alpha, \beta)$, представляє собою усереднену з функцією f_i ентропію:

$$\sum_i S_i f_i = - \sum_i q \frac{(f_i^{1-q} - 1)}{1-q} f_i, \quad (1.51)$$

доповнену лінійною комбінацією функцій, що характеризують обмеження:

$$\tilde{S}(f_i, \alpha, \beta) = - \frac{q}{1-q} \sum_i (f_i^{2-q} - f_i) - \alpha \left(\sum_{i=1}^w f_i - \eta \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^w \varepsilon_i f_i - W \right). \quad (1.52)$$

Вимога безумовного екстремуму функції $\tilde{S}(f_i, \alpha, \beta)$ за всіма змінними дає систему рівнянь:

$$\frac{\partial \tilde{S}(f_i, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \left(\sum_{i=1}^w f_i - \eta \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{S}(f_i, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \left(\sum_{i=1}^w \varepsilon_i f_i - W \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{S}(f_i, \alpha, \beta)}{\partial f} = -\frac{q(2-q)}{1-q} f_i^{1-q} + \frac{q}{1-q} - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0. \quad (1.53)$$

Звідси слідує вираз для оптимальної функції розподілу через множники Лагранжа і коефіцієнт нерівноважності:

$$f_i = \left(\frac{1 + \frac{(q-1)}{q} \alpha}{(2-q)} \right)^{\frac{1}{1-q}} \left\{ 1 + (1-q) \left(-\frac{\varepsilon_i}{\frac{1}{\beta}(q + (q-1)\alpha)} \right) \right\}^{\frac{1}{1-q}} = A_q \exp_q \left(-\frac{\varepsilon_i}{T_q} \right).$$

Тут введено нормуючий множник, зворотний статистичній сумі та температурі, через множники Лагранжа:

$$T_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} (q + (q-1)\alpha), \quad A_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{Z_q(\alpha, \beta)} = \left[\frac{1 + \frac{(q-1)}{q} \alpha}{2-q} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (1.54)$$

Особливість у нормувальному множнику при $q \rightarrow 2$ говорить про Бозе, що виникає при цих параметрах — конденсації (фазовому переході). Щоб висловити множники Лагранжа через число частинок та енергію, треба скористатися співвідношеннями нормування, в яких у безперервному наближенні треба перейти від підсумовування до інтегрування і використовувати пропорційну щільність станів $\sqrt{\varepsilon}$. При обчисленні інтегралів, що виникають, зручно використовувати інтеграли виду:

$$\begin{aligned} I_k(q, k, T_q, \varepsilon) &= A_q \int dz [1 - (1-q)z]^{\frac{1}{1-q}} z^{k+1/2} = \\ &= A_q z^{k+3/2} \frac{2}{3+2k} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2} + k, \frac{1}{q-1}, \frac{5}{2} + k, (1-q)z \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Для нормування необхідно обчислити інтеграли за інтервалом від нуля до нескінченності і оскільки в нулі інтеграли виявляються рівними нулю, то в результаті нормування визначаються граничними значеннями (залежними від величини q):

$$b(q, 3/2) = \left[z^{3/2} \frac{2}{3} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{5}{2}, (1-q)z \right) \right] \Big|_{z \rightarrow \infty}, \quad (1.56)$$

$$b(q, 5/2) = \left[z^{5/2} \frac{2}{5} {}_2F_1 \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{7}{2}, (1-q)z \right) \right] \Big|_{z \rightarrow \infty}. \quad (1.57)$$

Скориставшись цими позначеннями, отримуємо умови нормування:

$$A_q b(q, 3/2) = \eta, \quad A_q b(q, 5/2) = \frac{W}{T_q} \quad \text{або} \quad \frac{b(q, 5/2)}{b(q, 3/2)} = \frac{W}{\eta T_q}, \quad A_q = \frac{\eta}{b(q, 3/2)}. \quad (1.58)$$

Звідси отримуємо рівняння:

$$\alpha = \left[\left(\frac{\eta}{b(q, 3/2)} \right)^{1-q} (2-q) - 1 \right] \frac{q}{q-1} = \left[\left(\frac{b(q, 3/2)}{\eta} \right)^{q-1} (2-q) - 1 \right] \frac{q}{q-1},$$

$$\frac{b(q, 5/2)}{b(q, 3/2)} q \eta = \frac{W}{1 + \frac{q-1}{q} \alpha} \beta \quad (1.59)$$

та подання множників Лагранжа через параметр порядку системи (за кількістю частинок) та енергії, укладеної в підсистемі, а також температуру та нормувальну константу (число частинок) у функції розподілу:

$$T_q(q, W) = q \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{(q-1)}{q} \alpha \right) = q \frac{1}{\beta} \left(\frac{\eta}{b(q, 3/2)} \right)^{1-q} (2-q) = \frac{b(q, 3/2)}{b(q, 5/2)} \frac{1}{\eta} W,$$

$$A_q = \frac{\eta}{b(q, 3/2)}, \quad \beta = \left[q(2-q) \frac{b(q, 5/2)}{b(q, 3/2)^{2-q}} \eta^{2-q} \right] \frac{1}{W}, \quad (1.60)$$

$$\alpha = \left[\left(\frac{\eta}{b(q, 3/2)} \right)^{1-q} (2-q) - 1 \right] \frac{q}{q-1}.$$

Неекстенсивні розподіли переходять у рівноважні функції розподілу при $q \rightarrow 1$. Аналіз поведінки рішень показує, що за $q < 1$ розподіл локалізується із збільшенням відхилення від 1, а при $q > 1$ збільшення відхилення призводить до зростання ділокалізації функції розподілу, а разом з нею і збільшення характерної дисперсії фізичних величин, що залежать від імпульсів та енергій.

У напрямку паралельного прискорення колективні процеси йдуть з просторовими масштабами, що скорочуються, а в напрямках ортогональних

прискоренню просторові масштаби різко зростають (прагнуть до нескінченності) і розподіли мають вигляд:

- у напрямку вздовж прискорення, $q_{\parallel} \leq 1$, значення енергії $\frac{mu^2}{2}$ дискретні, обмежені зверху, а $T_{\parallel}$ обмежена знизу і може наростати:

$$f_{\parallel}(w_{\parallel}, T_{\parallel}, q_{\parallel}) = A_{\parallel}(q_{\parallel}, T) \left[1 - (1 - q_{\parallel}) \frac{w_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right]^{\frac{1}{1-q_{\parallel}}} = A_{\parallel}(q_{\parallel}, T) \exp_{q_{\parallel}} \left[- (1 - q_{\parallel}) \frac{w_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right];$$

- у поверхні, ортогональній прискоренню, $q_{\perp} \geq 1$, енергія $\frac{mu_{\perp}^2}{2}$ і $T_{\perp}$ безперервні величини, які можуть змінюватися в будь-яких необмежених інтервалах та $T_{\perp}$ може як необмежено зростати, і прагнути нулю:

$$\begin{aligned} f_{\perp}(w_{\perp}, T_{\perp}, q_{\perp}) &= A_{\perp}(q_{\perp}, T_{\perp}) \left[1 - (1 - q_{\perp}) \frac{w_{\perp}}{T_{\perp}} \right]^{\frac{1}{1-q_{\perp}}} = \\ &= A_{\perp}(q_{\perp}, T_{\perp}) \exp_{q_{\perp}} \left[- (1 - q_{\perp}) \frac{w_{\perp}}{T_{\perp}} \right]. \end{aligned}$$

В умовах наближення до рівноважних $q \rightarrow 1$ анізотропія зникає. Чим більший ступінь нерівноважності системи (що відображається у відхиленні параметра нерівноважності q від 1), тим паче вираженим стають характеристики ККС. Фізичні властивості систем багатьох частинок у першому наближенні впливають із статистичної незалежності частинок системи. Виявляються застосовними статистика Пуассонівських та Марківських процесів.

Дія масових сил у формі домінуючих збурень змінює цю ситуацію. Багатомасштабні кластерні структури, що виникають у неінерційних системах відліку, є зручною та природною моделлю еволюції структури зв'язків складних систем. При переході на глибший просторовий, ієрархічний рівень, кожен статистичний ансамбль поділяється на безліч дрібніших подансамблів, які у свою чергу складаються з ще дрібніших субансамблів наступного рівня просторових масштабів. Набір подансамблів та субансамблів відображається складністю

системи. Складність $C_q(p_1, \dots, p_N)$ аналогічно ентропії, характеризує безладдя ієрархічних зв'язків у повній системі. Для управління системою необхідно визначити складність ієрархічної системи та параметри, управляючі складністю. Із загальної теорії ієрархічних систем випливає, що можливі лише три основні типи ієрархічних систем:

- Вироджені ієрархічні системи. На кожній ієрархічній «поверхі» розгалужується лише одна підсистема. Завдяки цьому зі зростанням «поверховості» системи кількість підсистем зростає лінійно.
- Регулярні ієрархічні системи. На кожній ієрархічній «поверхі» розгалужуються всі підсистеми однаковим чином.
- Самоподібні ієрархічні системи. У самоподібних системах кількість підсистем з числом «поверхів» наростає статечним чином.

Термодинаміка ієрархічної системи найбільш загальним чином будується на неаддитивних узагальненнях логарифму та експонентів: $\ln_q(x)$, $\exp_q(x)$ і, природно, для складності з'являється подібний вираз для ентропії Тсалліса:

$$C_q(p_1, \dots, p_N) = -\sum_{i=1}^N p_i \ln_q p_i = -\frac{\sum_{i=1}^N p_i^{2-q} - 1}{1-q}. \quad (1.61)$$

Нехай N станів верхнього рівня ієрархії розподілено за ансамблями, які прономеровані індексом $i = 1, \dots, n$, кожен з яких містить N_i станів.

У свою чергу N_i станів згруповані в m_i подансамблів, що містять по N_{ij} елементів, для яких виконується співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{m_i} N_{ij} = N_i, \quad \sum_{i=1}^n N_i = N. \quad (1.62)$$

Скориставшись цими співвідношеннями, можна отримати зв'язок складнощів між найближчими рівнями ієрархії з урахуванням визначення

ймовірності $p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}$, $p_i = \frac{N_i}{N}$:

$$C_{Q_q}(p_{11}, \dots, p_{nm_n}) = C_{Q_q}(p_1, \dots, p_n) + \sum_{i=1}^{N_n} p_i^{Q_q} C_{Q_q}\left(\frac{p_{i1}}{p_i}, \dots, \frac{p_{im_i}}{p_i}\right), \quad (1.63)$$

де введено новий параметр Q_q , який пов'язаний із параметром q_- та параметром порядку: $Q_q = 2 - q_-$, $Q_q = 1 + \eta$, $1 < Q_q < 2$. Скориставшись розподілом ймовірності за рівнями у вигляді: $p_n = A_q \left(\Delta + (Q_q - 1)(n + 1) \right)^{-\frac{1}{Q_q - 1}}$, $A_q = (2 - Q_q) \left((Q_q - 1) + \Delta \right)^{\frac{2 - Q_q}{Q_q - 1}}$, з параметром Δ , характеризує ступінь розкиду станів ієрархічної структури і можна отримати наближене диференціальне рівняння для складності:

$$\frac{dC(n)}{dn} = \frac{Q_q A_q^{Q_q}}{2} (n + 1) \left\{ \Delta + (Q_q - 1)(n + 1) \right\}^{-\frac{3Q_q - 2}{Q_q - 1}} \quad (1.64)$$

Інтегрування цього рівняння дає рішення щодо розподілу складності за рівнями ієрархії:

$$C(n) = C_\infty - \frac{p_n^{Q_q}}{2(2Q_q - 1)} \left[1 + Q_q (n + 1) \left(\frac{p_n}{A_q} \right)^{Q_q - 1} \right],$$

$$C_\infty = \frac{1}{2} - \frac{(2 - Q_q)^{Q_q}}{(Q_q - 1)^{1 + Q_q}} \frac{1 + \frac{\Delta}{2Q_q - 1}}{\left(1 + \frac{\Delta}{Q_q - 1} \right)^{1 + Q_q}} \quad (1.65)$$

Еволюція ієрархічного ансамблю у часі визначається характерним тимчасовим масштабом дифузії τ_d та часом виходу на стаціонарний режим τ :

$$\tau_d = \frac{\Delta^{2 - Q_q}}{D} n^{Q_q} \tau_0 = \frac{\Delta^{1 - \eta}}{D} n^{1 + \eta} \tau_0, \quad \tau = n^2 \tau_0. \quad (1.66)$$

Тут D — коефіцієнт дифузії, τ_0 — характерний час переходу між сусідніми рівнями.

За малих часів $t \ll \tau_d$ реалізується аномальний закон дифузії:

$$n(t) \approx (Q_q)^{1/Q_q} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{1/Q_q} \approx (1 + \eta)^{1/(1 + \eta)} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{1/(1 + \eta)}, \quad (1.67)$$

а на великих часах реалізується режим звичайної дифузії $n(t) \approx \sqrt{2 \frac{t}{\tau_0}}$, при цьому розподіл за рівнями структури в залежності від часу має вигляд:

$$p_n(t) = p_n \left[1 - \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^{-\frac{1}{Q_q-1}} \right]_+ = p_n \left[1 - \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^{-\frac{1}{\eta}} \right]_+, \quad \tau_n = \frac{\Delta}{Q_q D} n \tau_0 = \frac{\Delta}{(1+\eta) D} n \tau_0. \quad (1.68)$$

Розподіл складності за рівнями ієрархії та часу:

$$C(n, t) = \frac{p_n^{Q_q}(t)}{2(2Q_q - 1)} \left\{ \left[\left(\frac{p_0}{p_n} \right)^{Q_q} - 1 \right] + Q_q \left[\left(\frac{p_0}{p_n} \right)^{2Q_q-1} - (n+1) \right] \left(\frac{p_n}{A_q} \right)^{Q_q-1} \right\}. \quad (1.69)$$

У самоподібному режимі коефіцієнт неадитивності Q_q задовольняє співвідношенню $\frac{1}{\eta} \equiv \frac{1}{Q_q - 1} = \frac{a-1}{d}$, $a > 1$ — коефіцієнт розгалуження структури, $d \leq 1$ — ефективна розмірність ієрархічної структури.

Для ефективного застосування загальної теорії ієрархічних структур необхідно встановити відповідність між фізичними та математичними змінними. Насамперед необхідно зрозуміти фізичний зміст номера ієрархічного «поверху». Найбільш природним із викладеного в попередньому параграфі пов'язати номер ієрархії та порядок найменшої похідної за годиною від швидкості для кулі, в якому забезпечується відхилення від рівноваги (порядок дотику кулі до простору швидкостей).

Коли ініціюється вибуховий режим, просторові масштаби кореляції l_{cor} нарастають з часом статечним чином і перевищують будь-яке кінцеве значення за кінцевий час, близьке до деякого значення, званого моментом вибуху t_{ex} :

$$l_{cor} \approx l_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{ex}} \right)^\gamma}. \quad (1.70)$$

Зазначимо, що вибуховий режим є власним, стаціонарним станом регуляризованого рівняння динаміки — тобто узагальненого динамічного рівняння з

урахуванням пам'яті в системі (див. [29]) та відповідає наступному відношенню прискорень сусідніх порядків:

$$\frac{a_v}{a} = \frac{2 + \gamma}{\left(1 - \frac{t}{t_{ex}}\right)^{t_{ex}}}, \quad (1.71)$$

яке демонструє різке зростання прискорень із зростанням його порядку. Для того, щоб зв'язати параметр порядку, рівень ієрархії, коефіцієнт нерівноважності та прискорення необхідно порівняти зміну прискорень з переходом з рівня на рівень за цією залежністю та час ініціювання відповідного рівня ієрархії за співвідношенням зростання складності з часом.

1.6. Варіаційний принцип динаміки систем частинок

Варіаційний принцип еволюції динамічної системи формулюється, як узагальнення принципу Гаусса—Герца, а функціонал варіаційного принципу еволюції є узагальненням функції примусу Гаусса, залежить тільки від прискорення щодо одного дотичного шару. Для розуміння сенсу узагальнення розглянемо докладніше вихідний принцип Гауса — найменшого примусу для систем зі зв'язками, який стверджує, що дійсний рух відрізняється від інших можливих рухів системи.

Тобто положення, які займають точки системи в момент $t + \Delta t$ у дійсному русі, виділяються між усіма положеннями, що допускаються зв'язками, тим, що для них міра примусу:

$$Z_G = \sum_{i=1}^N m_i s_i^2, \quad (1.72)$$

має мінімальне значення (тут s_i — довжина вектора між точками, що представляють справжнє та будь-яке можливе положення точки).

Особливістю принципу найменшого примусу Гауса є специфічна варіація траєкторії, яка здійснюється варіацією лише прискорень при фіксованих положеннях та швидкостях частинок t задані положення $r_i(t)$ та швидкості $u_i(t)$

всіх частинок системи, а прискорення ми можемо розпоряджатися на свій розсуд, не порушуючи, однак, заданих зв'язків.

Заміна дійсного прискорення кожної частки $\vec{a}_i(t)$ у момент часу t величиною $\vec{a}_i^* = \vec{a}_i(t) + \delta\vec{a}_i(t)$ призводить до того, що положення частинок у момент часу $t + \tau$ внаслідок варіації прискорення змінюється і може бути представлено рядом Тейлора: $r_i(t + \tau) = r_i(t) + u_i(t)\tau + \frac{1}{2}a_i^*(t)\tau^2 + \dots$. Скориставшись цим рядом, представимо відхилення частинок від реальної траєкторії у формі:

$$s_i(t + \tau) = r_i(t + \tau) - r_i(t) = u_i(t)\tau + \frac{1}{2}a_i^*(t)\tau^2 + \dots \quad (1.73)$$

Внаслідок того, що ми зафіксували початкові значення координат і швидкостей частинок системи, лінійні варіації дорівнюють нулю і, вважаючи малим з точністю до другого порядку, отримуємо:

$$s_i(t + \tau) = \frac{1}{2}\delta a_i(t)\tau^2, \quad \delta a_i = a_i^* - \frac{F_i}{m_i}. \quad (1.74)$$

Нехай тепер система багатьох частинок піддається дії масових сил F_{mz} та моментів M_{mz} , так що всі частинки системи, опиняються в неінерційній системі відліку з деякими когерентними аксіальними прискоренням $\vec{a}_{cog} = a_z$ вздовж осі Z та обертальним прискоренням $\mathcal{Q}(t) \equiv \mathcal{Q}_z(t)$ навколо осі Z , збігається у напрямку з когерентним прискоренням та дією масової сили. Така досить загальна картина колективних, когерентних рухів відповідає тому, що загальний 3-мірний простір системи представляється як добуток двох підпросторів: одновимірного (вздовж аксіального прискорення) та ортогональної поверхні з когерентним прискоренням $a_{\perp}$, містить обертальні рухи навколо осі (навколо напрямку прискорення).

Тоді повна динаміка системи складається з динаміки частинок та когерентної динаміки системи як цілого, яка представлена рухом у напрямку когерентного прискорення та обертання системи як цілого навколо виділеної осі. У цьому когерентна динаміка відбивається у еволюції всіх колективних змінних.

Умови оптимізації обертального руху системи навколо деякої осі z можна отримати аналогічно до оптимізації аксіального руху. Задамо в певний момент часу t кут повороту $\varphi(t)$ та кутову швидкість $\omega(t)$ системи, а кутові прискорення можемо варіювати не порушуючи заданих зв'язків, тоді зміна кута:

$$\psi(t+\tau) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t) = \omega(t)\tau + \frac{1}{2}\mathcal{G}(t)\tau^2 + \dots \quad (1.75)$$

Заміна дійсного кутового прискорення системи $\mathcal{G}(t)$ у момент часу t величиною $\mathcal{G}^*(t) = \mathcal{G}(t) + \delta\mathcal{G}(t)$ з урахуванням рівності нулю варіацій когерентних швидкостей обертання та кутів призводить до співвідношення:

$$\psi(t+\tau) = \frac{1}{2}\delta\mathcal{G}(t)\tau^2. \quad (1.76)$$

Звідки для зміщення між положеннями істинного обертального та будь-якого можливого положення системи:

$$s_\varphi(t+\tau) = l_\perp \psi(t+\tau) = \frac{1}{2}l_\perp \delta\mathcal{G}(t)\tau^2, \quad \delta\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}^*(t) - \frac{M_{mz}}{I_z}. \quad (1.77)$$

Для когерентних аксіальних рухів співвідношення, що визначають відповідні зсуви, мають вигляд подібний. Анізотропія простору відображається в тому, що як базові простори, так і дотичні простори представляються у вигляді прямого добутку одновимірному простору вздовж дії прискорення та ортогональної поверхні.

Аксіальний рух таким чином розкладається на дві складові: поздовжній та ортогональний, на такі ж складові розбиваються і зміщення, які варіюються від реального руху:

$$s_z(t+\tau) = \frac{1}{2}\delta a_z(t)\tau^2, \quad \delta a_z = a_z^* - \frac{F_{mz}}{m_{eff}},$$

$$s_\perp(t+\tau) = \frac{1}{2}\delta a_\perp(t)\tau^2, \quad \delta a_\perp = a_\perp^* - \frac{F_{m\perp}}{m_{eff}}. \quad (1.78)$$

Ці співвідношення не залежать від виду зв'язків, які враховуються лише при виборі варіацій $\delta a_i(t)$ та $\delta \vec{g}_i(t)$. Важливо, що при варіюванні Гауса (через

фіксовані швидкості) варіації прискорень $\delta \vec{a}_i^*$ та $\delta \vec{g}^*(t)$ визначаються рівняннями такого ж виду, що і для віртуальних переміщень δr_i и $\delta \varphi(t)$ відповідно. Скориставшись виразами для усунення та поворотів як окремих частинок, так і всієї системи за малий інтервал часу Δt (відповідно до визначення примусового заходу Z_G) можна отримати вираз для повної функції, оптимізація якої дає динаміку частинок і еволюцію параметрів структури системи. Цю функцію можна назвати функцією динамічної гармонізації Z_{dh} та подати у вигляді суми двох вкладів

$$Z_{dh}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N, a_z, a_\perp, \mathcal{G}_z\right) = Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right) + Z_{cog}(a_z, a_\perp, \mathcal{G}_z), \quad (1.79)$$

де:

• Перший внесок

$$Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right) = \sum_{i=1}^N m_i s_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{(\Delta t)^2}{2} \left(m_i \vec{a}_i^* - \vec{F}_i \right) \right]^2 = \sum_{i=1}^N K_i \left(m_i \vec{a}_i^* - \vec{F}_i \right)^2,$$

$$K_i = m_i \frac{(\Delta t)^4}{4} \quad (1.80)$$

дає динаміка всіх частинок ансамблю без урахування когерентності;

• Другий внесок

$$Z_{cog}(a_z, a_\perp, \mathcal{G}_z) = K_z \left(m_z a_z^* - F_{mz} \right)^2 + K_\perp \left(m_\perp a_\perp^* - F_{m\perp} \right)^2 + K_\omega \left(I_z \mathcal{G}_z^* - M_{mz} \right)^2$$

$$K_z = m_z \frac{(\Delta t)^4}{4}, K_\omega = l_{\perp 0}^2 m_{eff} \frac{(\Delta t)^4}{4} \quad (1.81)$$

дає когерентна динаміка системи як цілого.

Видно, що безумовна мінімізація квадратичної функції $Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right)$ щодо прискорень усіх частинок призводить до ідеальних рівнянь Ньютона $m_i \vec{a}_i^* - \vec{F}_i = 0$.

Зазвичай умови зв'язку для частинок задаються як функціональні співвідношення між координатами частинок, що входять в систему. Оптимізація тієї ж

функції $Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right)$ з урахуванням умов зв'язку призводить до реальних рівнянь динаміки системи частинок. Умови зв'язку для колективного стану системи (для оптимізації функції гармонізації $Z_{cog}(a_z, a_{\perp}, \vartheta_z)$) виглядають як співвідношення між просторовими масштабами системи на нижньому рівні еволюції та параметрами внутрішньої структури системи. Оптимізація функції гармонізації $Z_{cog}(a_z, a_{\perp}, \vartheta_z)$ по прискоренням характерних масштабів системи на цьому нижчому рівні еволюції із зазначеними умовами зв'язку дозволяють отримати рівняння еволюції другого порядку для параметрів внутрішньої структури. Причому другий порядок рівнянь є найменший порядок для рівнянь еволюції і пов'язаний з тим, що синтез керується прискореннями мінімального порядку. Другий порядок рівнянь еволюції фізично означає, що на першому ієрархічному рівні (першому горизонті еволюції з мінімальною пам'яттю) у параметрів структури та розподілу ймовірностей з'являється своя інерційність (структурна інерційність).

1.7. Формалізація фізичних явищ у вигляді математичних моделей та методи їх ідентифікації для вирішення інженерних задач

Проведений у попередніх підрозділах аналіз кінетичних, термодинамічних процесів та енергії зв'язку кластерів заряджених частинок формує необхідне фундаментальне підґрунтя для переходу до головного етапу дослідження — побудови строгих математичних моделей. Відповідно до завдань технічних наук та напрямків спеціальності, присвяченої математичному моделюванню, феноменологічний опис природи фізичних явищ не є самоціллю, а виступає виключно як базис для розробки нових та модифікації існуючих нетрадиційних математичних моделей.

Об'єктом математичного моделювання в контексті даного дисертаційного дослідження виступають процеси просторово-часової еволюції пучків заряджених частинок як інформаційно-динамічної системи всередині реальних

технічних об'єктів — лінійних прискорювальних систем з трубками дрейфу у формі еліптичних циліндрів. Відповідно, виникає об'єктивна необхідність у зведенні складних квантових, термодинамічних та фрактальних взаємодій до системи формалізованих диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь. Такий підхід дозволяє відійти від опису індивідуальної фізики кожної окремої частинки і перейти до макроскопічного інженерного розрахунку, прогнозування поведінки пучка та структурно-параметричної оптимізації геометричних характеристик прискорювального тракту.

Традиційні класичні евклідові математичні моделі механіки суцільних середовищ, що базуються на рівняннях Власова-Пуассона чи Нав'є-Стокса, часто виявляються обчислювально неефективними або концептуально неповними при описі еволюції надщільно скомпенсованих пучків заряджених частинок. Це пов'язано з виникненням ефектів просторової самоорганізації, формуванням так званого «галло» пучка та складної ієрархії розподілу густини заряду на різних масштабах. Тому у даній роботі фрактальні підходи та закони формування кластерів зі скейлінгом використовуються принципово в іншому статусі — як нетрадиційний вид математичної моделі, призначений для вирішення суто прикладної технічної задачі фокусування пучка. Математична формалізація фрактальної розмірності фазового простору пучка виступає потужним інструментом макроскопічного усереднення характеристик системи, що кардинально знижує розмірність задачі під час подальшого комп'ютерного моделювання. Якщо класична N -тілесна модель прямого інтегрування вимагає розв'язання системи з величезної кількості диференціальних рівнянь, що відповідає кількості частинок у реальних прискорювачах (від 10^9 до 10^{11}), то застосування запропонованої фрактальної апроксимації дозволяє перейти до інтегро-диференціальної континуальної моделі з дробовими просторовими похідними. Для опису еволюції форми та щільності пучка в еліптичних трубках дрейфу запроваджується узагальнена математична модель розподілу густини просторового заряду $\rho(x,t)$, яка базується на апараті дробового числення:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \nabla^\alpha (D_\alpha \nabla^\alpha \rho(x,t)) + F(E, H, \rho, x, t), \quad (1.82)$$

де α — векторний параметр дробового інтегрування, що функціонально пов'язаний із фрактальною розмірністю простору внутрішніх зв'язків D_f ; D_α — тензор узагальненої дифузії пучка в конфігураційному просторі; $F(E, H, \rho, x, t)$ — нелінійна функція зовнішніх джерел та збурень, яка формалізує керуючий вплив зовнішніх фокусуючих електромагнітних полів (електричного поля E та магнітного H), що формуються специфічною геометрією еліптичних трубок дрейфу. Застосування дробового показника α у математичній моделі $(1.N+1)$ не є фізичною абстракцією, а являє собою цілеспрямований математичний прийом, який дозволяє алгоритмічно врахувати ефекти «пам'яті» системи, просторової нелокальності та дальності кулонівських сил без необхідності прямого відстеження парних взаємодій кожної частинки. Ця нетрадиційна модель безпосередньо орієнтована на оптимізацію обчислювальних витрат при проектуванні об'єктів нової техніки, оскільки переводить задачу з класу багатовимірних дискретних у клас нелокальних континуальних з меншою кількістю ступенів вільностей. Для забезпечення адекватності розроблених нетрадиційних теоретичних моделей та можливості їх застосування у прикладних інженерних розрахунках критично важливим є етап їх параметричної ідентифікації. Розроблена математична модель містить ряд специфічних параметрів (зокрема, структурний параметр фрактальної розмірності та тензор нелокальної дифузії), які не можуть бути виміряні безпосередньо, а повинні бути ідентифіковані на основі масивів первинної інформації — даних натурних експериментів на прискорювачах-прототипах або результатів надточних еталонних мікроскопічних симуляцій. В рамках даного дисертаційного дослідження задача ідентифікації параметрів фрактальної математичної моделі формулюється як екстремальна задача мінімізації функціоналу нев'язки між розрахунковими значеннями розподілу щільності пучка ρ_{calc} та експериментально заданими (бажаними) цільовими

характеристиками ρ_{exp} , які необхідно отримати на виході з еліптичної трубки дрейфу заданої геометрії:

$$J(\alpha, D_\alpha, \vec{p}) = \int_0^T \int_\Omega \omega(x, t) \left\| \rho_{calc}(x, t, \alpha, \vec{p}) - \rho_{exp}(x, t) \right\|^2 d\Omega dt \rightarrow \min_{\alpha, D_\alpha, \vec{p}}, \quad (1.83)$$

де $\vec{p}$ — вектор керованих геометричних та електрофізичних параметрів прискорювальної системи (великі та малі півосі еліптичного перерізу трубки дрейфу, потенціали на електродах тощо); Ω — область фазового або конфігураційного простору, в якій розглядається динаміка пучка; $\omega(x, t)$ — вагова функція, що визначає значущість збігу розрахункових та експериментальних даних у різних областях прискорювача (наприклад, пріоритет фокусування ядра пучка над його периферією). Для розв'язання оберненої задачі ідентифікації в умовах застосування нетрадиційних інтегродиференціальних моделей розроблено алгоритм на базі градієнтних методів першого порядку (зокрема, методу спряжених градієнтів з адаптивним вибором кроку), де градієнт цільового функціоналу в просторі параметрів обчислюється шляхом розв'язання відповідної спряженої крайової задачі. Окрема увага приділяється ідентифікації структурного параметра моделі — фрактальної розмірності D_f . Вона виконується шляхом логарифмічної апроксимації за методом найменших квадратів на вибірці мікроскопічних станів системи:

$$D_f \approx \frac{M \sum_{i=1}^M (\ln r_i \ln N_i) - \sum_{i=1}^M \ln r_i \sum_{i=1}^M \ln N_i}{M \sum_{i=1}^M (\ln r_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^M \ln r_i \right)^2} \quad (1.84)$$

де N_i — кількість елементів структури (зв'язків або частинок) у локальній сфері радіуса r_i , а M — загальна кількість точок вибірки. У прикладному інженерному аспекті ідентифікований за формулою вище параметр D_f перетворюється на базову структурну константу макромоделі, що передається у вхідні дані для глобального розрахунку динаміки пучка в прискорювальному тракті, таким

чином усуваючи необхідність повторного розрахунку мікроскопічної взаємодії на кожному часовому кроці.

Незважаючи на високу описову здатність, отримані вище нелінійні рівняння динаміки систем з внутрішньою фрактальною структурою зв'язків є надзвичайно складними для прямого чисельного розв'язання. Їх безпосереднє використання в контурах систем автоматизованого проектування або в режимі реального часу для синтезу законів керування пучком стикається зі значними обчислювальними труднощами. Тому обов'язковим і критично важливим етапом математичного моделювання для технічних додатків є проведення процедур лінеаризації та апроксимаційних перетворень вихідних нелінійних рівнянь.

Основний підхід, реалізований у роботі, базується на концепції динаміки збурень навколо програмної (номінальної) траєкторії руху. Нехай вектор-функція $\vec{X}_0(t)$ описує ідеальний, заздалегідь розрахований стан сфокусованого пучка, який рухається вздовж осі еліптичних трубок дрейфу при номінальних значеннях електромагнітних полів $\vec{U}_0(t)$. Тоді реальний стан системи подається як $\vec{X}(t) = \vec{X}_0(t) + \Delta\vec{X}(t)$, де $\Delta\vec{X}(t)$ — вектор малих відхилень, спричинених кулонівським відштовхуванням (просторовим зарядом), фрактальною дифузією та крайовими ефектами полів. Розкладаючи вихідну нелінійну модель $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Phi}(\vec{X}, \vec{U}, t)$ в ряд Тейлора в околі номінальної траєкторії і відкидаючи доданки вищих порядків малості, отримуємо лінеаризовану математичну модель динаміки збурень:

$$\frac{d(\Delta\vec{X})}{dt} \approx A(t)\Delta\vec{X} + B(t)\Delta\vec{U} + W(\alpha, D_f, t). \quad (1.85)$$

Матриця Якобі $A(t) = \left. \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}} \right|_{\vec{X}_0, \vec{U}_0}$ визначає власну стійкість динаміки відхилень

частинок пучка в заданій структурі прискорювача. Матриця керування

$B(t) = \left. \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{U}} \right|_{\vec{X}_0, \vec{U}_0}$ кількісно описує чутливість просторового розподілу пучка до

варіацій зовнішніх керуючих полів $\Delta \vec{U}$ еліптичних трубок дрейфу, що безпосередньо використовується для синтезу алгоритмів оптимального фокусування. Вектор $W(\alpha, D_f, t)$ є апроксимованим збуренням, що акумулює в собі невраховані нелінійності вищих порядків та вплив фрактальної структури системи (залежить від ідентифікованих параметрів α та D_f).

Крім лінеаризації за станом, важливим етапом є апроксимація інтегро-диференціальних операторів (дробових похідних), які забезпечують ефект «пам'яті» у моделі. Для підготовки моделі до чисельного інтегрування застосовується дискретна апроксимація на основі скінченно-різницевого наближення Грюнвальда-Летнікова. На рівномірній часовій сітці $t_k = k\tau$ (де τ — крок інтегрування) нелокальний оператор дробової похідної замінюється скінченною сумою відповідних значень функції з розрахунковими ваговими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^\alpha \rho(x, t_k)}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} \rho(x, t_{k-j}) \quad (1.N + 5). \quad (1.86)$$

Враховуючи фізичну природу процесів релаксації у прискорювачах, вплив глибокої передісторії пучка швидко згасає. Тому нескінченний ряд у наближенні Грюнвальда-Летнікова усикається до фіксованого «вікна пам'яті» розміром L кроків. Це апроксимаційне перетворення має вирішальне значення для обчислювальної математики: воно перетворює складне інтегро-диференціальне рівняння із сильною нелокальністю на рекурентну систему лінійних алгебраїчних рівнянь стрічкової або розрідженої структури. Завдяки цьому відкривається можливість застосування стандартних високоефективних матричних методів та паралельних обчислювальних алгоритмів (наприклад, методів підпросторів Крилова, GMRES) для швидкого чисельного аналізу.

Таким чином, усі розглянуті раніше загальнофізичні явища та термодинамічні закономірності було успішно формалізовано, зведено до рівня нетрадиційних математичних моделей, ідентифіковано та адаптовано за допомогою методів лінеаризації й апроксимації. Це створює надійне

алгоритмічне підґрунтя для подальшого комп'ютерного моделювання, оптимізації та практичного проектування систем фокусування пучків заряджених частинок у лінійних прискорювачах нового покоління.

1.8. Висновки до розділу 1

1. У даному розділі розроблено та обґрунтовано підхід до математичного моделювання заряджених частинок як складних динамічних систем із внутрішньою структурою зв'язків.

2. Запропоновано узагальнену модель, що враховує колективні ефекти, взаємодію між частинками та вплив зовнішніх електромагнітних полів у лінійних прискорюючих системах.

3. Визначено варіаційні принципи, що описують еволюцію механічних та електрофізичних систем з урахуванням аналогій між механічними та електрофізичними системами. Отримано рівняння для фрактальної розмірності.

РОЗДІЛ 2.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ, ВАРІАЦІЇ СТРУКТУРИ ЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЧАСТИНОК ТА ЇХ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

2.1. Моделі завдання зв'язків у системі частинок

Метою цього підрозділу є побудова математичних моделей систем частинок зі змінною структурою зв'язків, а також формулювання узагальнених варіаційних принципів для таких систем і отримання рівнянь еволюції, придатних для подальшої чисельної реалізації. Для виведення диференціальних рівнянь руху з варіаційного принципу еволюції відкритих систем необхідно насамперед задати формалізований опис зв'язків у системі. У класичній механіці зв'язки зазвичай задаються як алгебраїчні або диференціальні співвідношення між координатами частинок. Такий підхід є коректним для систем із сталою інерційністю та незмінною масою. Однак у випадку еволюційних систем зі змінною структурою зв'язків ситуація суттєво ускладнюється. Тут змінюються не лише координати в конфігураційному просторі, але й параметри, що характеризують внутрішню організацію системи: кореляції між частинками, фрактальні характеристики, ефективні розмірності, ймовірнісні параметри тощо. У таких умовах поняття інерційності набуває узагальненого характеру і вже не може бути визначене лише через сумарну масу системи. Зв'язки в подібних системах природно описуються співвідношеннями між зовнішніми геометричними масштабами та внутрішніми структурними параметрами. Для фізичних систем, що перебувають у режимі еволюції або поблизу критичних станів (зокрема фазових переходів із масштабною інваріантністю), такими характеристиками є:

- співвідношення між зовнішніми поздовжніми l_a та поперечними розмірами $l_{\perp}$ кластера, обсягом кластера, числом частинок у кластері N та фрактальною розмірністю D_f .

- Співвідношення невизначеності між характерними просторовими масштабами l_a , $l_\perp$ конфігураційного та характерними швидкостями в поздовжньому та поперечних напрямках $\langle u \rangle_a$, $\langle u \rangle_\perp$ енергетичного простору системи для колективних когерентно-корельованих станів системи та співвідношення для деформації відповідних підпросторів.
- Характеристики структури поздовжньої та поперечної компонент $q_a, q_\perp$ енергетичного простору відповідно.

Розглянемо систему з N частинок, яка однорідна в одному із просторових напрямків з характерним розміром l_a у цьому напрямку. Це може бути система частинок у вигляді кластера з максимальним зовнішнім радіусом R_N . Внутрішню структуру системи в координатному просторі характеризуватимемо фрактальною розмірністю D_f (або іншими дробовими розмірностями, що характеризують кореляції та зв'язки в системі) з енергією зв'язку $B = B(N, D_f)$. У такому випадку зв'язки в координатному просторі можна задати функціонально як:

$$R_N = \psi_1(N, D_f, l_a), \quad l_a = \psi_2(N, D_f, R_N). \quad (2.1)$$

Енергія зв'язку та характерні розміри системи надалі використовуються при варіації як поступального (аксіального), так і обертального руху системи. Для опису еволюції прискорень необхідно додатково ввести умови, що впливають із нерівноважної термодинаміки. Ці зв'язки можна отримати з аналізу нерівноважної термодинаміки системи, якщо крім фрактальної розмірності ввести параметр нерівноважності для поздовжнього та поперечних напрямків $q_a, q_\perp$. У загальному вигляді рівняння зв'язку для дотичного розшарування набувають вигляду:

$$\langle u \rangle_a = \psi_a(N, \eta, q_a, W_a), \quad \langle u \rangle_\perp = \psi_\perp(N, \eta, q_\perp, W_\perp). \quad (2.2)$$

Тут крім параметрів нерівноважності як параметри виступають параметр порядку і відповідні енергії. Співвідношення невизначеностей з урахуванням колективних властивостей системи дають додаткові умови зв'язку:

$$\langle u \rangle_a l_a = \Delta S_q(N, q_a, \eta, W_a), \quad \langle u \rangle_{\perp} l_{\perp} = \Delta S_q(N, q_{\perp}, \eta, W_{\perp}). \quad (2.3)$$

2.2. Варіації зв'язків у системі частинок і модифікація варіаційного принципу для систем із зв'язками, що змінюються

Еволюція систем різної фізичної природи визначається фундаментальними властивостями матеріальних об'єктів — інерційністю щодо зміни стану та здатністю до відновлення вихідного стану, що проявляється як ефективна «пружність» системи. Залежно від характеру змін у часі такі процеси можна умовно поділити на два класи:

- динамічним змінам, тобто змін стану матеріальних об'єктів з фіксованою інерційністю, пружністю та зв'язками між об'єктами;
- еволюційні зміни, тобто зміни, які допускають варіації інерційності, пружності і, отже, варіації зв'язків.

У класичній фізиці рівняння динаміки частинок і полів виводяться з варіаційного принципу найменшої дії (принципу Гамільтона), де лагранжіан визначається як різниця кінетичної та потенціальної енергій. Однак цей підхід описує лише системи зі сталими зв'язками і не враховує можливість їх еволюції.

Еволюція системи, тобто зміна структури системи частинок та зв'язків між частинками, відбиваються у дефекті маси системи. Саме процеси з дефектом маси є як основою еволюції системи, і водночас джерелом енергії. Всі фізичні процеси з певною енергетичною спрямованістю є у зазначеному сенсі еволюційними процесами для відкритих систем.

Еволюція системи, тобто зміна структури системи частинок та зв'язків між частинками, відбиваються у дефекті маси системи. Саме процеси з дефектом маси є як основою еволюції системи, і водночас джерелом енергії. Всі фізичні

процеси з певною енергетичною спрямованістю є у зазначеному сенсі еволюційними процесами для відкритих систем.

Зі сказаного вище ясно, що формулювання варіаційного принципу динамічної гармонізації має ґрунтуватися на тому, що:

- по-перше, оптимізація функції чи функціоналу має давати реальну еволюцію системи;
- по-друге, для досягнення попереднього пункту оптимізація має відбуватися за варіацією зв'язків або (що теж саме) структурою системи.

Важливу інтерпретацію принципу найменшого примусу Гаусса сформулював Герц, який показав, що варіювання прискорень по Гауссу з мінімальністю функції примусу відповідає варіюванню руху з умовою мінімальності кривизни траєкторії - тобто реальний рух завжди відбувається найпрямішим шляхом, що узгоджується зі зв'язками — тобто з геодезичної траєкторії.

Зміна структури та зв'язків у системі призводять до неаддитивності маси системи та складових її частин (тобто до зміни інерційності або чутливості системи по відношенню до діючих на систему ззовні збурень).

Неаддитивність маси проявляється при описі когерентної динаміки системи частинок за допомогою введення однієї точки центру мас, рух якої описує загальну динаміку системи. Як відомо, при цьому динаміка центру мас системи багатьох частинок з масами m_i описується як динаміка однієї частки, але

з наведеною масою $\mu = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{m_i}}$, яка відрізняється від простої суми мас

$M_0 = \sum_{i=1}^N m_{0i}$ і завжди менше за неї. Для пов'язаної системи багатьох частинок її

маса M_{sys} виявляється менше суми мас вихідних вільних частинок $M_0 = \sum_{i=1}^N m_{0i}$

на величину дефекту мас $\delta m = \sum_{i=1}^N \delta m_i$ (суму дефекту маси кожної частки):

$M_{sys} = M_0 - \delta m$. Енергія $\delta m c^2$ витрачається створення поля зв'язків. Структура системи відбивається у її енергетичних характеристиках, а й у інформації, «записаної» у її зв'язках і найважливішою є залежність дефекту маси $\delta m = \frac{B(S)}{c^2}$ та енергії зв'язку B від ентропії $S(t)$ або інформації, записаної у структурі системи: $M_{sys}(S(t)) = M_0 - \delta m(S(t))$. При цьому дефект маси та параметр системи $\eta \approx \frac{\delta m}{M_0}$ виявляються пов'язані між собою: $\eta \approx \frac{\delta m}{M_0} = \frac{B(S)}{M_0 c^2}$. Дія масової сили, природно, викликає прискорення системи як цілого, і рівняння Ньютона ($\vec{u}$ — швидкість всієї системи, як цілого) має вигляд: $\frac{d}{dt}(M_{sys}(S(t))\vec{u}) = \vec{F}_m$ та виникає когерентне прискорення усієї системи $\vec{a}_m = \frac{d}{dt}(\vec{u})$, а рівняння динаміки набуває вигляду:

$$M_{sys}(S) \frac{d}{dt}(\vec{u}) = \vec{F}_m + \vec{F}_S, \quad \vec{F}_S = - \frac{d M_{sys}(S)}{dt} \vec{u}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d M_{sys}(S)}{dt} = - \frac{1}{c^2} \frac{d(B(S))}{dt} = - \frac{1}{c^2} \left(- \frac{dB}{dS} \right) \left(- \frac{dS}{dt} \right),$$

Вводячи виробництво ентропії у системі $\sigma_S = \frac{dS}{dt}$, отримуємо співвідношення:

$$\frac{1}{M_0} \frac{d M_{sys}(S)}{dt} = - \frac{1}{m_s} (-\sigma_S), \quad m_s = M_0 c^2 \left(- \frac{dS}{dB} \right), \quad (2.5)$$

в якому m_s — структурна інерційність системи. Самоузгоджену силу $\vec{F}_S$ та самоузгоджене прискорення $\vec{a}_S$ можна висловити через виробництво ентропії та структурну інерційність:

$$\vec{F}_S = M_{sys} \vec{a}_S, \quad \vec{a}_S = \frac{1}{m_s} (-\sigma_S) \vec{u}. \quad (2.6)$$

Подання сили $\vec{F}_S$, що має характер «в'язкості», через ентропію дозволяє назвати її ентропійною. Як видно, між повним масовим, когерентним прискоренням $\vec{a}_m$ та виробництвом негентропії $(-\sigma_S)$ існує прямий зв'язок:

$$\vec{a}_m = \vec{a}_0 + \frac{1}{m_S}(-\sigma_S)\vec{u}, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.7)$$

При збігу напрямів прискорень за рахунок масової сили і ентропійного прискорення, що ініціює процес, виникає позитивний зворотний зв'язок і вибуховий процес синтезу структур. Запишемо узагальнення варіаційного принципу мінімального примусу Гауса з урахуванням дефекту маси та зміни зв'язків:

$$Z_G = \sum_{i=1}^N (m_{0i} - \delta m_i) s_i^2. \quad (2.8)$$

Припустимо, що в певний момент часу t задані положення $r_i(t)$ та швидкості $u_i(t)$ всіх частинок системи, а прискорення ми можемо розпоряджатися на свій розсуд, не порушуючи, однак, заданих зв'язків. Заміна дійсного прискорення частки $a_i(t)$ у момент часу t величиною $w_i = a_i(t) + \delta a_i(t)$ призводить до того, що положення частки в момент часу $t + \tau$ внаслідок варіації прискорення змінюється і може бути представлено в ряд Тейлора:

$$r_i(t + \tau) = r_i(t) + u_i(t)\tau + \frac{1}{2}w_i(t)\tau^2 + \dots$$

Скориставшись цим співвідношенням, відхилення частки від реальної траєкторії запишемо у вигляді: $s_i(t + \tau) = r_i(t + \tau) - r_i(t) = u_i(t)\tau + \frac{1}{2}w_i(t)\tau^2 + \dots$

Внаслідок того, що ми зафіксували початкові значення координат $r_i(t)$ та швидкостей $u_i(t)$ частинок системи, варіації лінійні по τ рівні нулю. Отже, вважаючи τ малим з точністю до другого порядку, отримуємо

$$s_i(t + \tau) = \frac{1}{2} \delta a_i(t) \tau^2, \quad \delta a_i = w_i - \frac{F_i}{m_i}. \quad (2.9)$$

Отримане співвідношення залежить від виду зв'язків, які враховуються лише за виборі варіацій $\delta a_i(t)$. За допомогою варіацій лише прискорення (варіацій у дотичній поверхні другого порядку при фіксації точки і дотичної першого порядку в цій точці) Гаусс вдалося перетворити принцип Даламбера в варіаційний принцип, в якому відшукується мінімум деякої скалярної величини, названої «примусовим заходом». При цьому прискорення розглядаються як змінні варіаційного завдання. Важливо, що за варіювання по Гаусу через фіксовані швидкості та варіації прискорень δw_i визначаються тими ж рівняннями, як і віртуальні переміщення δr_i .

Скориставшись зміщенням частинки за малий інтервал часу отримуємо, що функція примусу в даний час t дається виразом:

$$Z_G(w_i) = \sum_{i=1}^N m_i s_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{(\Delta t)^2}{2} (m_i w_i - F_i) \right]^2 = \frac{(\Delta t)^4}{4} \sum_{i=1}^N m_i (m_i w_i - F_i)^2, \quad (2.10)$$

$$m_i = m_{0i} - \delta m_i.$$

Мінімізація квадратичної функції $Z_G(w_i)$ щодо прискорень з урахуванням зв'язків, що призводить до реальних рівнянь динаміки системи частинок, які відрізняються від ідеальних рівнянь Ньютона $m_i w_i - F = 0$, у міру впливу умов зв'язку.

Система багатьох частинок зі зв'язками крім динаміки окремих частинок (що описуються без зв'язків рівняннями динаміки Ньютона і Гамільтона) характеризується і динамікою всієї системи як цілого. Динаміка такого когерентного стану знаходить своє граничне відображення в законах механіки твердого тіла, що описується (без змін зв'язків) рівняннями Ейлера для тіл, що обертаються.

Динаміка твердого тіла є моделлю ідеальної повністю когерентної системи багатьох частинок і відображається в динаміці як поступальних рухів по відношенню до трьох заданих осей системи координат, так і обертань навколо осей у просторі.

Динаміку поступального руху всієї системи як цілого вздовж напрямку когерентності — осі z можна природно врахувати у варіаційному принципі, якщо уявити функцію примусу у вигляді, що враховує ефективну наведену масу системи зі зв'язками M_{eff} , когерентне прискорення системи w_{cogz} вздовж напрямку когерентності та ентропійну самоузгоджену силу:

$$Z_{Gz} = \frac{(\Delta t)^4}{4} M_{eff} (M_{eff} w_{cogz} - F_{sz})^2, \quad \frac{1}{M_{eff}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_{0i} - \delta m_i}. \quad (2.11)$$

Прояв когерентності при ініціювання обертання системи навколо виділеної осі описується відповідними кутами повороту $\varphi_i(t)$, кутовими швидкостями $\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt}$ та прискореннями $\frac{d\omega}{dt}$. Використовуючи для обертання такий підхід, як і для поступального руху, запишемо зміни кутів повороту навколо осі за малий інтервал часу τ :

$$\varphi_i(t + \tau) = \varphi_i(t) + \omega_i \tau + \frac{1}{2} \omega_{\omega i}(t) \tau^2 + \dots, \quad \omega_i \approx \text{const}, \quad \varphi_i(t + \tau) = \frac{1}{2} \delta \omega_{\omega i}(t) \tau^2. \quad (2.12)$$

Інерційність системи частинок щодо обертання визначається моментом інерції системи, що визначає інерційність системи маси $m(S)$ щодо обертання навколо осі і залежить від внутрішньої структури системи, тобто від розподілу щільності в просторі, яке так само, як і маса є функцією ентропії:

$$I_z(S) = \int_{\Omega} r_{\perp}^2 \rho[r_{\perp}; S, m(S)] d\Omega = I_0(R_0) - \delta I_z[S, m(S)]. \quad (2.13)$$

Тут $I_0(R_0)$ — початковий момент інерції з характерним просторовим масштабом, а $\delta I_z(S, m(S))$ — дефект моменту інерції з допомогою варіації структури

системи. Якщо на початку еволюції на систему не діяв початковий зовнішній момент сили, то рівняння динаміки обертання системи як цілого має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(I_z(S_q)\omega) = 0 \text{ або } I_z(S_q)\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}[\delta I_z(S_q)]\omega. \quad (2.14)$$

Використовуючи виробництво ентропії, запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{I_z} \frac{\delta I_z}{dt} \omega = \left[-\frac{1}{I_z} \frac{d(\delta I_z)}{dS_q} \right] \left(-\frac{dS_q}{dt} \right) \omega \approx \frac{1}{\alpha_{s\omega}} (-\sigma_s) \omega, \\ \alpha_{s\omega} &= I_z \left[-\frac{dS}{d(\delta I_z)} \right], \quad K_{sz} = I_z \frac{1}{\alpha_{s\omega}} (-\sigma_s) \omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Видно, що еволюція системи призводить до зміни моменту інерції системи та появи самоузгодженого ентропійного моменту K_{sz} , який розкручує систему. Отримані співвідношення пов'язують когерентне прискорення та прискорення обертання. Співвідношення свідчать, що й система змінює структуру, виникає когерентне, масове прискорення як уздовж осі, і прискорене обертання навколо цієї осі. Таким чином, при еволюції системи зв'язаних частинок з'являється дефект моменту інерції та проявляється самоузгоджений момент сил, що визначається цією еволюцією внутрішньої структури системи. Динаміка обертання системи із зв'язками визначається принципом Гауса з функцією примусу виду:

$$Z_{G\omega} = \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[I_z (I_z \omega_z - K_{sz})^2 \right] \quad (2.16)$$

Механіка окремих точок та динаміка твердого тіла є ідеальними наближеннями. У загальному випадку необхідно крім змінних, що характеризують динаміку окремих частинок, ввести колективні змінні, щоб описувати як динаміку окремих частинок, так і динаміку когерентної частини системи, а функцію, мінімізація якої визначає розвиток системи, потрібно подати у вигляді суми вкладів при варіації прискорень як окремих частинок, так і колективних змінних при динаміці:

$$Z_{dh} \left[w_i, w_{cogz} (q_{cog}, T_{cog}), \omega_z (q_{cor}, T_{cor}) \right] = \frac{(\Delta t)^4}{4} \times \quad (2.17)$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^N m_i (m_i w_i - F_i)^2 + M_{eff} (S_q) \left[M_{eff} (S_q) w_{cogz} - F_{sz} \right]^2 + I_z (S_q) \left[I_z (S_q) \omega_z - K_{sz} \right]^2 \right\}$$

$$\frac{1}{M_{eff} (S)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_{0i} - \delta m_i (S)}, \quad \delta m_i = \frac{B_i (S)}{c^2}$$

Форма функції динамічної гармонізації не змінюється ні при зміні кількості колективних параметрів, ні при зміні умов зв'язку (як це зазвичай виконується в механіці і для функції примусу Гаусса). Фіксована форма функції динамічної гармонізації для будь-яких динамічних систем з будь-якими колективними змінними не означає фіксованих рівнянь динаміки частинок та еволюції макроскопічних колективних змінних. Для отримання умов (рівнянь), що впливають із оптимізації функції динамічної гармонізації при варіації когерентних поступальних та кутових прискорень при фіксованих дотичних площинах першого порядку до всіх точок траєкторій системи у її просторі станів, необхідно додати умови зв'язку. Тільки за відсутності умов зв'язку рівняння набувають ідеальної форми рівнянь Ньютона та Ейлера.

Фундаментальна роль когерентних прискорень для еволюції і динамічної гармонізації систем з зв'язками, що варіюються, відображає визначальну роль порушення ізоотропії простору динаміки системи для її еволюції, оскільки саме порушення ізоотропії робить систему відкритою і, тим самим, здатною до еволюції.

Когерентне прискорення та обертання системи визначають еволюцію системи як розвиток анізотропних ієрархій когерентно-корельованих станів, тобто станів, що якісно різняться у поздовжніх та поперечних напрямках щодо когерентного прискорення та обертання системи на всіх просторових масштабах, у яких відбувається еволюція.

Поки що всі варіаційні принципи динаміки частинок і ОТО діяли лише у базовому просторі — просторі координат. Але реальні фізичні процеси (і, тим

більше, процеси еволюції) відбуваються в просторі Картана, що містить у собі природну не-локальність (оскільки за самим визначенням простору, властивості малої околиці точки визначають похідні всіх порядків) і ясно, що слід розглядати послідовно варіаційні принципи не тільки в базовому просторі: просторі (порядок торкання $n = 0$), і у всіх інших дотичних просторах більшого порядку дотику.

Щоразу при розгляді варіаційного принципу у просторі порядку торкання n необхідно здійснювати варіювання за Гаусом (починаючи з $n = 0$, відповідного мінімальної складності системи в рівноважному стані):

- стан задається фіксуванням точок у просторах торкання порядків n та $n + 1$ (простору «базових координат» та відповідних «швидкостей цих координат»);
- варіюванню піддаються змінні з простору торкання порядку $n + 2$ (простору «прискорень базових координат»).

Послідовне зростання складності під час переходу з рівня ієрархії n та $n + 1$, описаний у попередньому параграфі. За таких переходів, з узагальнення підходу Гаусса, здійснюється управління системи частинок прискоренням та її вищими похідними, оскільки геометрія і метрика базового простору залежить від швидкостей і прискорень (координат шарів), а прямий вплив координат базового простору на метрику шарів відсутня.

Використання варіаційного принципу (або, що еквівалентно, рівнянь ОТО) лише для базового простору ($n = 0$), неявно відповідає припущенню, що геометрія всіх дотичних просторів евклідова, а управління відбувається з допомогою прискорень, відповідних квазірівноважному стану. Таке наближення виправдане лише у випадку, коли фізичні процеси загалом близькі до локально рівноважних процесів (як це передбачається в теорії самоорганізації Пригожина [26]), але такий підхід порушується при наближенні до стану фазового переходу системи або її когерентного стану, що ініціюється прискоренням.

Координати дотичних просторів є кінематичними параметрами траєкторій системи частинок і прямо визначають енергетичні змінні системи та їх похідні за

часом, тому зі структурою просторів дотичних пов'язані енергетичні і термодинамічні властивості системи частинок.

Термодинаміка системи або задається феноменологічно, або впливає, як і динаміка, з варіаційних принципів аналогічних варіаційним принципам динаміки частинок [32], а починаючи з робіт [33-34], розвивається напрямок, що пов'язує термодинамічні рівняння з метрикою простору Рімана у відповідних змінних. При цьому рівноважна термодинаміка точно відповідає геометрії Евкліда.

Зростання нерівноважності (когерентного прискорення системи) призводить до необхідності застосовувати варіаційний принцип динамічної самогармонізації у базовому просторі, а й у дотичних розшаруваннях. Виникає граничне значення порядку дотику, вище якого всі дотичні простори евклідови, а асоційована з ними термодинаміка рівноважна, а нижче за цей порядок дотику сформувалися риманові геометрії в дотичних просторах, відповідні термодинаміці з ненульовими потоками.

Описана картина нерівноважної термодинаміки узгоджується з еволюцією ієрархічної структури. Перший нетривіальний етап у застосуванні варіаційного принципу еволюції полягає у використанні його з урахуванням простору швидкостей. У цьому випадку стан задається точкою у просторі швидкостей та точкою у просторі прискорень, а оптимальність досягається варіюванням швидкості прискорення, тобто третьої похідної координат.

Результатом оптимізації є рівняння для метричного тензора щодо розшарування першого порядку і відповідної залежності скалярної кривизни і масштабу когерентності. l_0 відповідного ладу від еволюційного часу. Варіаційні принципи в координатному просторі (варіаційний принцип динаміки) та варіаційний принцип щодо розшарування (варіаційний принцип термодинаміки) є компонентами єдиного варіаційного принципу динамічної гармонізації. Співвідношення геометродинаміки виявляються не просто формальним записом відомих законів, а виходять як наслідки однієї загальної геометризації колективних процесів на основі принципу динамічної самогармонізації з принципів динаміки і навпаки -

принципи динаміки можуть бути отримані з принципів термодинаміки, як показав де Бройль [35].

Послідовне самоузгоджене збільшення когерентного прискорення призводить до появи кінцевого значення радіусу кривизни, у метриці наступного дотичного розшарування тощо.

Розвиток та деградація внутрішньої структури системи не відбувається миттєво, а визначається гармонійним поєднанням структурної інерційності, структурної пружності та дисипативних потоків у системі. Поєднання, перерахованих вище властивостей еволюціонуючої системи, передусім, відбиваються обсягом фазового простору системи (дія чи ентропії системи) та її імпедансі (речова частина якого визначається дисипацією, а уявна частина визначається ставленням інерційності і пружності системи). Фазовий обсяг системи прямо характеризує кількість станів системи та її складність, а імпеданс — деформацію фазового простору (співвідношення енергетичних та просторових характеристик системи, тобто можна сказати відображає співвідношення кінетичної та потенційної енергій та ідеальність системи).

Еволюція структури складної системи відбувається на різних ієрархічних рівнях, структура яких також еволюціонує. Властивості масштабної інваріантності властивостей в ієрархії задаються параметром нерівноважності q_{cog} , q_{cor} у відповідних напрямках когерентно — корельованого стану.

Центральну роль у системах багатьох частинок, природно, грають імовірнісні і статистичні закони. Ортодоксальна теорія ймовірностей і кінетика частинок, в більшості теорій, формувалася явно чи неявно в інерційних системах відліку у припущенні статистичної незалежності подій та незалежності ймовірностей подій від їхньої передісторії. В еволюційних системах це припущення порушується і є пам'ять у часі і нелокальність у координаційному просторі.

Відхилення від статистичної незалежності визначається поточними когерентними прискореннями всіх порядків та пов'язаною з ними еволюцією геометрії простору. Спираючись на залежність імовірнісних якостей колективних

систем та статистичні розподіли в конфігураційному та дотичному просторах можна обчислити обсяг фазового простору, його анізотропію та залежність від когерентного прискорення. Основні співвідношення для статистичних властивостей ієрархічних систем у станах з прискоренням когерентним отримані вище у відповідному параграфі.

Основою формування закону еволюції є природне уявлення про синтез нових структур, як про процес варіації інерційностей системи, що самоорганізується, у відповідь на варіації когерентних прискорень системи. Процес еволюції підпорядкований мети формування найбільш вільного руху при одночасному виконанні внутрішніх зв'язків, що еволюціонують разом із системою. У такій постановці стає очевидною бінарність еволюції — відбувається спільна еволюція, як зв'язків та структури системи, так і функціоналу ступеня примусу системи з варіюються зв'язками, мінімізація якого (мінімізація примусу і максимізація свободи) визначає таку еволюцію.

Ступінь примусу показує величину відхилення руху від найбільш вільного руху з урахуванням зв'язків, а траєкторія, найменш відхиляється від вільного руху і є реальна траєкторія. У механіці системи частинок зв'язку передбачаються фіксованими, а міра примусу визначається ступенем відхилення прискорення від прискорення вільного руху. В цьому граничному випадку для динаміки частинок шуканий функціонал повинен прагнути до функції примусу Гауса, яка дорівнює квадрату відхилення прискорення, що варіюється, від прискорення вільного руху.

Розглянемо динаміку колективного руху та рівняння, які визначають власні макроскопічні рухи системи частинок. Найбільш загальний підхід опису власних рухів спирається на статистичні функції розподілу [36-38] у просторі Картана, який був розвинений А.А. Власовим з допомогою ієрархії порядків дотику.

Самоузгоджені ентропійні сили та моменти, які ініціюються початковими масовими силами, відображають позитивний зворотний зв'язок у відкритих системах, призводять до зростання прискорень та, отже, до зростання впливу на еволюцію дотичного розшарування наступних порядків. Саме такий вибуховий

механізм забезпечує режими із загостренням та кінцевий час переходу системи в критичний стан.

Зростання ієрархічної структури та збільшення повної розмірності простору еволюції системи та порядку горизонту еволюції (порядку дотичного розшарування) відображає властивість бінарності еволюції, тобто варіація зв'язків відбувається спільно з варіацією виду самої функції динамічної гармонізації та наближення її до функціоналу динамічної гармонізації, який і керує еволюцією.

Для того, щоб сформулювати функціонал динамічної гармонізації для еволюції системи з зв'язками, що варіюються, необхідно просто врахувати, що число квадратичних доданків у функціоналі, повинно відповідати нескінченному числу дотичного розшарування простору Картана. Функціонал, отриманий за такого розширення функції динамічної гармонізації Z_{dh} називатимемо функціоналом динамічної гармонізації Φ_{dh} . Цей функціонал описує варіації обсягів фазових просторів всіх порядків за рахунок аксіальних прискорень та прискорень у відповідних ортогональних поверхнях дотичного розшарування простору Картана.

Структура всіх квадратичних вкладів визначається системою рівнянь Власова для колективних прискорень у просторі Картана. Для загального запису функціоналу треба: ввести як змінний параметр порядок прискорення, який відповідає дотичному простору і записати макроскопічні динамічні рівняння для колективних прискорень з використанням цього параметра.

$$\frac{d^2 \langle \vec{u} \rangle}{dt^2} - \vec{a}_a = 0,$$

$$\vec{a}_a(S_q, \vec{u}, \vec{a}) = \left[- (2\sigma_s + \nu_a) \frac{d \langle \vec{u} \rangle}{dt} - \left(\frac{d\sigma_s}{dt} + \sigma_s^2 + \nu_a \sigma_s \right) + \langle \vec{u} \rangle \frac{1}{m} \vec{F}_a(t, \vec{r}, \vec{u}, \vec{a}, f) \right], \quad (2.18)$$

$$\Phi_{dh}(a_{a0}, a_{\perp 0}, \dots, a_{ai}, a_{\perp i}, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \left[\left(a_{ai} - \frac{1}{m_{ai}} F_{ai} \right)^2 + \left(a_{\perp i} - \frac{1}{m_{\perp i}} F_{\perp i} \right)^2 \right],$$

$$a_{ai} = \frac{d^i \langle u_a(S_q) \rangle}{dt^i}, \quad K_i \approx \frac{m_{eff}}{4} (\tau_{eff})^{2i+2}.$$

Нескінченна кількість дотичного розшарування відповідає нескінченному безлічі масштабів у системі, а динаміка цих масштабів — еволюції багатомасштабних ієрархічних структур (у досить загальному випадку кластерних), які є зручною та природною моделлю еволюції структури зв'язків складних систем.

Теорія кластерних ієрархічних структур добре розроблена у загальному вигляді та отримано закони переходу з рівня ієрархічної структури наступного рівня. Ця теорія не залежить від природи ієрархічних рівнів, а залежить від основних властивостей кластерів і може застосовуватись в розглянутому випадку, якщо номер ієрархії в кластерних структурах ототожнити з номером порядку прискорення у відповідних розшаруваннях простору Картана системи (порядок торкання шару до простору швидкостей) до якого «дойшла». Нерівноважність починає формуватися в базовому просторі та дотичному просторі першого порядку (просторі енергій в ізотропному випадку), а управління еволюцією здійснюється у просторі прискорень першого порядку (тобто в рамках колективної динаміки, найбільш близької до класичної динаміки частинок). У цьому випадку використовується найменша інформація про систему, і найбільшою кількістю динамічних змінних прискорень проведено усереднення.

З цього грубого рівня починається управління, а повний функціонал еволюції (9) у просторі прискорень звужується до функції гармонізації еволюції у просторі прискорень.

При переході на глибший ієрархічний рівень кожен статистичний ансамбль поділяється на безліч дрібніших подансамблів, які у свою чергу складаються з ще дрібніших субансамблів наступного ієрархічного рівня. Така картина зростання ієрархічної структури відповідає розвитку еволюції у двох системах характерних часів.

Спочатку йде еволюція у межах простору прискорень одному ієрархічному рівні, до якого дійшла еволюція (на відповідному горизонті еволюції). Ця еволюція керується функціоналом динамічної гармонізації, звуженим до функції динамічної гармонізації керуючої еволюцією на цьому рівні відповідно до рівнянь, які впливають з мінімізації функції динамічної гармонізації на інтервалі

часу релаксації на цьому рівні до переходу на наступний горизонт еволюції до якого хвиля еволюції поширюється далі до наступного горизонту нерівноважного квазістаціонарного стану, еволюція якого призводить знову до розширення горизонту еволюції та переходу на наступний ієрархічний рівень.

2.3. Рівняння еволюції для систем зі зв'язками, що змінюються

Для отримання диференціальних рівнянь руху із принципу динамічної самогармонізації відкритих систем зі зв'язками необхідно задати рівняння зв'язків у системі.

Зазвичай у механіці зв'язку задаються як співвідношення між координатами частин системи.

У цьому випадку їх використання не викликає особливих труднощів, так як інерційність системи не змінюється з часом і визначається її постійною масою.

У випадках, які нас цікавлять (еволюція систем зі зв'язками, що змінюються, і внутрішньою структурою) координати системи поряд із звичайними координатами в конфігураційному просторі системи є такі фізичні величини, як кореляції, індекси розмірностей різного роду і т.д.

Поняття інерційності та їх значення для величин, що характеризують внутрішню структуру системи, не є очевидними і виникають деякі складнощі у застосуванні принципу динамічної гармонізації.

У випадку зв'язку у системі визначаються співвідношеннями, які пов'язують зовнішні геометричні масштаби системи з її параметрами, які характеризують внутрішню структуру системи і величину зв'язків усередині системи. Такими співвідношеннями для ядерних фракталів є співвідношення між зовнішніми розмірами кластеру та фрактальною розмірністю, а також співвідношення між об'ємом кластера та властивостями кластера, як квантово-статистичного об'єкта, чи співвідношенням невизначеностей для когерентного стану.

Розглянемо систему з A частинок, яка однорідна в одному з просторових напрямків, а характерні розміри системи по двох напрямках, що залишилися,

позначимо через колективні змінні R_A и d_A . Це може бути система частинок у вигляді кластера із зовнішнім радіусом R_A . Внутрішню структуру в системі характеризуватимемо її фрактальною розмірністю D_f (або іншими дробовими розмірностями, що характеризують кореляції та зв'язки в системі) і тоді зв'язки в системі задаються функцією:

$$R_A = \psi_1(A, D_f). \quad (2.19)$$

Енергію зв'язку системи запишемо у вигляді функції від цих змінних

$$B = B(A, D_f), \quad \delta m_A = \frac{B(A, D_f)}{c^2}. \quad (2.20)$$

У кінцевих рівняннях зручно користуватися безрозмірними змінними: маси $\mu = m_A / m_1$, радіусу $r = R_A / R_{A0}$ і часу, нормованими відповідно на початковий радіус кластера $R_{A0} = R_A[A(t=0), D_f(t=0)] = r_0 A_0^{1/D_{f0}}$, його початкову власну масу $m_A = A m_1$ та тривалість пробігу світлом початкового радіусу кластера $\tau = R_{A0} / c$. Сили будуть нормовані величиною $f_0 = A_0 m_1 c^2 / R_{A0}$.

Відповідно до варіаційного принципу еволюції, рівняння руху системи визначаються мінімумом функції примусу $Z_G = m_A (m_A w_r - F_r)^2$, $m_A = (A m_1 - \delta m_A)$, при варіації прискорення w_r .

Існування зв'язку в системі призводить до того, що прискорення w_r не довільно, а визначається із цього співвідношення. Дійсно, двічі продиференціювавши рівняння зв'язку за часом з урахуванням того, що варіюються лише прискорення, а швидкість задана, ми отримуємо лінійний зв'язок між похідними від просторової змінної та похідної, що характеризує прискорення параметрів структури (наприклад, фрактальної розмірності):

$$w_r = \frac{d^2}{dt^2} R_A \approx R_{A0} \frac{\partial^2 \psi_1(A, D_f)}{\partial D_f^2} \frac{d^2 D_f}{dt^2} = \gamma_{1\eta} R_{A0} \frac{d^2 D_f}{dt^2}, \quad \gamma_{1\eta} = \frac{\partial^2 \psi_1(A, D_f)}{\partial D_f^2}. \quad (2.21)$$

Підставляючи отриманий вираз $w_r = w_r(\ddot{D}_f, \ddot{A})$ в Z_G , отримуємо функцію примусу Гауса $Z_G = Z_G(\ddot{D}_f, \ddot{A})$ залежно від прискорення параметра фрактальної розмірності (прискорення параметрів структури) та прискорення маси оболонки:

$$Z_G = m_A (m_A w_r - F_r)^2 = m_A (m_A \psi_{D_f} \ddot{D}_f - F_r)^2. \quad (2.22)$$

Умова мінімуму примусової функції щодо прискорення $\ddot{D}_f : \frac{\partial Z_G(\ddot{D}_f, \ddot{A})}{\partial \ddot{D}_f} = 0$, призводить до диференціального рівняння для фрактальної розмірності ядерної системи D_f :

$$m_A \gamma_{1\eta} R_{A_0} \ddot{D}_f = F_r. \quad (2.23)$$

Для фрактального кластера $R_A(A, D_f) = r_0 A^{\frac{1}{D_f}} = R_{A_0} \frac{A^{\frac{1}{D_f}}}{A_0^{\frac{1}{D_{f0}}}}$ та $A = A_0$

отримуємо,

$$\gamma_{1\eta}(A, D_f) = \frac{\log(A)}{D_f^3} \left(2 + \frac{\log(A)}{D_f} \right) A^{(1/D_f - 1/D_{f0})}, \quad (2.24)$$

звідки слідує рівняння для фрактальної розмірності у вигляді:

$$\mu_A(A, D_f) \ddot{D}_f = \frac{1}{\gamma_{1\eta}(A, D_f)} f_r. \quad (2.25)$$

Тут введено позначення:

$$\mu_A(A, D_f) = \left[1 - \frac{B(A, D_f)}{A m_1 c^2} \right] \approx 1, \quad f_r = F_r / f_0. \quad (2.26)$$

Диференціальне рівняння для D_f можна один раз проінтегрувати, якщо зробити припущення: $\mu_A(A, D_f) \approx \text{const}$. За вказаних умов після множення на $\dot{D}_f$, слід, що:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_A}{2} (\dot{D}_f)^2 + U_{str}(D_f) \right] = 0, \quad U_{str}(A, D_f) = -f_r \int \frac{dD_f}{\gamma_{1\eta}(A, D_f)}. \quad (2.27)$$

Обчислюючи інтеграл отримуємо:

$$U_{str}(A, D_f) = -\frac{A^{(1/D_{f0}-1/D_f)}}{32 \log(A)} C_{D_f} f_r, \quad (2.28)$$

$$C_{D_f} = \left[4D_f^4 - 4\log(A)D_f^3 + 4\log^2(A)D_f^2 - 6\log^3(A)D_f - A^{1/D_f} \log^4(A) I_A(D_F) \right],$$

$$I_A(D_F) = 7Ei \left[-\frac{\log(A)}{D_f} \right] - e^2 Ei \left[-2 - \frac{\log(A)}{D_f} \right].$$

Тут $Ei(z) = -\int_{-z}^{\infty} dt \frac{\exp(-t)}{t}$ спеціальна функція — інтегральна експонента. Таким

чином, наближений перший інтеграл, що визначається безрозмірною величиною повної енергії системи:

$$\frac{\mu_A}{2} (\dot{D}_f)^2 + U_{str}(A, D_f) = W_0, \quad W_0 = \frac{\mu_A u_{D_{f0}}^2}{2} + U_{str}(A, D_{f0}), \quad \dot{D}_f(t=0) = u_{D_{f0}}. \quad (2.29)$$

Після інтегрування отримуємо співвідношення, що є неявною залежністю фрактальної розмірності від часу:

$$\int_{D_f}^{D_{f0}} \left\{ \frac{2}{\mu_A} [W_0 - U_{str}(A, x)] \right\}^{-1/2} dx = t \quad (2.30)$$

або

$$\int_{D_f}^{D_{f0}} \left\{ u_{D_{f0}}^2 + \frac{2}{\mu_A} [U_{str}(A_0, D_{f0}) - U_{str}(A, x)] \right\}^{-1/2} dx = t. \quad (2.31)$$

Доданок $\frac{\mu_A}{2}(\dot{D}_f)^2$ є кінетичною частиною енергії, яка визначається зміною внутрішньої структури зв'язків у системі, а $U_{str}(A, D_f)$ Потенційною частиною енергії. Обидва ці доданки утворюють добавку $L_{str}(D_f, \dot{D}_f)$ на повну функцію Лагранжа динамічної системи:

$$L_{str}(D_f, \dot{D}_f) = \frac{\mu_A}{2}(\dot{D}_f)^2 - U_{str}(A, D_f). \quad (2.32)$$

На Рис. 2.1 зображена поверхня, що представляє функцію $U_{str}(A, D_f)$.

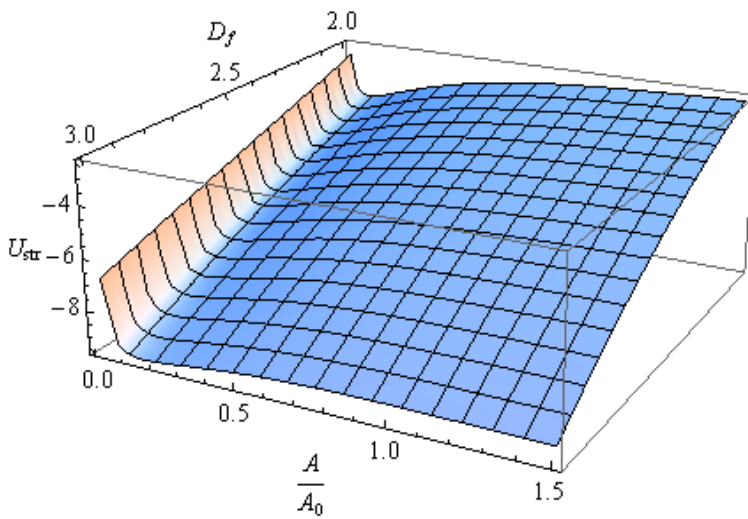


Рис. 2.1. Залежність безрозмірної потенційної енергії зв'язків Φ від фрактальної розмірності D_f та масового числа A . Тут D_f і A — безрозмірні параметри.

Видно, що залежність від параметра A немонотонна і для кожного значення A існує оптимальне значення фрактальної розмірності D_f . Рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial L_{str}(D_f, \dot{D}_f)}{\partial D_f} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{str}(D_f, \dot{D}_f)}{\partial \dot{D}_f} \right] = 0 \quad (2.33)$$

збігається з рівнянням, отриманим із варіаційного принципу еволюції,

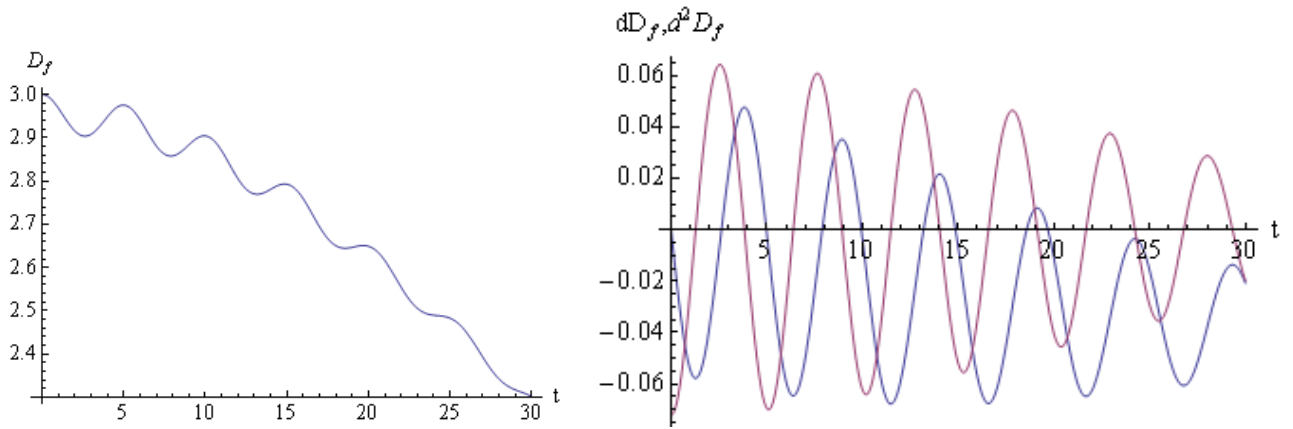


Рис. 2.2. Еволюція фрактальної розмірності кластера $D_f(\tau)$ (ліворуч) та її першої і другої похідних за безрозмірним часом τ (праворуч)

Зазначимо, що рівняння для внутрішньої структури має динамічний характер у зв'язку з тим, що величина масової сили f_r вважалася заданою. Таке наближення фізично означає, що характерні часи релаксації внутрішніх процесів у системі набагато менші за характерні часи еволюції домінуючого обурення і, ефективно, внутрішня динаміка системи описується замкнутою динамічною системою. Загальна відкритість системи та еволюційний характер її розвитку відновлюється під час розгляду динаміки системи у звичайному — просторі часу. У наближенні швидкої релаксації внутрішньої структури ця еволюція вже відбувається в повільному часі з характерними часами домінуючого обурення та враховує зміну дефекту — мас системи та, отже, кривизни простору — часу.

Оскільки еволюція системи частинок неможлива без варіацій зв'язків у системі частинок, тобто варіації геометрії та полів, що визначають еволюцію цих зв'язків, то побудова теорії та моделювання синтезу систем частинок неможлива без теорії відповідних полів. У нерівноважній термодинаміці співвідношення напрямку потоку енергії та градієнта щільності енергії визначається основною нерівністю термодинаміки незворотних процесів Пригожина для виробництва ентропії σ_S :

$$\sigma_S = j_r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\rho_W(r, t)} \right] \geq 0. \quad (2.34)$$

Облік релаксації потоку енергії робить допустимим існування еволюції потоку в бік збільшення її щільності, тобто. виникає процес із загостренням, у якому енергія не розпливається у просторі, а концентрується у тонкому шарі завтовшки d_{vc} і термодинамічна нерівність, яка визначає напрямок еволюції процесу, можна записати у вигляді:

$$\sigma_S = \frac{1}{\rho_W^2} \left(\tau_{dis} \frac{\partial j_r}{\partial t} + j_r \right) \frac{\partial \rho_W}{\partial r} \geq 0. \quad (2.35)$$

Ініціювання у системі когерентного прискорення призводить до виникнення та ініціювання ККС. У напрямку паралельному прискоренню колективні процеси йдуть із просторовими масштабами, що скорочуються:

$$f_{\parallel}(w_{\parallel}, T_{\parallel}, q_{\parallel}) = A_{\parallel}(q_{\parallel}, T) \exp_{q_{\parallel}} \left[- (1 - q_{\parallel}) \frac{w_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right], \quad q_{\parallel} \leq 1 \quad (2.36)$$

а в напрямках ортогональних прискоренню просторові масштаби різко зростають (прагнуть нескінченності):

$$f_{\perp}(w_{\perp}, T_{\perp}, q_{\perp}) = A_{\perp}(q_{\perp}, T_{\perp}) \exp_{q_{\perp}} \left[- (1 - q_{\perp}) \frac{w_{\perp}}{T_{\perp}} \right], \quad q_{\perp} > 1. \quad (2.37)$$

Когерентно-корелеваність стану проявляється у співвідношенні $q_{\parallel} q_{\perp} \approx 1$.

В умовах наближення до рівноважних $q \rightarrow 1$ анізотропія зникає. Чим більший ступінь нерівноважності системи (що відображається у відхиленні параметра нерівноважності q від 1), тим більше вираженими стають властивості ККС:

$$\frac{a_v}{a} = \frac{2 + \gamma}{\left(1 - \frac{t}{t_{ex}} \right)^{t_{ex}}}. \quad (2.38)$$

Можна сміливо сказати, що поява асиметрії у системі призводить до нелокальності і відкритості системи, а порушення симетрії викликається когерентним прискоренням системи. Важливо підкреслити, що когерентне прискорення можливе лише, якщо існує середовище чи фізична система щодо якої створюється прискорення. Відображенням цієї обставини є парадокс

Даламбера, що полягає у відсутності сил гальмування у кульки, що рухається з постійною швидкістю у в'язкому середовищі та поява сили тертя під час руху з прискоренням за рахунок виникнення у кульки приєднаної маси середовища (дефекту маси).

Рівноважна та нерівноважна термодинаміка побудована на ортодоксальній теорії ймовірностей. Ортодоксальна теорія ймовірностей, будувалася в інерційних системах відліку у припущенні статистичної незалежності подій та незалежності ймовірностей подій від їхньої передісторії. У еволюційних системах це припущення порушується, і є пам'ять у часі і нелокальність у координатному просторі (нелокальність подій у просторі-часі системи). Нелокальність та пов'язані з нею властивості еволюції відображені в тому, що еволюція відбувається та оптимізується у просторі Картана.

Структура всіх квадратичних вкладів визначається системою рівнянь Власова для колективних прискорень у просторі Картана. Оптимізація визначається відповідним функціоналом (у просторі з нескінченною кількістю дотичних просторів зростаючого порядку дотику) $\Phi_{dh}(a_{a0}, a_{\perp 0}, \dots, a_{ai}, a_{\perp i}, \dots)$. Для загального запису функціоналу треба: ввести як змінний параметр порядок прискорення, який відповідає дотичному простору та записати макроскопічні динамічні рівняння для колективних прискорень з використанням цього параметра:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \langle \vec{u} \rangle}{dt^2} - \vec{a}_a &= 0, \\ \vec{a}_a(S_q, \vec{u}, \vec{a}) &= \left[-(2\sigma_s + \nu_a) \frac{d \langle \vec{u} \rangle}{dt} - \left(\frac{d\sigma_s}{dt} + \sigma_s^2 + \nu_a \sigma_s \right) + \langle \vec{u} \rangle \frac{1}{m} \vec{F}_a(t, \vec{r}, \vec{u}, \vec{a}, f) \right], \\ \Phi_{dh}(a_{a0}, a_{\perp 0}, \dots, a_{ai}, a_{\perp i}, \dots) &= \sum_{i=1}^{\infty} K_i \left[\left(a_{ai} - \frac{1}{m_{ai}} F_{ai} \right)^2 + \left(a_{\perp i} - \frac{1}{m_{\perp i}} F_{\perp i} \right)^2 \right], \quad (2.39) \\ a_{ai} &= \frac{d^i \langle u_a(S_q) \rangle}{dt^i}, \quad K_i \approx \frac{m_{eff}}{4} (\tau_{eff})^{2i+2}. \end{aligned}$$

Нескінченна кількість дотичного розшарування відповідає нескінченному безлічі масштабів у системі, а динаміка цих масштабів — еволюції багатомасштабних ієрархічних структур (у досить загальному випадку кластерних), які є зручною та природною моделлю еволюції структури зв'язків складних систем. У реальному процесі еволюції функціонал на кожному етапі еволюції, може бути наближений відповідною функцією, у якій порядок торкання обмежений кінцевим числом і з еволюції це число може змінюватися. Таким чином, у процесі оптимальної (керованої) еволюції згодом змінюються не лише параметри системи (наприклад, інерційність) та траєкторія системи, а й оптимізується та змінюється сам функціонал оптимізації. Ця характеристика еволюції та синтезу і називається бінарністю (дуальністю) еволюції. При кінцевому максимальному порядку торкання функціонал $\Phi_{dh}(a_{a0}, a_{\perp 0}, \dots, a_{ai}, a_{\perp i}, \dots)$ перетворюється на функцію Z_{dh} :

$$\begin{aligned}
 Z_{dh}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N, a_z, a_{\perp}, \mathcal{G}_z\right) &= Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right) + Z_{cog}\left(a_z, a_{\perp}, \mathcal{G}_z\right), \\
 Z_{GaussN}\left(\left\{\vec{a}_i^*\right\}_{i=1}^N\right) &= \sum_{i=1}^N m_i s_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{(\Delta t)^2}{2} \left(m_i \vec{a}_i^* - \vec{F}_i \right) \right]^2 = \sum_{i=1}^N K_i \left(m_i \vec{a}_i^* - \vec{F}_i \right)^2, \\
 K_i &= m_i \frac{(\Delta t)^4}{4}, \\
 Z_{cog}\left(a_z, a_{\perp}, \mathcal{G}_z\right) &= K_z \left(m_z a_z^* - F_{mz} \right)^2 + K_{\perp} \left(m_{\perp} a_{\perp}^* - F_{m\perp} \right)^2 + K_{\omega} \left(I_z \mathcal{G}_z^* - M_{mz} \right)^2, \\
 K_z &= m_z \frac{(\Delta t)^4}{4}, \quad K_{\omega} = l_{\perp 0}^2 m_{eff} \frac{(\Delta t)^4}{4}.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Навіть ізольована система або система невзаємодіючих частинок не можуть бути повністю вільними через взаємодію з вакуумом. Наприклад, Де Бройль показав, що рівняння динаміки для ізольованої частинки впливає з термодинаміки частки і термостата, що є флуктуацією вакууму.

2.4. Адаптація еволюційних моделей для чисельного розв'язання та використання варіаційних принципів як інструменту мінімізації обчислювальних витрат

Розроблені у попередніх підрозділах моделі варіації структури зв'язків та модифіковані варіаційні принципи механіки систем частинок створюють потужну теоретичну базу для опису складних електрофізичних процесів. Однак, у контексті спеціальності математичного моделювання та обчислювальних методів для технічних наук, ці концепції вимагають обов'язкової алгоритмічної формалізації. Перехід від абстрактних аналітичних моделей до практичного комп'ютерного проектування лінійних прискорювальних систем з трубками дрейфу у формі еліптичних циліндрів неможливий без глибокої адаптації математичного апарату.

Фундаментальним етапом такого переходу є процедура підготовки первинної інформації, яка забезпечує коректну ініціалізацію розроблених рівнянь еволюції. В рамках даного дослідження підготовка первинної інформації розглядається як комплексний процес трансформації фізичних параметрів прискорювального тракту у структуровані масиви вхідних даних для математичних моделей. Цей процес включає геометричну параметризацію еліптичних трубок дрейфу (визначення великої та малої півосей, кроку періодичної структури), задання початкових умов фазового розподілу пучка на вході в систему у вигляді статистичних моментів або функцій розподілу Максвелла-Больцмана, а також формалізацію граничних умов Діріхле та Неймана на поверхнях віртуальних та фіксованих електродів. Отримана неперервна первинна інформація підлягає просторовій дискретизації за допомогою генерації адаптивних розрахункових сіток, густина яких динамічно збільшується в областях з найвищим градієнтом електромагнітного поля (поблизу кромek еліптичних циліндрів) та в зонах максимальної концентрації просторового заряду пучка.

Сформовані таким чином масиви первинних даних (вектори вузлових координат, матриці інцидентності елементів, вектори початкових збурень) виступають інформаційним фундаментом для коректного розв’язання рівнянь еволюції, що описують варіацію структури зв’язків у системі. Оскільки отримані інтегро-диференціальні рівняння еволюції систем частинок зі змінною структурою зв’язків є суттєво нелінійними, їх адаптація для чисельного розв’язання потребує застосування спеціальних проекційних методів.

Класичні методи скінченних різниць виявляються недостатньо гнучкими для моделювання складної еліптичної геометрії трубок дрейфу. Тому в роботі пропонується адаптація еволюційних рівнянь на основі методу зважених нев’язок (зокрема, методу Гальоркіна), який ідеально узгоджується з варіаційним формулюванням задачі. Невідома неперервна функція стану системи $u(x, t)$ (що може описувати густину заряду або потенціал поля) апроксимується скінченновимірним розкладом за базисними функціями простору Соболева $\phi_i(x)$:

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^K c_i(t) \phi_i(x) \quad (2.N + 1), \quad (2.41)$$

де $c_i(t)$ — невідомі коефіцієнти, що залежать від часу, а K — кількість ступенів вільності дискретизованої моделі. Підстановка апроксимації у вихідне рівняння еволюції та вимога ортогональності нев’язки до кожної базисної функції дозволяє перейти від неперервної задачі з нескінченною кількістю ступенів вільності до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно вектора коефіцієнтів $C(t) = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_K(t)]^T$. Така форма запису є повністю адаптованою для використання неявних методів інтегрування (наприклад, методів Гіра або Розенброка), які забезпечують безумовну обчислювальну стійкість при жорстких параметрах динаміки інтенсивних пучків.

Ключовим науково-технічним рішенням даного розділу є переосмислення ролі варіаційних принципів. Якщо в теоретичній фізиці варіаційний принцип найменшої дії використовується для фундаментального виведення рівнянь руху,

то в рамках спеціальності математичного моделювання він розглядається як потужний інструмент алгоритмічної оптимізації математичних моделей, що дозволяє радикально скоротити обчислювальні витрати при комп'ютерному моделюванні. Суть підходу полягає в тому, що замість прямого чисельного інтегрування складної системи диференціальних рівнянь динаміки заряджених частинок, задача зводиться до пошуку мінімуму узагальненого функціоналу енергії (або модифікованої функції примусу), який враховує змінну фрактальну структуру зв'язків:

$$\Pi(u^h) = \frac{1}{2} C^T [M] C + C^T [K] C - C^T F \rightarrow \min, \quad (2.42)$$

де $[M]$ — матриця інерційних властивостей (або мас) системи, $[K]$ — матриця жорсткості (або матриця взаємодії частинок, що враховує еліптичну геометрію прискорювача та просторовий заряд), F — вектор зовнішніх електромагнітних навантажень. Використання варіаційного принципу як обчислювального інструменту дозволяє замінити складну процедуру розв'язання крайових задач розв'язанням задачі безумовної багатовимірної оптимізації квадратичної форми.

Алгоритмічна перевага такого переходу полягає в тому, що глобальні матриці системи завжди виходять симетричними та додатно визначеними. Ця математична властивість, отримана виключно завдяки варіаційному формулюванню, дозволяє застосовувати для розв'язання надшвидкі методи факторизації Холецького або оптимізовані градієнтні ітераційні процедури з передобумовленням. Завдяки цьому обчислювальна складність алгоритму зменшується від $O(K^3)$ до $O(K \log K)$, що дозволяє скоротити час комп'ютерної симуляції динаміки пучка на кілька порядків. Таким чином, запропоновані узагальнені варіаційні принципи для систем із змінними зв'язками виконують функцію ефективного оптимізатора обчислювального процесу, роблячи можливим проведення багатоваріантних чисельних досліджень та структурно-параметричної оптимізації фокусувальних властивостей еліптичних трубок дрейфу на персональних обчислювальних комплексах без залучення

суперкомп'ютерних ресурсів, що є безпосереднім виконанням завдань технічної галузі науки.

2.5. Висновки до розділу 2

1. У розділі розвинуто підхід до математичного моделювання заряджених частинок як складної динамічної системи з внутрішньою структурою зв'язків, що змінюється в процесі еволюції. Запропонована постановка задачі дозволяє враховувати як індивідуальну динаміку частинок, так і колективні ефекти, зумовлені їх взаємодією.

2. Сформульовано узагальнену модель еволюції системи частинок, у якій структура зв'язків описується змінними параметрами, що можуть варіюватися в часі та просторі.

3. На основі варіаційних принципів механіки побудовано функціонал дії для системи з варійованою структурою зв'язків та отримано відповідні рівняння руху.

РОЗДІЛ 3.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТА ЕВОЛЮЦІЇ СИСТЕМ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У ПРИСКОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ З ФІКСОВАНИМИ І ВІРТУАЛЬНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ

3.1. Електромеханічні аналогії та моделі динаміки електрофізичних систем

У цьому підрозділі розглядаються математичні моделі, що описують рух, колективну взаємодію та еволюцію систем заряджених частинок (електронних та іонних пучків, плазмових утворень) у прискорювальних та електрофізичних системах. Особливістю таких систем є можливість існування як геометрично фіксованих електродних конфігурацій, так і ефективних (віртуальних) структур, що формуються самою динамікою середовища.

Як зазначалося раніше, ключовою характеристикою багаточастинкових систем, що еволюціонують, є їхня інерційність, яка пов'язана з внутрішньою структурою та енергією зв'язків. У загальному випадку можна виділити два класи походження інерційності: першопричиною інерційності першого класу є зв'язки, які здійснюють поля, які практично не існують без елементів системи, а зв'язки та їх структура ініціюються самими елементами системи. Фундаментальним прикладом може бути механізм виникнення маси нуклону з допомогою глюонного поля, збуджуваного кварками. Близько 98% маси нуклону визначається структурою колективного поля безмасових глюонів, і лише 2% визначається масою самих частинок (кварків), з яких складається нуклон;

- першопричиною інерційності другого класу є поля зв'язків, які є власними станами будь-якого середовища, що може існувати незалежно від елементів системи. Інерційність виникає в результаті того, що при когерентному прискоренні елементи системи «зачіплюють» поля зв'язків у середовищі та інерційність визначається власними коливаннями середовища, що на

гідродинамічній мові описується приєднаною масою. Прикладами виникнення інерційності такого типу є механізм Хіггса появи маси легких частинок, гідродинамічні ефекти типу парадоксу Даламбера і динамічний ефект Казимира [39-40].

В електрофізичних системах основними динамічними носіями є електрони, маса яких у класичному підході Лоренца розглядається як така, що має електромагнітне походження. Це дозволяє встановити глибоку аналогію між механічними та електрофізичними процесами, що узагальнено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Електромеханічні аналогії

Динаміка точкових безструктурних частинок при лінійному, одновимірному русі	Електрофізика елементарних лінійних струмів у квазіоднорідному середовищі
Координата x	Заряд Q
Швидкість $u = \frac{dx}{dt}$	Струм $I = \frac{dQ}{dt}$
Маса, інерційність частинки m	Індуктивність, інерційність поля L
Імпульс $p = mu$	Потік індукції поля $\Phi = LI$
Дія $S = \delta p \delta x$	Дія $S = (\delta \Phi)(\delta q) = L(\delta I)(\delta q)$
Імпеданс (розмірність кг/сек), швидкість зміни інерційності системи частинок: $Z = \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{\delta S}{(\delta x)^2}$	Імпеданс (Генрі/сек), швидкість зміни інерційності польової системи $Z = \frac{\delta \Phi}{\delta q} = \frac{L(\delta I)}{\delta q} = \frac{\delta S}{(\delta q)^2}$
Сила та основне рівняння динаміки точкової частки (рівняння Ньютона для точкової частинки) $F = \frac{d}{dt} p$	Різниця потенціалів та основне рівняння динаміки елемента струму в незмінному середовищі (рівняння Кірхгофа для елемента ланцюга) $U = \frac{d}{dt} \Phi$

У механічній системі координата та імпульс утворюють канонічну пару, що визначає фазовий простір. В електрофізичній аналогії цій парі відповідають заряд та магнітний потік, які визначають енергетичні характеристики електричного та магнітного полів.

У коливальному контурі роль координати грає заряд, а роль швидкості — струм.

Електричне поле $\vec{E}$ та магнітне поле $\vec{H}$ утворюють коливальну систему, причому енергія магнітного поля грає роль кінетичної енергії, а енергія електричного поля потенційної енергії. Стандартна класична електродинаміка призводить до того, що у відкритому просторі поперечні електричне та магнітне поля, що утворюють електромагнітну хвилю, синхронно змінюють свою амплітуду. Відповідно до класичної електродинаміки щільність енергії поперечного ЕМ поля у вакуумі дорівнює сумі квадратів напруженостей електричного та магнітного полів (сумі кінетичної та потенційної енергій):

$$W_{em} = \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}, \quad (3.1)$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} = 1.25 \cdot 10^{-6} \text{ Генри/м, } \varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Фарада/м,}$$

де використовуються діелектрична ε_0 і магнітна μ_0 проникності вакууму.

Найважливішою загальною особливістю будь-яких скалярних полів є їх прямий зв'язок з варіацією інерційності системи частинок, що взаємодіють через ці поля та варіації зв'язків та структури у системі заряджених частинок відповідають варіаціям у структурах потенційних електромагнітних полів. Варіація зв'язків та колективні стани системи призводять до того, що у системи виникає дефект мас і починають діяти масові, зокрема ентропійні сили.

$F_s = \left[\frac{d}{dt}(-\delta m) \right] u$ та ентропійні ЕДС $U_s - \frac{d(\delta L)}{dt} I$. Пояснимо фізичні підстави запровадження терміну ентропійна сила.

Нехай безліч однакових частинок починає рух як ціле під дією масової сили $\vec{F}_{m0}$, тобто одночасно всі частинки множини утворюють ансамбль і одержують те саме прискорення. У початковий час динаміка ансамблю частинок, як єдиного цілого (— швидкість всієї системи, як цілого) визначається рівнянням Ньютона для матеріальної точки з певною масою:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{F}_{m0}. \quad (3.2)$$

Під дією масової сили $\vec{F}_{m0}$ виникає когерентне прискорення усієї системи $\vec{a}_m = \frac{d}{dt}(\vec{u})$, яке ініціює можливість зміни структури і, отже, внутрішні самоузгоджені масові сили.

Найбільш поширеними масовими силами у системі багатьох частинок є самоузгоджені пружні потенційні сили (сили тиску, пов'язані з варіаціями енергії зв'язку B) $\vec{F}_B = -\nabla U = \nabla B$, які у найпростішому вигляді для одновимірного руху видаються через квадратичний потенціал $U = -\kappa x^2$. Для однорідних обмежених систем масова сила $\vec{F}_B$ зосереджена поблизу кордонів області.

Повільна еволюція системи багатьох частинок характеризується адіабатичними інваріантами (наприклад, дією та ентропією, імпедансом) незважаючи на те, що, строго кажучи, зміни системи у часі відбуваються.

Однак, справжній синтез нових структур і станів можливий тільки при зміні імпедансу (порушення адіабатичності динаміки системи та адіабатичних інваріантів). Фізичний сенс дії — обсяг фазового простору $\delta p \cdot \delta x$, а імпедансу - аспектне відношення елемента об'єму фазового простору $\delta p / \delta x$, нагадаємо, що розмірність дії Дж с, а імпедансу — Дж с/х² для будь-якої розмірності узагальненої координати δx .

Співвідношення для електрофізичних параметрів ланцюга з зв'язками, що варіюються, наведені в Таблиці 3.2.

Таблиця 3.2. Електромеханічні аналогії систем з зв'язками, що варіюються

Динаміка систем частинок із варіацією зв'язків у електромагнітному полі	Електрофізика систем струмів із варіацією зв'язків
Маса, інерційність частинки $m = m_0 - \delta m$	Індуктивність, інерційність поля $L = L_0 - \delta L$
Імпу $p = mu = (m_0 - \delta m)u = m_0 u + qA$,	Потік індукції поля: $\Phi = LI = (L_0 - \delta L)I = p_0 - (\delta L)I$
Рівняння динаміки системи частинок з варіацією зв'язку: $\frac{1}{m} F = \frac{1}{m} F_B + \frac{1}{m} \frac{d}{dt} p = -\frac{\delta m}{m} \frac{du}{dt} + \frac{1}{m} F_S + \frac{1}{m} F_B$ $F_S = \left[\frac{d}{dt} (-\delta m) \right] u, \quad F_B = \nabla B$	Рівняння динаміки системи частинок з варіацією зв'язку: $\frac{1}{L} U = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \Phi = -\frac{(\delta L)}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{L} U_S + \frac{1}{L} U_B,$ $U_S - \frac{d(\delta L)}{dt} I, \quad U_B = \nabla_q (\delta L)$

Якщо для силових і моментних механічних впливів запровадити потенціали, всі вони стають схожими на потенціали в електродинаміці Максвелла.

Зазначимо, що варіації інерційностей елементів тензора інерційностей, відповідно до рівнянь Ейлера, призводять до появи самоузгоджених масових сил та моментів та пов'язані з відповідними когерентними прискореннями. Ці особливості рівнянь динаміки Ейлера і Максвелла дозволяють формалізувати варіаційний принцип еволюції як механіки, так електродинаміки.

Покажемо особливості масових сил при варіації маси ансамблю частинок на прикладі найпростішого вихідного рівняння динаміки для трансляційних рухів $\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{F}_{m0}$. Варіацію інерційності системи частинок у цьому рівнянні опишемо дефектом маси $m = m_0 - \delta m$.

Тоді їм

$$m \frac{d}{dt}(\vec{u}) = \vec{F}_m + \vec{F}_S, \quad \vec{F}_S = -\frac{d m}{dt} \vec{u}. \quad (3.3)$$

З останніх співвідношень видно, що варіація дефекту мас створює самоузгоджену масову силу, що має характер в'язкої, реактивної сили. Основна причина, що веде до виникнення такої сили — зміна структури системи (отже,

ентропії) та енергії зв'язку системи або дефекту мас, який можна записати $\delta m = \delta m(S)$. Таким чином, самоузгоджену силу, що виникла $\vec{F}_S$ можна назвати ентропійною та висловити через виробництво ентропії:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{\Delta_s}(-\sigma_s), \quad (3.4)$$

де σ_s — виробництво ентропії, $\Delta_s = \left[-\frac{dS}{d(\delta m)} \right]$, а дефект маси пов'язаний із параметром порядку $\eta_p \approx \delta m / m$. Тоді виконується рівняння із самоузгодженим когерентним прискоренням $\vec{a}_{cog} = \frac{d}{dt}(\vec{u})$:

$$\left[\frac{1}{m} \frac{d(\delta m)}{dt} \right] \vec{u} = -\vec{a}_{cog}, \quad \vec{a}_{cog} = \frac{1}{\tau_s} \vec{u}, \quad \tau_s = \frac{\Delta_s}{(-\sigma_s)}. \quad (3.5)$$

Розглянемо приклад найпростішої пружної коливальної системи - рух як цілої множини однакових частинок під дією пружної масової сили $\vec{F}_{m0} = -k(t)\vec{x}$, де $k(t)$ — еластичність масової сили.

При цьому всі частинки множини утворюють ансамбль і отримують одне і те ж прискорення, пропорційне зміщенню системи $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ — швидкість всієї системи, як цілого (швидкість центру мас), $m(t)$ — інерційність системи.

У нормованих змінних система набуває вигляду динаміки у фазовому просторі:

$$\frac{dp}{dt} = -k(t)x, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m(t)}p, \quad (3.6)$$

які визначаються вихідними параметрами системи та можуть бути представлені у формі:

$$\frac{dp}{dt} = -\omega(t)Z(t)x, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}p, \quad (3.7)$$

$$k(t) = \omega(t)Z(t), \quad \frac{1}{m(t)} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}. \quad (3.8)$$

де введено два найважливіші параметри системи:

- $\omega(t) = \sqrt{k(t)/m(t)}$ — власна частота;
- $Z(t) = \sqrt{k(t)m(t)}$ — імпеданс.

У будь-яких фазових просторах імпеданс має розмірність дії (обсягу фазового простору), поділеного на квадрат координати, тому для прояснення фізичного сенсу можливих режимів коливальної системи виявляється зручним ввести не тільки нові параметри, але й нові змінні з використанням нормування імпеданс:

$$p(t) = \sqrt{Z(t)}P(t), \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{Z(t)}}X(t). \quad (3.9)$$

У цих змінних система представляється диференціальними рівняннями у фазовому просторі $(P(t), X(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) &= -g(t)P(t) - \omega(t)X(t), \\ \frac{d}{dt}X(t) &= \omega(t)P(t) + g(t)X(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

де $g(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln(Z(t))$. Видно, що режими коливальної системи залежать від швидкості зміни імпедансу $Z(t)$, а не частоти та класифікацію станів системи необхідно проводити тільки за швидкістю зміни імпедансу, який завжди прямо пов'язаний зі структурою системи [41]. Саме тому узгодження еволюції різних підсистем проводиться за імпедансом. Повільні та швидкі змінні легко поділяються в комплексній області, якщо ввести змінні $a(t)$, $a^*(t)$, а також відповідні амплітуди, що повільно змінюються $b(t)$ и $b^*(t)$:

$$a(t) = \frac{X(t) + iP(t)}{\sqrt{2}}, \quad a^*(t) = \frac{X(t) - iP(t)}{\sqrt{2}}, \quad (3.11)$$

$$b(t) = a(t) \exp \left[i \int_0^t \omega(t') dt' \right], \quad b^*(t) = a^*(t) \exp \left[-i \int_0^t \omega(t') dt' \right].$$

У комплексній області рівняння коливань системи набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(t) &= -i\omega(t)a(t) + g(t)a^*(t); \quad \frac{d}{dt} a^*(t) = i\omega(t)a^*(t) + g(t)a(t), \quad (3.12) \\ \frac{d}{dt} b(t) &= g(t)b^*(t) \exp \left[2i \int_0^t \omega(t') dt' \right]; \quad \frac{d}{dt} b^*(t) = g(t)b(t) \exp \left[-2i \int_0^t \omega(t') dt' \right]. \end{aligned}$$

Величина $a(t)a^*(t)$ суворо зберігається, якщо імпеданс константа (тобто, $g(t)=0$), а за повільної зміни імпедансу є адіабатичним інваріантом. Геометричний зміст імпедансу полягає в тому, що він визначає деформацію елементарного осередку фазового простору коливальної системи. Адіабатичний інваріант $a(t)a^*(t)$ систем має сенс числа квантів.

Будь-які процеси синтезу що неспроможні відбуватися із збереженням числа коливань, а вимагають їх варіації і, отже, можливі лише за зміни імпедансу системи. Цей висновок також слідує прямо з виду гамільтоніана системи:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{k(t)x^2}{2} = \frac{\omega(t)}{2} \left[\frac{p^2}{Z(t)} + Z(t)x^2 \right], \quad (3.13)$$

Бачимо, що при постійному імпедансі зміна частоти з часом, якісно, не змінює рівняння динаміки системи, так як вона інваріантна до перетворення часу за допомогою співвідношення: $\tau = \int_0^t \omega(t') dt'$. Зміна імпедансу з часом призводить

до появи якісних змін у фазовому просторі системи і може ініціювати розвиток параметричної нестійкості [42-43]. Когерентне прискорення (аксіальне або обертання) виділяє напрямок у просторі вздовж прискорення або осі обертання та ортогональну до цього напрямку поверхню. Відповідно до теореми Нетера таке порушення симетрії робить систему відкритою по моменту імпульсу - тобто

відповідає виникненню обертання системи як цілого з деякою кутовою швидкістю навколо виділеного напрямку ω навколо виділеного спрямування.

3.2. Моделі керування та оптимізації коливальних систем заряджених частинок, змінні, що спостерігаються та неспостерігаються

У класичних динамічних системах природним чином виникає необхідність розмежування спостережуваних, керованих та прихованих (неспостережуваних) змінних. Це передбачає визначення характерних масштабів, у межах яких здійснюється спостереження та керування еволюцією системи, а також масштабів, що залишаються поза прямим вимірюванням і формують внутрішню (ефективно приховану) динаміку.

Існування прихованих параметрів може бути інтерпретоване як прояв взаємодії системи із зовнішнім середовищем, що містить неконтрольовані або статистично невизначені впливи. Важливо, що таке середовище, навіть будучи некерованим, може виступати джерелом енергії для системи, яка через керовані ступені свободи здатна здійснювати її структуроване перетворення.

Подібні механізми широко реалізуються в природних системах, зокрема в біологічних, де енергія стохастичних процесів середовища використовується для формування когерентного руху [16], а також у нанотехнологічних системах, де флуктуаційні та теплові процеси застосовуються для ініціації керованих рухів на мікро- та нанорівні [17]. Перетворення енергії хаосу в регулярний рух може бути реалізовано на основі різних нелінійних та нестаціонарних властивостей та явищ, наприклад, таких як нелінійне тертя явища типу маятника Капиці та вібротранспорту, а також стохастичного резонансу [18-20].

Подібні ситуації можуть виникати в будь-яких динамічних системах під дією коливань малої амплітуди з частотами значно вище, ніж коливання, що спостерігаються в системі (вібрації). У цьому випадку ініціюються динамічні явища, які неможливо пояснити в рамках низькочастотних сил, що спостерігаються — з'являються додаткові вібраційні потенціали, що перенормують

повільні макроскопічні рухи. Змінюється стійкість старих станів і з'являються нові стійкі стани.

Формально така фізична ситуація прояснюється у простій динамічній моделі дії на систему високочастотної стоячої хвилі $\Psi(x)\sin(\omega t)$ у певній виділеній області простору:

$$m \frac{d}{dt}(\ddot{u}) = -\frac{d m}{dt} \ddot{u} + \vec{F}_m + \Psi(x)\sin(\omega t). \quad (3.14)$$

Особливості поведінки системи в цьому випадку можна отримати або застосовуючи метод Боголюбова — Митропольського, або прямо поділяючи повільні та швидкі рухи, вводячи «повільний» та «швидкий» час t та $\tau = \omega t$: $x(t, \tau) = X(t) + \psi(t, \tau)$ з нульовим середнім за «швидким» часом $\langle \psi(t, \tau) \rangle_\tau = 0$ (див., наприклад, [44]). Для рухів, що спостерігаються, виходить рівняння:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{dt} \right) = -\frac{d m}{dt} \frac{dX}{dt} + \vec{F}_m(t) + \Pi'(X), \quad \Pi'(X) = \frac{\psi^2(X)}{4m\omega^2}. \quad (3.15)$$

Завдяки високочастотним силам спостерігається рух, який описується тепер модифікованим динамічним рівнянням з новим потенціалом $\Pi(X)$ у макроскопічних змінних та стійкі стани вихідної динамічної системи суттєво змінюються.

Дія на систему багатьох високочастотних сил з випадковими фазами та амплітудами може розглядатися як реалізація випадкової зовнішньої сили, яка створюється середовищем з хаотичними флуктуаціями (термостатом).

Зазвичай вважається, що динамічна система (що знаходиться в квазірівноважному стані) може отримати енергію від хаотичної системи тільки у випадку, якщо термостат має температуру більшу, ніж у динамічної системи, а ентропія динамічної системи при цьому підвищується.

Однак, цей висновок стає неправомірним у нерівноважних системах і, тим більше, у системах із порушеннями симетрії та, отже, законів збереження.

Тобто, в неінерційних системах відліку можна створити потік енергії із середовища динамічної системи, зокрема потік енергії від флуктуацій вакууму в когерентний рух частинок системи.

Механізмом ефективного перетворення хаотичної енергії середовища на когерентний рух системи є розвиток параметричної нестійкості за рахунок нестационарності імпедансу та порушення ізотропії простору в неінерційних системах відліку.

3.3. Моделі електрофізичних систем на основі рівнянь пружного середовища

Після введення М. Фарадеєм та Дж. Максвеллом поняття поля відбулося концептуальне розділення матеріальних об'єктів на дискретні частинки речовини та неперервні поля зв'язків. У такій інтерпретації частинки характеризуються скінченною густиною енергії, тоді як поля є нелокалізованими носіями взаємодії, здатними переносити енергію в просторі без прив'язки до матеріальних центрів. Матеріальні системи в такому підході розглядаються як поєднання дискретних елементів і неперервного середовища полів. Детальний історико-методологічний аналіз розвитку концепції електромагнітного поля наведено у роботі Уїттекера [45]. Подолання низки концептуальних обмежень класичного підходу можливе шляхом узагальнення механіки континууму, зокрема введенням моментних напружень. Ці недоліки виправляються додатковим припущенням про передачу навантажень через елемент поверхні ds не лише головним вектором $\vec{p}ds$, але також головним моментом $\vec{m}ds$. Таке припущення призводить до необхідності впливу на елемент об'єму dv не тільки напруг σ_{ij} , але й моментних напруг μ_{ij} . Виявляється, що таке припущення призводить до несиметричних тензорів σ_{ij} та μ_{ij} . У класичній теорії пружності матеріальна частка збігається з точкою, а деформований стан описується переміщенням точки.

Ідея середовищ із суттєвими кутовими швидкостями внутрішніх обертальних ступенів свободи була запропонована ще на початку XX століття,

однак її математична формалізація стала можливою лише з розвитком сучасної теорії континуумів. Нині такі моделі використовуються, зокрема, для опису магнітних матеріалів та складних структурованих середовищ. Тіла-точки аналізованого середовища, на відміну частинок традиційно аналізованого середовища, можуть обертатися навколо своєї осі з великою кутовою швидкістю. При цьому інші переміщення та повороти будуть кінцевими. Таке середовище можна назвати узагальненим середовищем Кельвіна [46-47], оскільки, на відміну від середовища Кельвіна, воно має трансляційні ступені свободи і чинить опір трансляційним деформаціям (див. Рис. 3.1)

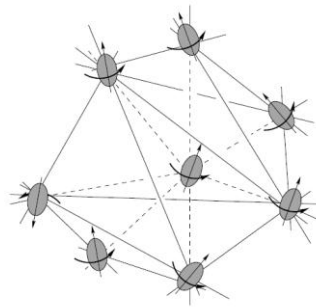


Рис. 3.1. Узагальнене середовище Кельвіна

На відміну від цієї моделі, підхід братів Коссера передбачає введення локального ортогонального тригранника, жорстко пов'язаного з кожною матеріальною часткою. Таким чином, кожна частка набуває орієнтаційних ступенів свободи, що відповідає полярному континууму. Кожна частка середовища Коссера є малим абсолютно твердим тілом. Деформація такого середовища описується не лише вектором переміщення $\vec{u}$, але також вектором повороту $\vec{\omega}$, тобто, величиною, що є функцією положення x та часу t . У динамічній моделі середовища Коссера розглянемо довільну область тіла, обмежену ортогональним тригранником (рис. 3.2а), де кожна матеріальна точка середовища є малим абсолютно твердим тілом, має, на відміну від класичної теорії пружності, лінійний розмір L і пов'язана з іншими частинками пружно. (рис. 3.2).

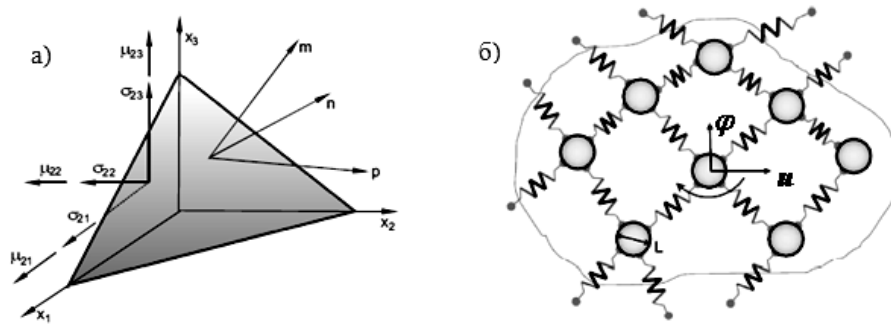


Рис. 3.2 Модель серед братів Коссера. а) узагальнений тригранник; б) пружні зв'язки між елементами

Класифікація узагальнених континуумів здійснюється за критерієм нелокальності [48], який визначається характерними масштабами довжини: розміром структурних елементів, радіусом кореляції або дальністю взаємодій. Теорія є:

- нелокальною або сильно нелокальною, якщо «роздільна здатність» моделі має порядок масштабного фактора l і фізично допустимо розглядати напружено-деформований стан фрагментів тіла з характерним розміром порядку масштабного фактора та поширення хвиль з довжиною, порівнянною з масштабним фактором;
- слабо нелокальною, якщо масштабний параметр малий порівняно з довжинами хвиль, що розглядаються характерними геометричними розмірами елементів конструкцій і локальною, якщо масштабний фактор l зневажливо малий у порівнянні з довжиною хвилі або геометричними розмірами. Приклад — класична теорія пружності.

Від характерного розміру тетраедра моделі Коссера залежать параметри моделей і його не можна зробити довільно малим для конкретного середовища. Представницький обсяг повного континууму повинен мати характерний лінійний розмір, що на порядок перевищує характерний лінійний розмір тетраедра.

Континуум у моделі братів Коссера базується на елементарних об'ємах, наділених не лише масовою щільністю ρ , а й щільністю моменту інерції —

тобто континуум однороторних гіростатів. Однороторний гіростат — це складна частка, що складається з несучого тіла та ротора (див. Рис. 3.3)

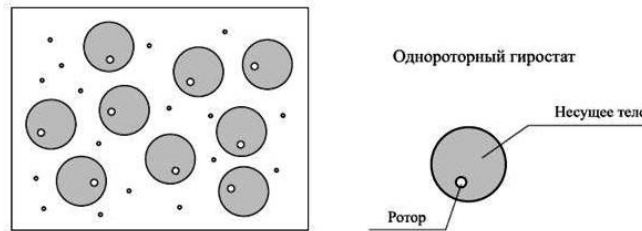


Рис. 3.3. Континуум з однороторних гіростатів

Рух матеріального тетраедра вимагає завдання векторів переміщення його центру мас $\vec{u}(\vec{r}, t)$ та обертання $\vec{\omega}(\vec{r}, t)$ щодо цього центру мас. Зміщення є безпосередньо спостережуваними в експерименті величинами. Спостережуваними та безпосередньо вимірюваними є похідні зміщення за часом та простором:

$v^j = \frac{\partial u^j}{\partial t}$ — швидкість зміщення, $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$ — тензор пружних

деформацій, $\sigma_{ij} = \lambda \text{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + \mu u_{ij}$ — тензор напруг.

У класичній фізиці динаміка пружного середовища описується запровадженням вектора усунення $\vec{u}$, для якого з урахуванням зовнішніх сил $\vec{F}$ справедливе рівняння Ламе [49]:

$$\rho \ddot{\vec{u}} - (\lambda + 2\mu) \nabla \text{div}(\vec{u}) + \mu \text{rot}[\text{rot}(\vec{u})] = \vec{F}. \quad (3.16)$$

Тут λ і μ — пружні константи речовини Ламе, які визначають швидкості поширення поздовжніх та поперечних хвиль у пружному середовищі: $c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ і

$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. З умов термодинамічної стійкості випливає, що пружні константи позитивні та $c_l > c_t$.

Зазвичай у техніці використовуються модуль Юнга E_e та коефіцієнт Пуассона $-1 < \nu_e < 0,5$, які пов'язані через модуль зсуву $G = \frac{E_e}{2(1 + \nu_e)}$. Для всіх

матеріалів виконується $\frac{1}{3} < \frac{G}{E_e} < \infty$. Крім модуля зсуву використовується модуль об'ємної пружності $K = \frac{E_e}{3(1-2\nu_e)}$.

Модуль об'ємної пружності зазвичай задається разом із модулем зсуву. Ці дві величини ϵ , у певному сенсі, фізично незалежнішими параметрами. Зміна обсягу матеріалу визначається лише модулем об'ємної пружності, тоді як спотворення його форми — лише модулем зсуву. Параметри Ламе пов'язані з модулями пружності:

$$\mu = G = \frac{E_e}{2(1+\nu_e)}, \quad \lambda = \frac{E_e \nu_e}{(1-2\nu_e)(1+\nu_e)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (3.17)$$

Енергія пружної деформації є квадратичною формою тензора деформації u_{ij} . З тензора другого рангу можна скласти дві скалярні комбінації — $\left(\sum_i u_{ii}\right)^2$ та $\sum_{i,j} u_{ij}^2$, тому вклад пружних деформацій у вільну енергію виражаються через ці скаляри у вигляді лінійної комбінації з параметрами Ламе:

$$F = \frac{\lambda}{2} \left(\sum_i \epsilon_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2, \quad F = \frac{\lambda}{2} \left(\sum_i u_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,j} u_{ij}^2. \quad (3.18)$$

Рівняння руху континууму при заданих векторах питомої (на одиницю об'єму) густини об'ємних сил $\vec{X}$ та питомої щільності об'ємних моментів $\vec{Y}$ мають вигляд:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + X_i, \quad J \ddot{\omega}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i, \quad (3.19)$$

де σ — несиметричний тензор напруг, $\hat{\mu}$ — несиметричний тензор моментної напруги. До цих рівнянь руху континууму необхідно додати рівняння теплопровідності для різниці температур $\theta = T - T_0$ (T_0 — початкова температура середовища):

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\text{div}(\vec{u})] = -\frac{Q}{\kappa}, \quad (3.20)$$

де $\kappa = \frac{k}{C_\varepsilon}$, $\eta_0 = \nu \frac{T_0}{k}$, $Q = \frac{W}{k}$, C_ε — теплоємність при постійній деформації.

Повну систему динамічних рівнянь можна представити у вигляді пов'язаних між собою рівнянь у переміщеннях та обертаннях з використанням диференціальних векторних операторів, повного набору механічних $\beta, \gamma, \varepsilon, \alpha$, коефіцієнтів Ламе, теплових констант та рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} [\operatorname{rot}(\vec{u})] + 2\alpha \operatorname{rot}(\vec{\omega}) + \vec{X} - \nu \nabla \theta, \\ J \ddot{\vec{\omega}} &= (\beta + 2\gamma) \nabla \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} [\operatorname{rot}(\vec{\omega})] + 2\alpha \operatorname{rot}(\vec{u}) + \vec{Y} - 4\alpha \vec{\omega}, \\ \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\vec{u})] &= -\frac{Q}{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Цю систему рівнянь у багатьох випадках можна використовувати у більш звичному спрощеному вигляді, якщо додати у пряме співвідношення між обертанням і переміщенням малі і вважатимуться:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\vec{u}) + \xi^A \approx \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\vec{u}). \quad (3.22)$$

Скориставшись цим співвідношенням, отримуємо пов'язані рівняння теорії термопружності для переміщень $\vec{u}$ та рівняння теплопровідності для температури θ :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} [\operatorname{rot}(\vec{u})] + \vec{X} - \nu \nabla \theta, \\ \dot{\theta} - \kappa \theta_{,jj} &= Q - \kappa \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\vec{u})], \quad \kappa \eta_0 = \frac{k}{C_\varepsilon} \nu \frac{T_0}{k} = \nu \frac{T_0}{C_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Зміщення $\vec{u}$, як видно з рівнянь, у випадку може мати і вихрові (пропорційні $\operatorname{rot}(\vec{u})$) та потенційні (пропорційні $\operatorname{div}(\vec{u})$) компоненти.

За рахунок цього виникає пружність і можуть поширюватися обурення, в яких існує поздовжня і поперечна складові. Важливо, що у цій моделі, типу моделі Кельвіна, поздовжнє обурення викликають поперечні коливання, як і

твердому тілі. У природі існують різні приклади середовищ, що запасують енергію шляхом обертання, так:

- існують парафіни [50], в яких із зростанням температури ланцюжки атомів починають обертатися все з більшою швидкістю. Спочатку повороти мають коливальний характер, а потім, починаючи з певної температури, кутова швидкість власного обертання не змінює знаку і зростає за величиною. При цьому для спостерігача, який живе у відносно «повільному» часі, ланцюжки здаються осесиметричними;
- у магнітних матеріалах намагніченість пов'язана через гіромагнітне співвідношення з кінетичним моментом матеріального обсягу середовища. Магнітна індукція створює об'ємний момент, що діє матеріальний обсяг. Таким чином, магнітний матеріал є полярним середовищем із чималим кінетичним моментом.

Це дає можливість встановити аналогію між нелінійним середовищем, частинки якої мають велику швидкість власного обертання, і пружними феромагнетиками в стані магнітного насичення, які представляються системою слабовзаємодіючих квазічастинок.

- Крім зміщення суттєвими фізичними величинами є швидкості

зміщення: $v^j = \frac{\partial u^j}{\partial t}$, тензор напруг $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right)$ та тензор пружних

деформацій $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right)$.

Введемо нові змінні:

- нормоване усунення $\vec{A}_m = \sqrt{\mu} \vec{u}$,
- вихрову характеристику руху середовища $\vec{H} = \sqrt{\mu} \operatorname{rot}(\vec{u}) = \operatorname{rot}(\vec{A}_m)$,
- швидкість зміщення середовища $\vec{E} = -\sqrt{\rho} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$
- та її дилатацію $W_{ep} = \sqrt{\lambda + 2\mu} \operatorname{div}(\vec{u})$.

У нових змінних рівняння пружності набувають вигляду:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c_l \nabla W_p - c_l \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{J}, \quad \vec{J} = -\frac{\vec{F}}{\sqrt{\rho}}; \quad (3.24)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c_l} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = -\frac{1}{c_l} \frac{\partial W_p}{\partial t}; \quad \operatorname{div}(\vec{H}) = 0. \quad (3.25)$$

Повна система рівнянь першого порядку описує поширення і вихрових, і акустичних хвиль в пружному середовищі і, отже, вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ розкладаються на вихрові та потенційні компоненти.

Система рівнянь для вихрових компонентів збігається з рівняннями Максвелла, якщо швидкість поздовжніх хвиль збігається зі швидкістю поперечних, а потенційне поле відіграє роль заряду, сформованого з польових структур.

Рівняння Максвелла у звичній зараз формі Хевісайда збігаються за формою з отриманими гідродинамічними рівняннями лише у припущенні: про повну стисливість пружного середовища (ефіру), тобто у припущенні вихрової природи напруженості полів. Про збіг поздовжньої та поперечної швидкостей, тобто при виконанні співвідношень $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ або $\lambda + \mu = 0$. Ці умови вказують на те, що середовище, що представляє ЕМ поля, знаходиться на межі стійкості.

Рівняння для узагальненого пружного середовища Кельвіна можуть бути трансформовані в узагальнені рівняння електромагнітних полів:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_e + \frac{1}{\mu} \nabla W_{ep}, \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}_m - \frac{1}{\varepsilon} \nabla(W_{mp}), \quad (3.26)$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_e - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon W_{ep}), \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = \rho_m - \frac{\partial}{\partial t}(\mu W_{mp}). \quad (3.27)$$

В даний час широко використовуються моделі конденсованих середовищ на основі введення мод власних коливань — квазічастинок та аналогії між фізикою високих енергій та фізикою наднизьких температур. Узагальненням уявлень про квазічастинки, що володіють не тільки електричними, а й магнітними зарядами є системи багатьох заряджених частинок (наприклад,

електронів), що у когерентно-корелированому стані, які можна назвати когерентними доменами. Кожен домен є колективним зарядженим гіростатом. Відповідно до узагальненої теореми Гельмгольца, формальні рішення повної системи рівнянь можна записати через два векторні потенціали та два скалярні потенціали $(\varphi_e / c, \vec{A}_m)$ та $(\varphi_m / c, \vec{A}_e)$:

$$\vec{D} = -\varepsilon \nabla(\varphi_e) - \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} - \text{rot}(\vec{A}_e), \quad W_{ep} = \frac{\partial(\varphi_e / c)}{c \partial t} + \text{div}(\vec{A}_m), \quad (3.28)$$

$$\vec{B} = -\mu \nabla(\varphi_m) - \mu \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t} + \text{rot}(\vec{A}_m), \quad W_{mp} = \frac{\partial(\varphi_m / c)}{c \partial t} + \text{div}(\vec{A}_e), \quad (3.29)$$

При цьому повна густина енергії поля виражається співвідношенням:

$$\rho_W = \frac{1}{2\varepsilon} (\vec{D}^2 + W_{mp}^2) + \frac{1}{2\mu} (\vec{B}^2 + W_{ep}^2) \quad (3.30)$$

з вкладами та вихрових компонентів та потенційних компонентів ЕМ поля. Теорія електромагнітного поля та рівнянь Максвелла є і зараз розвивається з принциповими питаннями, на які немає однозначних відповідей (див., наприклад, огляди [51-52]).

Оригінальний погляд на будову матерії та одночасне існування електричного та магнітного зарядів викладено у 1969 р. у роботі Швінгера «Магнітна модель матерії» [53], опублікованій у журналі Science і в якій, як сказав Швінгер, здійснено «мислене проникнення у структуру ядерних частинок та передбачення». У цій роботі введено частинки, що мають одночасно електричний і магнітний заряди. У цій роботі введено частинки, що мають одночасно і електричний q_e та магнітний заряд q_m . Динаміку таких частинок можна описати запровадженням функції Лагранжа виду:

$$L_p = -m_{ep} c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + q_e \vec{u} \vec{A}_m - q_e \varphi_e + q_m \vec{u} \vec{A}_e - q_m \varphi_m, \quad (3.31)$$

а рівняння динаміки із силами $\vec{F}_{dyn}$ з боку електромагнітних полів мають вигляд:

$$\frac{d(m_{e\psi}\vec{u})}{dt} = \vec{F}_{dyon}, \quad \vec{F}_{dyon} = q_e(\vec{E}_\perp + \vec{E}_p + \vec{u} \times \vec{B}) + q_m(\vec{H}_\perp + \vec{H}_p - \vec{u} \times \vec{D}). \quad (3.32)$$

Тут зазначено:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t}, \quad \vec{E}_p = -\nabla \varphi_e = c\nabla \psi, \quad \vec{D} = \text{rot}(\vec{A}_e), \quad (3.33)$$

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}_m); \quad \vec{H}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t}, \quad \vec{H}_p = -\nabla \varphi_m. \quad (3.34)$$

Зараз аналізується не лише механіка, але і гідродинаміка діонів (см. наприклад, [54]). У розширених рівняннях, крім напруженостей електричного та магнітного полів, які передбачаються такими, що мають як вихрову, так і потенційну частини, включені і скалярні електричні W_{ep} та скалярні магнітні поля W_{mp} .

В рівняннях присутні не тільки щільність ρ_e та щільність струмів провідності $\vec{j}_e$, але й:

- $\vec{j}_D = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D})$ — щільність вихрових струмів усунення (у традиційних рівняннях Максвелла це єдиний внесок від вакуумних струмів);
- $\vec{j}_B = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B})$ — щільність вихрових магнітних струмів усунення (у традиційних рівняннях Максвелла таке позначення не вводиться. Доданок є, але передбачається відсутність магнітних струмів);
- $\rho_{ep} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon W_{ep})$ — щільність поляризаційних зарядів у вакуумі;
- $\vec{j}_{ep} = \frac{1}{\mu} \nabla(W_{ep})$ — густина поздовжніх струмів у вакуумі;
- $\rho_{mp} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu W_{mp})$ — щільність поляризаційних спинорних зарядів у вакуумі;
- $\vec{j}_{mp} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla(W_{mp})$ — густина поздовжніх спинорних струмів у вакуумі.

З використанням наведених визначень рівняння Максвелла в інтегральній формі мають вигляд:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = U_M = \int_S (\vec{j}_D + \vec{j}_e + \vec{j}_{ep}) d\vec{s}, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = U_E = - \int_S (\vec{j}_B + \vec{j}_m + \vec{j}_{mp}) d\vec{s} \quad (3.35)$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \Phi_D = \int_V (\rho_e + \rho_{ep}) dV, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{s} = \Phi_B = \int_V (\rho_m + \rho_{mp}) dV. \quad (3.36)$$

- Як видно, у розширених рівняннях є не одне джерело від поляризації вакууму, а сім джерел. Ці джерела полів призводять до появи нових електрофізичних елементів схем (крім звичайних опорів, ємностей та індуктивностей).
- Рівняння Максвелла в квазістаціонарному випадку формулюються як закони Кірхгофа в інерційних системах відліку.
- Ініціювання неінерційних систем відліку під дією зовнішніх масових імпульсних сил призводить до появи анізотропії у просторі, потенційних полів та порушення законів збереження. Всі електричні ланцюги поділяються на два великі класи, це - ланцюги, що представляють замкнуті контури (тобто один або кілька послідовних коливальних контурів), та ланцюги, що мають вузли (точки перетину кількох гілок струму), тобто систему паралельних коливальних контурів.

Будь-яка коливальна система на низьких частотах поводить, як квазістаціонарна система із зосередженими елементами, але в високих частотах, як система з розподіленими параметрами.

Електромагнітні поля в ідеальних станах вакууму описуються рівняннями Максвелла без вкладів потенційних полів і в квазістаціонарному режимі величини електричних і магнітних полів задовольняють рівнянням, які впливають з рівнянь роторних для напруженостей полів:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_e, \quad \text{rot}(\vec{E}) = 0. \quad (3.37)$$

Наслідком цих спрощених рівнянь Максвелла є рівняння Кірхгофф для електричних кіл. Причому видно, що розглянуті наближення справедливі за

досить жорстких умов, наприклад струми провідності повинні бути такими, щоб можна було знехтувати їх розбіжністю ($\text{div}(\vec{j}_e) \approx 0$).

Електричні ланцюги, як і будь-які динамічні системи, характеризуються і потенційною і кінетичною енергіями. Потенційна енергія зосереджена в ємнісних елементах ланцюга, а кінетична — індуктивних, а струми, що протікають по цих ємнісних і індуктивних елементах, представлені однією компонентою, що випливає з того, що системи відліку вважаються інерційними.

У зазначених наближеннях для інерційних систем відліку:

- роторне рівняння для електричного поля призводить до закону рівності нулю суми падінь напруги по замкнутому контуру (ланцюзі). Це рівняння є основою опису процесів у послідовних коливальних контурах;
- дивергентне рівняння струму призводить до вимоги рівності нулю суми струмів, що перетинаються в одному вузлі (закон збереження заряду), і визначає рівняння ланцюгів, що описують процеси в паралельних коливальних контурах.

Перехід між інерціальними системами відліку в електрофізиці може бути описаний переходом від послідовного ланцюга до паралельного, оскільки збільшення відносної швидкості вздовж однієї координати системи відліку відповідає появі додаткової гілки струму.

Масове прискорення системи відліку проявляється в тому, що крім основної компоненти струму, спрямованої вздовж виділеного напрямку і збуджує вихрові поля, стають суттєвими струми по всіх просторових напрямках. Індуктивні елементи, які в інерціальній системі представлені однією компонентою струму в неінерційній системі відліку в результаті анізотропії стану доповнюються так, що кожному просторовому напрямку відповідає своя компонента струму.

Процеси поляризації вакууму, які враховуються у розширених рівняннях Максвелла, призводять до порушення вимоги рівності нулю дивергенції векторного потенціалу та дивергенції струмів провідності. У цьому випадку із

модифікованих роторних рівнянь впливають рівняння, які є основою узагальнених рівнянь Кірхгоффа:

$$\operatorname{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_e + \vec{j}_{ep}) = 0, \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S (\vec{j}_B + \vec{j}_m + \vec{j}_{mp}) d\vec{s}, \quad (3.38)$$

$$\operatorname{div}(\vec{j}_B + \vec{j}_m + \vec{j}_{mp}) = 0, \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_D + \vec{j}_e + \vec{j}_{ep}) d\vec{s}. \quad (3.39)$$

Звичайні рівняння Кірхгофф описують ланцюги струмів провідності і ланцюги з магнітними струмами (нижні рівняння).

Якщо знехтувати електричними і магнітними струмами усунення, то видно, що в електричних ланцюгах у порівнянні зі звичайними законами Кірхгоффа з'являються додаткові ЕРС в послідовних контурах (за рахунок магнітної поляризації і магнітних струмів) і додаткові нестационарні поляризаційні вакуумні електричні заряди (струми) у вузлах, тобто областях перетину струмів у паралельних контурах. Таким чином, з урахуванням можливості порушення закону збереження заряду в системах під дією коротких імпульсів та поляризації ефіру, узагальнені рівняння Кірхгоффа можна сформулювати у вигляді 4 співвідношень для електричних та магнітних ланцюгів наступним чином:

1. Сума електричних ЕРС по замкнутому контуру струмів провідності дорівнює $-\int_S (\vec{j}_m + \vec{j}_{mp}) d\vec{s}$.
2. Сума струмів провідності, що перетинаються в одному вузлі, дорівнює $|\vec{j}_{ep}| S_{cross}$, S_{cross} — ефективна площа перерізу області, зайнятої струмами провідності. Сума магнітних ЕРС за замкненим контуром магнітних струмів дорівнює $\int_S (\vec{j}_e + \vec{j}_{ep}) d\vec{s}$.
3. Сума магнітних струмів, що перетинаються в одному вузлі, дорівнює $|\vec{j}_{mp}| S_{mcross}$, S_{mcross} — ефективна площа перерізу області, зайнятої магнітними струмами.

Основними джерелами потенційних полів та їх потенціалів (W_{ep} і W_{mp}) є області компенсації вихрових магнітних потоків (роторних компонентів струмів) і області порушення замкнутості струмів.

Області компенсації магнітних потоків зазвичай виникають поблизу струмів з різним напрямом та областях перетину зустрічних магнітних потоків, області порушення замкнутості струмів пов'язані з областями елементів кінцевих відрізків струму. Обидва типи джерел потенційних полів можна сформувати із системи квазізамкнутих імпульсних струмів.

У загальному випадку електрофізична система, що моделює фізичні процеси в джерелі ЕМ полів, обов'язково представляється ланцюгами, що мають структуру, що варіюється, що складається, як з зосереджених, так і розподілених елементів (ліній передач).

Управління варіацією структури системи здійснюється послідовністю імпульсів, що ініціюють поляризаційні струми та процеси перемикавання.

У 1957 р. в електродинаміку Зельдовичем (див. в [55]) було запроваджено нове поняття — анаполь, що з новим типом моментів — тороїдальним моментом (див., наприклад, [56]). В даний час спостерігається постійне зростання інтересу до цих джерел [57-58]. Зараз добре відомо, що тороїдальні моменти можуть утворювати просторово подібні структури ЕМ поля у великому діапазоні просторових масштабів від ядерних до макроскопічних (див. рис. 4).

Моди коливань зарядів і струмів видаються у загальному випадку трьома сімействами незалежних об'ємних коливань:

- зарядів, відповідальних збудженню електричних мультиполей;
- перпендикулярних струмів ($[\vec{r}, \vec{j}] \neq 0$), відповідальних за збудження магнітних мультиполів;
- радіальних струмів ($[\vec{r}, \vec{j}] \neq 0$), що призводять до збудження тороїдальних мультиполів.

Вирази для моментів та енергетичних параметрів струмів наведені у Таблиці 3.3

Область застосування анаполів та тороїдальних моментів зараз швидко розширюється від нанотехнологій [56] аж до моделі темної матерії [59].

Розширення цих уявлень разом із гідродинамічними, колективними ефектами може очікувати ще більше майбутнє, особливо у теорії еволюції систем.

Таблиця 3.3. Електричний, магнітний та тороїдальний дипольні моменти (p , M , T), енергія взаємодії (W) з електромагнітним полем та випромінювана потужність (радіальна компонента вектора Пойнтінга S) для 3 сімейств мультиполів.

Сімейство мультиполів	Дипольний момент	Енергія взаємодії $W = \int d^3r \left(\rho \varphi_e - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A}_m \right)$	Структура поля випромінювання ($\vec{r} \cdot \vec{S}$)
Електрично	$\vec{p} = \frac{1}{i\omega} \int d^3r \vec{j}$	$-\vec{p} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{p} \cdot \vec{A}_m)$	$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 c \vec{p} ^2 \left(1 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 \right)$
Магнітні	$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\vec{r}, \vec{j}]$	$-\vec{M} \cdot \vec{B}$	$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 c \vec{M} ^2 \left(1 - (\vec{r} \cdot \vec{M})^2 \right)$
Тороїдальні	$\vec{T} = \frac{1}{10c} \int d^3r (\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{j}) - 2\vec{r}^2 \vec{j})$	$-\frac{1}{c} \vec{T} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + 4\pi \vec{j} \right)$	$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^6 c \vec{T} ^2 \left(1 - (\vec{r} \cdot \vec{T})^2 \right)$

При цьому:

1. Збіг поздовжньої та поперечної швидкостей не відповідає умові термодинамічної стійкості пружного середовища ($c_l > c_t$) і, отже, слід вважати, що пружне середовище по якому поширюються ЕМ хвилі знаходиться на межі стійкості та перехід у нестійкий режим з перебудовою структури не вимагає енергії, а може бути здійснений створенням асиметрії.
2. Фундаментальна загальна властивість скалярних полів, яку наголошували ще Нордстрем, Ейнштейн і використовував у своїх теоріях Дікке: залежність маси частинок від скалярного поля (див., наприклад, [60]). Ця залежність впливає із загальних калібрувальних властивостей лагранжіану вільних

частинок: $L_m = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Рівняння руху, задані лагранжіаном L_m , не зміняться, якщо описувати систему лагранжіаном L'_m , відмінним від вихідного множення на позитивну константу λ^2 : $L'_m = L_m \lambda^2$, що відповідає переходу до інших одиниць виміру - інших масштабів. Скалярне поле з'являється, якщо припустити, що ця глобальна симетрія порушується, і справедливою є локальна масштабна інваріантність: $L'_m = L_m (\lambda(x))^2$. Скориставшись позитивністю множника, представимо його у вигляді $(\lambda(x))^2 = \exp\left(\frac{e\varphi_e}{mc^2}\right)$, а лагранжіан, відповідно, у формі: $L_m = -m_\phi c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, $m_\phi = m \exp\left(\frac{e\varphi_e}{mc^2}\right)$.

3.4. Регуляризація нестійких процесів і рівняння Кірхгоффа для електротехнічних ланцюгів зі зв'язками, що змінюються, та їх основні властивості

В аналізованих електричних та електромеханічних системах коливання середовища проявляються як флуктуації струму в електричних ланцюгах. В інерційних системах відліку нульові коливання розглядаються як незалежні, тоді як флуктуації інтерпретуються як рівноважні збурення. Проте виникнення режимів когерентного прискорення призводить до появи колективної взаємодії між раніше незалежними ступенями свободи системи. Це супроводжується перенормуванням ефективних взаємодій і поляризацією середовища, що може бути інтерпретовано як прояв зміни ефективної геометрії простору-часу під дією масових (когерентних) сил. У таких умовах хаотичні коливання як у вакуумних, так і в електричних системах формують динамічно хаотичні стани. Еволюція системи при цьому відбувається не вздовж рівноважних траєкторій, визначених тепловими флуктуаціями, а в напрямку нерівноважних станів, що характеризуються наявністю кореляцій та порушенням локальності фізичних

властивостей [61]. Регуляризація таких процесів пов'язана з необхідністю врахування зміни структури системи, що математично може бути описано заміною класичних похідних Рімана на дробові або квантові узагальнення похідних [62]. Стан динамічного хаосу характеризується високою чутливістю до початкових умов і з математичної точки зору відповідає некоректним задачам у сенсі Адамара. Первісно такі задачі вважалися нефізичними, однак подальші дослідження показали, що значна кількість задач математичної фізики є некоректними, але при цьому мають реальний фізичний зміст і потребують спеціальних методів розв'язання. Для їх коректного аналізу застосовуються методи регуляризації [63].

Розглянемо операторне рівняння з точно заданою правою частиною:

$$Az = u_T. \quad (3.40)$$

Позначимо через z_T точне вирішення цього рівняння (тобто $Az_T = u_T$). Часто замість точних вихідних даних маємо наближені вихідні дані $\tilde{u}$ та оцінку їх похибки δ . Завдання полягає в тому, щоб за відомими вихідними даними знайти наближення z_δ до елементу z_T , що володіє властивістю стійкості до малих змін u_δ . Як наближене рішення рівняння (3.39) з наближеною правою частиною $\tilde{u} = u_\delta$ можна брати точне рішення z_δ рівняння (3.39)

$$z_\delta = A^{-1}u_\delta \quad (3.41)$$

лише для коректних завдань. Для коректних задач наближений розв'язок можна отримати безпосередньою підстановкою змінених даних. Однак для некоректних задач така процедура призводить до нестійкості розв'язку, тому необхідно вводити регуляризаційні оператори. Відповідно до цих методів наближеним рішенням рівняння (3.39) з нерегулярною правою частиною є елемент

$$z_\beta = \hat{R}(\beta)\tilde{u} = (R^\beta A^{-1})\tilde{u}, \quad (3.42)$$

отриманий за допомогою регулюючого оператора $\hat{R}(\beta)$. У цьому операторі параметр β узгоджено з характеристиками нестійкості u_δ . Рішення (3.40)

називається регуляризованим рішенням рівняння (3.39) з параметром регуляризації β .

Оператор регуляризації представлений нами у вигляді $\hat{R}(\beta) = R^\beta A^{-1}$ із використанням оператора R^β , дія якого на змінні має сенс усереднення, що переводить вихідні значення узагальнених координат динамічної системи, які спостерігаються і добре прогнозовані величини:

$$z_\beta = \hat{R}(\beta)\tilde{u} = (R^\beta A^{-1})\tilde{u} = A^{-1}(R^\beta\tilde{u}) = A^{-1}\langle\tilde{u}\rangle, \langle\tilde{u}\rangle = R^\beta\tilde{u}. \quad (3.43)$$

Нехай $Q_i(t)$ - координати електрофізичної ДС (наприклад, нестаціонарні заряди в електричному контурі), що описують її еволюцію в станах кореляцій.

Пряме диференціювання зарядів для отримання струмів $i_i(t) = \frac{d}{dt}Q_i(t)$ у разі складної динаміки системи є некоректним завданням і для визначення струмів у системі необхідне застосування методу регуляризації (використання оператора усереднення):

$$i_{reg} = \langle i_i \rangle = \left(R^{\beta(\eta)} \frac{d}{dt} \right) Q_i(t) = D_i^{\beta(\eta)} Q_i(t), \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (3.44)$$

При цьому ми запровадили узагальнені оператори диференціювання з порядком $\beta(\eta)$, вид яких залежить від внутрішньої складності динаміки системи та від параметра порядку. Отриманий в результаті регуляризації повний заряд, що спостерігається Q_{reg} та струм i_{reg} являють собою, відповідно, суми вихідних зарядів та струмів та додаткових донаєток у вигляді когерентних зарядів та струмів:

$$Q_{reg} = Q + Q_{cog}, \quad i_{reg} = i + i_{cog}. \quad (3.45)$$

Співвідношення компонентів повного регуляризованого заряду і струму визначається параметром порядку

$$\eta = \frac{Q_{reg}}{Q + Q_{cog}} = \frac{i_{reg}}{i + i_{cog}}. \quad (3.46)$$

Такий спосіб дозволяє отримувати наближення для вирішення динамічного рівняння, яке стійке і єдине, а найбільш адекватний вибір операторів регуляризації (і, отже, узагальнених операторів диференціювання) залежить від фізичних процесів і динамічних властивостей системи [62,67] показано, що в якості регуляризованих операторів і узагальнених похідних [62], а рівняння для регуляризованих величин, що спостерігаються (наприклад спостерігаючих зарядів) у відкритій системі з ненульовим параметром порядку має вигляд:

$$D_t^{2-\alpha} Q(t) + \omega_0^2 Q(t) = 0. \quad (3.47)$$

При розв'язанні задач Коші для рівнянь (3.47) природно виникають функції Міттаг—Леффлера $E_{\alpha,\beta}(x)$:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad E_{\nu,1}(x) \equiv E_{\nu}(x), \quad (3.48)$$

які для рівнянь із дробовими похідними відіграють таку ж важливу роль, як для рівнянь із звичайними похідними — гармонійні функції. Зокрема рішення рівняння (3.47) з початковими умовами для регуляризованого заряду явно виражається через функції Міттаг—Леффлера (3.48):

$$Q(t) = i_0 t E_{2-\alpha,2}(-\omega_0^2 t^{2-\alpha}) + Q_0 E_{2-\alpha,1-\alpha}(-\omega_0^2 t^{2-\alpha}). \quad (3.49)$$

Характер рішення при цьому залежить від знака добавки α до індексу похідної. При $\alpha > 0$ стани, що описуються рівнянням (3.45), характеризують відкриту систему зі втратою енергії, а $\alpha < 0$ відповідає станам, у яких проявляється відкритість системи, що з припливом енергії у ній (див. рис. 3.4). Гармонічні функції є окремими випадками функцій Міттаг—Леффлера:

$$E_{2,2}(-\omega_0^2 t^2) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{(\omega_0 t)}; \quad E_2(-\omega_0^2 t^2) = \cos(\omega_0 t), \quad (3.50)$$

а рішення (3.50) зі зміною поведуться подібно до рішень —

$$Q(t) = e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \Delta\phi) \quad (3.51)$$

— рівняння коливальних процесів з дисипацією в звичайних похідних:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (3.52)$$

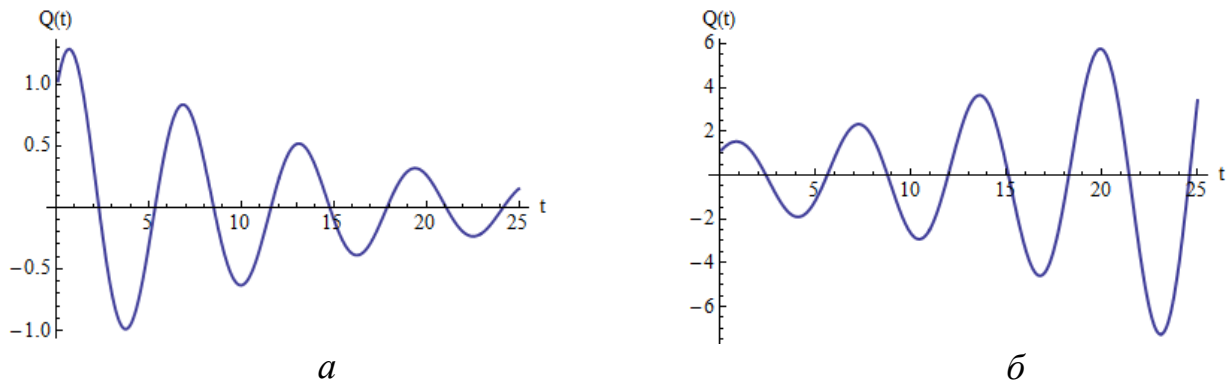


Рис. 3.4. Графіки коливань при різних значеннях декременту. (а) Графік $Q(t)$ для $\alpha = 0.1$. Оскільки величини нормовані: t/T_0 — безрозмірна величина; q/q_0 — безрозмірна величина. (б) Графік $Q(t)$ для $\alpha = -0.1$

Однакова якісна поведінка (3.47) і (3.49) дозволяє апроксимувати (3.47) загасаючими або наростаючими коливаннями (3.49) і отримати за допомогою методу найменших квадратів зв'язок між індексом похідної та інкрементом нестійкості (або декрементом згасання) при якій досягається максимальна близькість між регуляризованою траєкторією (3.47) та рішенням (3.49) лінійного рівняння (3.50):

$$D_t^{2-\alpha} \propto \frac{d^2}{dt^2} + 2\delta \frac{d}{dt} \quad \text{при} \quad \delta(\alpha) = \begin{cases} -0.00198 + 0.618\alpha + 0.304\alpha^2, & \alpha < 0 \\ 0.000138 + 0.60\alpha - 0.06\alpha^2, & \alpha > 0 \end{cases}. \quad (3.53)$$

Запишемо розширену систему рівнянь Кірхгоффа для контуру з урахуванням когерентних процесів та взаємодії з флуктуаціями. Врахуємо, що вихідний струм провідності $i = \frac{dQ}{dt}$ пов'язаний з повним регуляризованим струмом $i_{reg} = \frac{dQ_{reg}}{dt}$ через параметр порядку $i = (1 - \eta)i_{reg}$ і запишемо рівняння коливань для заряду, що спостерігається в контурі:

$$\frac{d^2 Q_{reg}}{dt^2} + 2 \frac{(1-\eta)R - R_\eta}{L} \frac{dQ_{reg}}{dt} + \left[\omega_0^2 + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog} \left(\frac{dQ_{reg}}{dt} \right) \right] Q_{reg} = 0. \quad (3.54)$$

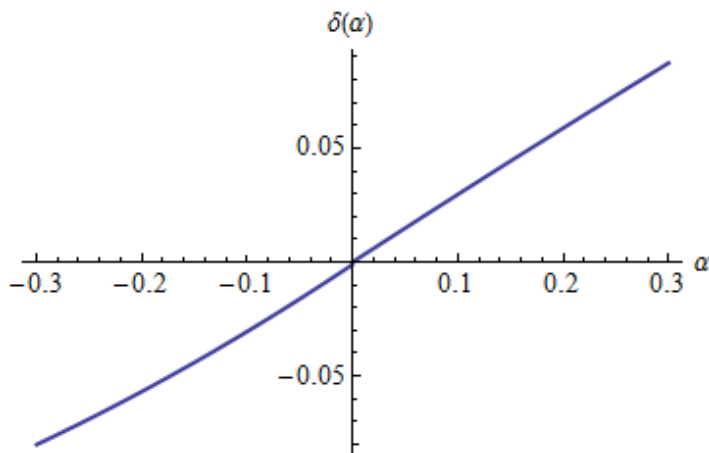


Рис. 3.5. Залежність декременту згасання (або інкремента нестійкості) від індексу дробової похідної. α — безрозмірна; γ — нормований декремент, також безрозмірна.

Рівняння для параметра порядку, що замикає рівняння коливального контуру, набуває вигляду:

$$w_\eta + \frac{\frac{\omega_{00}^2}{g_Q(\eta)} + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog} \left(\frac{d}{dt} Q_{reg} \right)}{g_\eta(\eta)} g_Q(\eta) = 0, \quad w_\eta = D_t^{2-\alpha(\eta)} \eta(t), \quad (3.55)$$

або, приблизно, у звичайних похідних:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2\delta(\eta) \frac{d\eta}{dt} + \frac{\frac{\omega_{00}^2}{g_Q(\eta)} + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog} \left(\frac{d}{dt} Q_{reg} \right)}{g_\eta(\eta)} g_Q(\eta) = 0. \quad (3.56)$$

Для наближених оцінок самоузгодженого векторного потенціалу, що виникає при перебігу струму i_{reg} по котушках з N_t точок особливостей струму (кількість областей, у яких зустрічаються струми протилежних напрямів), можна скористатися співвідношеннями:

$$F_{cog}(i(t)) = -d_{eff} \frac{d}{dt} A(i(t)), \quad A(i_{reg}) = \frac{\mu_0}{4\pi} N_t i_{reg} \quad (3.57)$$

і записати повну систему рівнянь коливального контуру у вигляді:

$$\left(\frac{d^2 Q_{reg}}{\omega_{00}^2 dt^2} \right) + 2 \frac{(1-\eta)R - R_\eta}{\omega_{00}L} \left(\frac{dQ_{reg}}{\omega_{00}dt} \right) + \left[\frac{1}{g_Q(\eta)} + \gamma \frac{1}{Q_{reg}} \left(\frac{d^2 Q_{reg}}{\omega_{00}^2 dt^2} \right) \right] Q_{reg} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{d^2 \eta}{\omega_{00}^2 dt^2} + 2 \frac{\delta(\eta)}{\omega_{00}} \frac{d\eta}{\omega_{00}dt} \left[\frac{1}{g_\eta(\eta)\eta} + \gamma \left(\frac{1}{Q_{reg}} \frac{d^2 Q_{reg}}{\omega_{00}^2 dt^2} \right) \frac{g_Q(\eta)}{g_\eta(\eta)\eta} \right] + \eta = 0, \quad \gamma = \frac{d_{eff}}{L} \frac{\mu_0}{4\pi} N_t. \quad (3.59)$$

Ці рівняння описують основні фізичні процеси у системі: поява у системі когерентних струмів, що призводить до появи ефективного негативного опору у системі та перенормування власної частоти системи.

З рівнянь ((3.52)—(3.53)) видно, що межі нульового параметра порядку $\eta \rightarrow 0$ і за великих тривалостей фронтів $\tau_f \rightarrow \infty$ імпульсного впливу на контур зникає перенормування власної частоти системи, рівняння для параметра порядку вироджується у співвідношення $\eta = 0$ та рівняння переходять в одне рівняння:

$$\frac{d^2 Q_{reg}}{dt^2} + 2 \frac{R}{L} \frac{dQ_{reg}}{dt} + \omega_0^2 Q_{reg} = 0, \quad (3.60)$$

тобто нормальне рівняння коливального контуру з постійною частотою.

Збираючи доданки з прискоренням заряду (3.56), отримуємо в явному вигляді перенормування інерційності системи:

$$(1+\gamma) \frac{d^2 Q_{reg}}{dt^2} + 2 \frac{(1-\eta)R - R_\eta}{L} \frac{dQ_{reg}}{dt} + \frac{\omega_{00}^2}{g_Q(\eta)} Q_{reg} = 0. \quad (3.61)$$

Остаточно система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (Q_{reg} / Q_0)}{\omega_{00}^2 dt^2} + 2 \frac{(1-\eta)(R / \omega_{00}L) - (R_\eta / \omega_{00}L)}{(1+\gamma)} \left[\frac{d(Q_{reg} / Q_0)}{\omega_{00}dt} \right] + \\ + \left(\frac{\omega_0^2 / \omega_{00}^2}{1+\gamma} \right) (Q_{reg} / Q_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{\omega_{00}^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2 \frac{\delta(\eta)}{\omega_{00}^2} \frac{d\eta}{dt} + \left\{ \frac{\omega_0^2(\eta)}{\omega_{00}^2} \left[1 + \gamma \left(\frac{\omega_{00}^2}{\omega_0^2(\eta)} \frac{d^2(Q_{reg}/Q_0)}{\omega_{00}^2 dt^2} \right) \right] \frac{g_Q(\eta)}{\eta g_\eta(\eta)} \right\} \eta = 0.$$

В останніх рівняннях час нормований на вихідний період власних коливань $(1/\omega_{00})$, а частота, відповідно, — на вихідну власну частоту $\omega_{00} = \frac{2\pi}{T_0}$. Заряд вимірюється початковим значенням заряду Q_0 .

Ввівши безрозмірні змінні:

$$y = Q_{reg}/Q_0, \quad \tau = \omega_{00}t, \quad r = R/\omega_{00}L, \quad r_\eta = R_\eta/\omega_{00}L$$

та старе позначення для безрозмірної частоти $\omega_0^2/\omega_{00}^2 \rightarrow \omega_0^2$, записуємо:

$$(1+\gamma) \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2[(1-\eta)r - r_\eta(\eta)] \frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{g_Q(\eta)} y = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + U_{str}(\eta, y) \eta = 0, \quad U_{str}(\eta, y) = \left[1 + \gamma \frac{g_Q(\eta)}{y} \frac{d^2 y}{d\tau^2} \right] \frac{1}{\eta g_\eta(\eta)}. \quad (3.64)$$

Для практичного використання цих рівнянь та оптимізації процесу важливо, що потенційна функція рівняння для параметра порядку має два типи поведінки залежно від параметрів системи (див. Рис. 3.6).

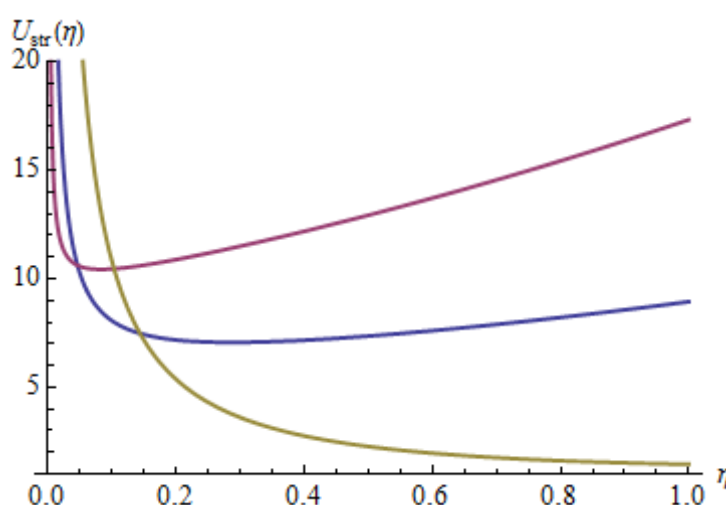


Рис. 3.6. Ефективна потенційна енергія системи при різних значеннях параметрів впливу. η — безрозмірна; $U(\eta)$ — у відносних (безрозмірних) одиницях.

При малих значеннях параметрів впливу структурного потенціалу є яма, розташована поблизу нульового значення параметра порядку $\eta_{\min} \approx 0$.

Зі зростанням параметрів (підвищення амплітуди поля, діелектричної проникності та зменшення рівня дисипації) положення потенційної ями зміщується в область більш високих параметрів порядку $\eta_{\min} \rightarrow 0.5$. Зі зростанням параметрів (підвищення амплітуди поля, діелектричної проникності та зменшення рівня дисипації) положення потенційної ями зміщується в область більш високих параметрів порядку $\eta \rightarrow 1$, коли всі струми у системі є когерентними.

3.5 Когерентність, пам'ять та динаміка заряджених частинок при моделюванні контактів Джозефсона

Електрофізичні параметри системи виявляють залежність від ефектів пам'яті, що проявляється у динаміці її відгуку на зовнішні впливи. Експериментально це підтверджується, зокрема, результатами робіт щодо електролітичних конденсаторів, які демонструють різні релаксаційні характеристики при однаковій кінцевій напрузі, що інтерпретується як наявність ефекту пам'яті в діелектричних середовищах. Класичним прикладом пам'яті є також магнітний гістерезис. У сучасній фізиці накопичено значну кількість експериментальних даних, які свідчать про універсальність ефектів пам'яті в складних системах. Це стимулює розвиток узагальнених феноменологічних моделей, придатних для опису широкого класу нерівноважних процесів.

Більшість класичних моделей фізики, включаючи гамільтонові системи, не враховують ефекти пам'яті. Однак у багатьох реальних процесах така апроксимація є лише наближеною, хоча й часто достатньо ефективною.

Особливе місце в сучасній фізиці займають фрактальні структури та само подібні середовища, які природно описуються в рамках концепцій скейлінгу та теорії хаосу. Фрактальні матеріали характеризуються залежністю

макроскопічних параметрів (теплопровідності, електропровідності, дифузії) від їх геометричних характеристик, зокрема фрактальної розмірності.

Сучасна експериментальна фізика багата на такі спостереження, і наявність пам'яті як загальної властивості природи не є несподіваним, а конкретний механізм пам'яті в різних процесах може бути різним, проте загальна якість стимулює спроби пошуку загального феноменологічного опису, придатного для багатьох процесів з пам'яттю.

Ідеєю, що дала новий імпульс теорії складних систем, стала ідея самоподібності (автомодельності, скейлінгу). На цій ідеї зросла концепція фракталів та теорія хаосу. Математичним символом ідеї скейлінгу є статична функція.

Останнім часом все більшого застосування в багатьох областях фізики та технології набувають композитні матеріали та пристрої зі складною фрактальною структурою. Фрактальні середовища характерні тим, що їх макроскопічні властивості (коефіцієнти теплопровідності, електропровідності, дифузії і т.д.) залежать від їх фрактальних характеристик (наприклад, розмірності фрактального матеріалу або його пористості) [1]. Зокрема, дуже важливо, що фрактальні матеріали мають нелінійну електропровідність. Однією з основних властивостей фрактальних середовищ є їхня незворотність і властива їм загальна та універсальна властивість «забування» (або «втрати інформації») — саме воно і характеризує стохастичність процесу [2].

У цьому розділі розглядається генератор хаотичних коливань на основі Джозефсонівського тунельного контакту з фрактальним ізоляційним шаром. Така система є перспективною для реалізації керованих джерел хаотичних сигналів із заданою статистичною структурою, що може бути використано в задачах хаотичного зв'язку. Вивчено коливання струму в контурі з Джозефсонівським контактом типу (див. рис.3.7), де, як зазвичай, позначають надпровідний матеріал, а тонкий фрактальний шар — резистивний. Нелінійність та пам'ять фрактального шару істотно впливають на динаміку контакту, забезпечуючи можливість керування його коливальними режимами. Такий

генератор хаотичних сигналів може бути технологічною основою хаотичного зв'язку, запропонованої в роботах [32, 75].

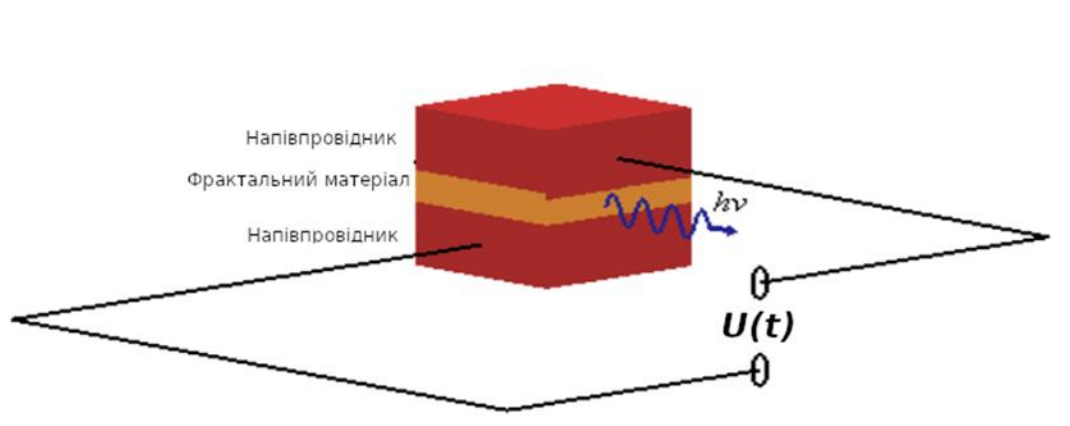


Рис. 3.7. Схема Джозефсонівського контакту з фрактальним ізоляційним шаром.

Нехай ізолюючий шар у тунельному контакті складається з суміші двох компонентів — провідної та діелектричної. Якщо провідність металевої компоненти σ_m , а діелектричної σ_D , то ефективна провідність σ_e двокомпонентного нескінченного середовища на порозі протікання залежить тільки від $\xi = \frac{\sigma_D}{\sigma_m}$ і описується статечним законом:

$$\sigma_e = \sigma_m \xi^u, \quad (3.65)$$

де u — критичний індекс. У двовірному випадку u дорівнює $1/2$. При малих ξ провідність падає і в [69] показано, що на феноменологічному рівні нелінійні ефекти описуються виразом для провідності σ з ефективною лінійною провідністю σ_e та нелінійною провідністю α_e

$$\sigma = \sigma_e + \alpha_e E^2, \quad (3.66)$$

де E — середнє електричне поле, а нелінійна провідність α_e описується статечною залежністю від ξ

$$\alpha_e \approx \alpha_D \xi^{-w}, \quad (3.67)$$

де для тонкого шару $w = 1,5$. Підкреслимо, що нелінійна провідність ізолюючого фрактального шару зростає при прагненні $\xi \rightarrow 0$, а ефективне полі нелінійності

падає, тобто, на порозі протікання фрактальний шар стає аномально нелінійним. Ця властивість нелінійної провідності фрактального матеріалу, що дозволяє створювати додаткову нелінійність в контакті двох надпровідників і керувати властивостями цього контакту.

Як відомо, система, що складається з двох надпровідників, що слабо взаємодіють, до яких прикладена різниця потенціалів $U(t)$, феноменологічно описується різницею фаз хвильових функцій у надпровідниках відповідно до співвідношення

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} U(t) \quad (3.68)$$

та існуванням у повному струмі системи I осцилюючої надпровідної частини струму I_s в міру сили зв'язку між надпровідниками:

$$I_s = I_c \sin(\varphi(t)). \quad (3.69)$$

Враховуючи те, що контакт має ємність C , доповнимо наведені співвідношення рівнянням для струмів у ланцюгу, які впливають з того, що сума надпровідного струму, струму провідності $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{R}$ та струму зміщення $\frac{\hbar C}{2e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ є повним струмом в ланцюзі [70]:

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin[\varphi(t)] = I(t). \quad (3.70)$$

Враховуючи рівняння (4), (6) та нелінійність провідності фрактального шару ізолятора виду (3) отримуємо систему рівнянь першого порядку для різниці потенціалів на тунельному контакті, що складається з рівняння (4), яке пов'язує фазу та різницю потенціалів та рівняння для фази:

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R_0} \left[\xi^{1/2} + \alpha_D \xi^{-3/2} \alpha_e U(t)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin[\varphi(t)] = I(t). \quad (3.71)$$

Як видно, ці рівняння є рівнянням для нелінійного осцилятора типу Ван дер Поля з нелінійним загасанням і зовнішньою силою. Зовнішня сила, що діє на

осцилятор, визначається струмом, що протікає через контакт I . Цей струм може бути як незмінним, так і змінним. Якщо струм є гармонійною функцією з частотою близькою до резонансної частоти контакту, то система рівняння може мати рішення як з регулярними властивостями, так і хаотичні рішення зі складною структурою. На Рис. 3.8 показана фазова траєкторія рішення системи, коли замість фрактального ізолюючого шару в тунельному контакті використовується нормальний метал. Як видно, коливання мають вигляд, характерний для звичайного осцилятора Ван дер Поля.

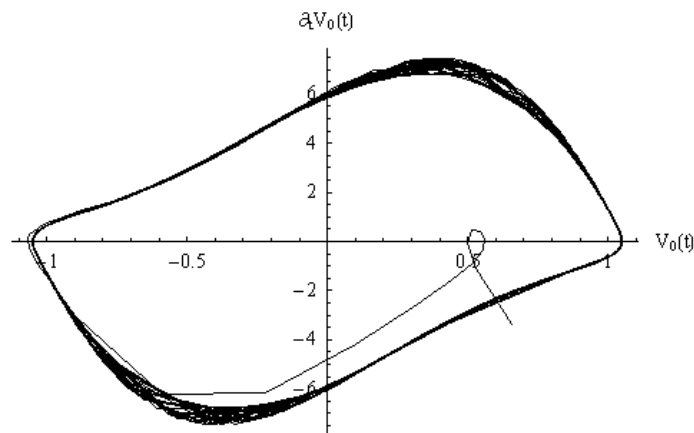


Рис. 3.8. Фазова траєкторія коливань нормального Джозефсонівського контакту.

Розмірність напруги в мВ, координати Y : мВ / сек.

Режими коливань струму та напруги в Джозефсонівському контакті суттєво залежать від співвідношення провідностей компонент композитного матеріалу ξ . Це видно з порівняння фазових портретів коливань напруги в Джозефсонівському контакті для близьких значень параметра ξ , зображених на Рис. 3.9.

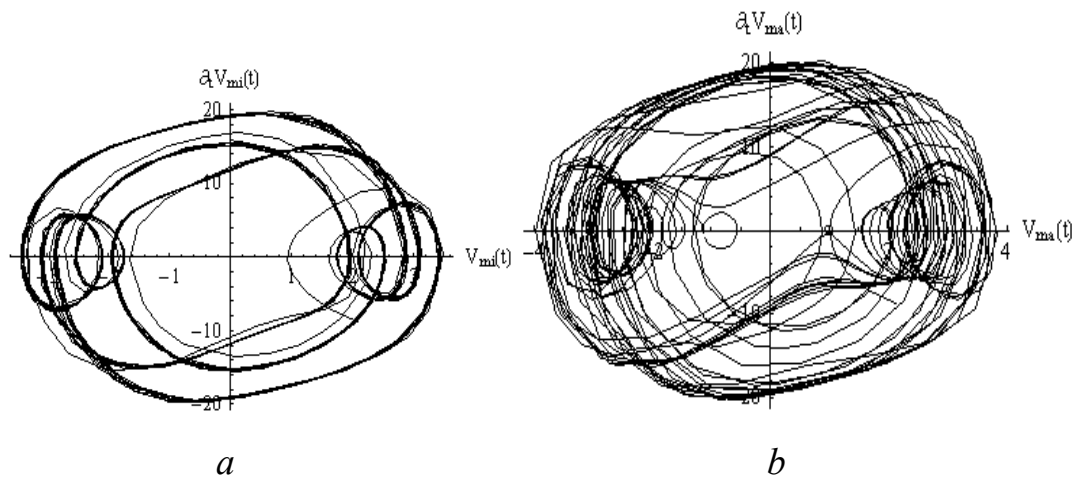


Рис. 3.9. Фазові траєкторії коливань фрактального Джозефсонівського контакту при $\xi = 0,1$ (a) та при $\xi = 0,09$ (b). Розмірність напруги в мВ, координати Y : мВ / сек.

Розглянемо випадок найпростішої залежності параметра $\xi(t)$ від часу. Розіб'ємо весь інтервал тимчасової еволюції на три рівні частини. Нехай на початку еволюції до $t = 18$, величина $\xi = 0,1$ потім на наступній тимчасовій ділянці $\xi = 0,09$, а в інтервалі часу $36 < t < 50$ знову $\xi = 0,1$. На Рис. 3.17 показана реалізація і фазовий портрет на вирішення системи рівнянь у разі нестационарності параметра.

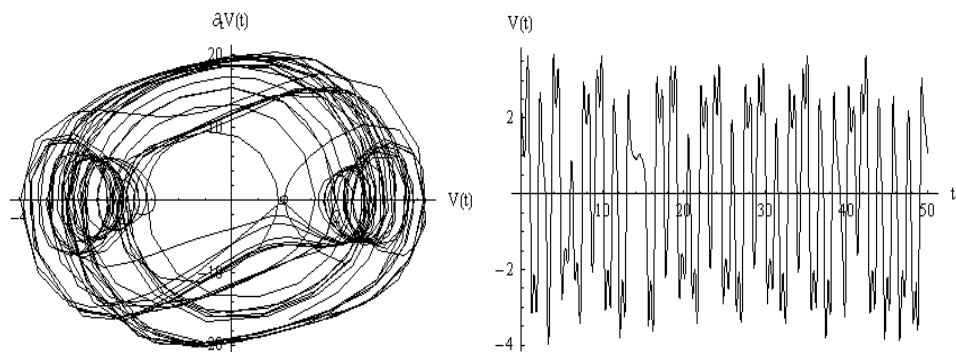


Рис. 3.10. Реалізація та фазова траєкторія коливань фрактального Джозефсонівського контакту для нестационарного параметра ξ . На початку еволюції до $t = 18$ нс, величина $\xi = 0,1$, потім $\xi = 0,09$, а в інтервалі часу $36 < t < 50$ нс знову $\xi = 0,1$. Тут по осі x — мВ, по Y- мВ/с.

Можна показати, що аналіз статистичних характеристик одержаної реалізації за допомогою методів адаптивного тестування апаратури (АТА) див. [71] відновили повільну еволюцію параметра ξ і, отже, відновили інформаційний сигнал, за допомогою якого проводилася модуляція. Таким чином, Джозефсонівський контакт з фрактальним шаром має нелінійні властивості, що дозволяють ефективно керувати режимом коливання за допомогою повільної зміни співвідношення провідностей компонентів композитного матеріалу. На основі високої чутливості режиму коливань Джозефсонівського контакту до параметрів контакту запропоновано використовувати для хаотичного зв'язку.

Таким чином, Джозефсонівський контакт з фрактальним шаром має нелінійні властивості, що дозволяють ефективно керувати режимом коливання за допомогою повільної зміни співвідношення провідностей компонентів композитного матеріалу. Це пов'язано безпосередньо з тим, що фрактальне середовище має пам'ять. Більш адекватною моделлю тунельного контакту з урахуванням фрактальності середовища у разі може бути узагальнення рівняння осцилятора за допомогою дробових операторів.

3.6. Пам'ять, динаміка заряджених частинок у фрактальних середовищах та фрактальний закон Ома

Класична теорія переносу частинок у середовищі базується на припущенні марковості процесів взаємодії. Ймовірності розсіювання та поглинання визначаються лінійною залежністю від довжини пробігу, що призводить до експоненційного закону ослаблення. У загальному випадку ймовірність відсутності взаємодії на шляху l має вигляд експоненційної функції, що є наслідком припущення статистичної незалежності подій.

Однак для фрактальних та структурно неоднорідних середовищ це припущення порушується. У таких системах виникають ефекти пам'яті та

довготривалих кореляцій, що потребує узагальнення класичних операторів диференціювання.

Альтернативою класичному підходу є використання дробових інтегро-диференціальних операторів та операторів масштабної інваріантності, зокрема похідної Джексона, що природно узгоджується з властивостями фрактальних середовищ.

У межі параметрів масштабування така похідна переходить у класичну похідну, що забезпечує узгодженість моделі з традиційною фізикою. Частка, що вилітає з певної точки в заданому напрямку по дорозі l , може випробувати розсіювання, поглинання чи пройти шлях без взаємодій. Ймовірності перших двох процесів (P_s, P_c) в однорідному безмежному середовищі зазвичай передбачаються пропорційно пройденому елементу шляху dl :

$$dP_s = \mu_s dl, \quad dP_c = \mu_c dl. \quad (3.72)$$

Коефіцієнти пропорційності μ_s і μ_c називаються перерізами цих процесів. Сума перерізів $\mu = \mu_s + \mu_c$ дорівнює ймовірності будь-якої взаємодії на одиницю довжини шляху, а ймовірність пройти шлях dl без взаємодії $P_f(l)$ дорівнює $(1 - \mu dl)$. Позначимо через $P(l)$ — ймовірність того, що довжина вільного пробігу до першого зіткнення дорівнює l . Тоді, ймовірність того, що частка пройде шлях $l + dl$ без зіткнення дорівнюватиме добутку ймовірностей:

$$P(l + dl) = P(l)(1 - \mu dl). \quad (3.73)$$

Розкладаючи ліву частину рівності до ряду, приходимо до диференціального рівняння переносу:

$$D_l^1 P = -\mu P, \quad D_x^1 \equiv \frac{d}{dx}, \quad P(0) = 1. \quad (3.74)$$

Вирішення цього рівняння для нескінченного однорідного середовища має вигляд:

$$P(l) = \exp(-\mu l), \quad (3.75)$$

де μ — лінійний коефіцієнт ослаблення. Зазначимо, що з отриманих наведених співвідношень передбачалося, що це події розсіювання частинок статистично незалежні (процеси взаємодії з речовиною є Марківськими), а, як видно, основою стандартної теорії для однорідних середовищ є використання власних функцій оператора похідної — експоненційної функції. Для середовища зі складною неоднорідною самоподібною структурою густини більш адекватними фізичній ситуації стають альтернативні визначення операторів диференціювання. Найуживанішими узагальненнями є дробові інтегро-диференціальні оператори та кінцеві апроксимації диференціальних операторів $D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Застосування операторів дробового порядку для опису процесів еволюції з урахуванням ефектів пам'яті викладено, наприклад, [62, 72].

Зазвичай оператори похідної визначаються з урахуванням операторів нескінченно малого зсуву $Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} D_h f(x)$. Фрактальні середовища характеризуються властивостями подібності основних величин при зміні просторових масштабів, тому найбільш природним узагальненням поняття похідної є похідна Джексона, у якій визначення швидкості процесу замість операторів зсуву використовуються операція масштабування (з коефіцієнтом подоби q):

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \quad (3.76)$$

У граничному випадку похідна Джексона перетворюється на звичайну похідну. $Df(x) = \lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x)$. Виникає питання, які функції є власними функціями операторів q — похідних Джексона? На основі розвитку поняття q — похідних побудований так званий квантовий аналіз, в рамках якого отримані узагальнення багатьох важливих математичних співвідношень. Наприклад, дуже просто може бути обчислена квантова похідна статечної функції:

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}, \text{ де } [n] = \frac{q^n - 1}{q-1} \text{ та } \lim_{q \rightarrow 1} [n] = n. \quad (3.77)$$

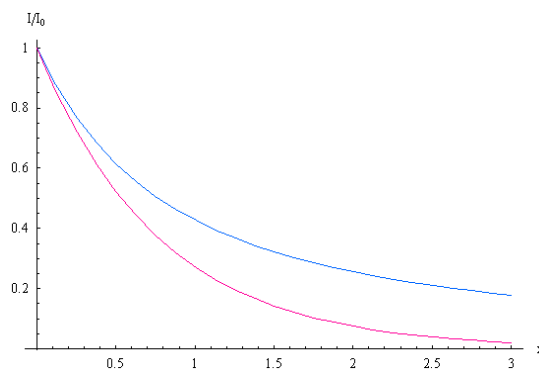


Рис. 3.11. Залежність інтенсивності потоку квантів від координати для експоненційного закону та закону Міттаг—Леффлера. Нижня крива — за законом, що визначається експоненційною функцією. Тут x — m ; I/I_0 — безрозмірна величина.

Розглянемо як простий приклад коливальної системи, послідовний коливальний контур з фрактальним резистором [73] як навантаження і зовнішньою гармонійною силою, що змушує. Першою суттєвою особливістю фрактального резистора є його нелінійність. Фрактальний резистор може бути приготований шляхом осадження парів металу та діелектрика на підкладку або шляхом спікання дрібнодисперсних порошків. При цьому концентрація суміші повинна відповідати порогу протікання, тоді токнесучий каркас буде фрактал [74]. Наприклад, у разі тонкої плівки ($d=2$) ця концентрація $p_c = 0,5$, а у разі тривимірного зразка ($d = 3$) $p_c = 0,17$.

Для визначення конкретного значення параметра q в реальних експериментах потрібно «навчання» запропонованої нами моделі з урахуванням функції Міттаг—Леффлера на реальних тестових експериментах. Запропонована модель може використовуватись у різних додатках. Наприклад, при побудові алгоритмів для автоматизованих систем медичної діагностики об'єктів зі складними включеннями та дослідження захисних властивостей матеріалів в реальних рентгенівських пучках. У першому випадку для визначення параметра ν можна використовувати дані щодо ослаблення рентгенівського потоку на препаратах із заданою структурою.

Запропонована у роботі модель може бути обґрунтована також у рамках фрактальної електродинаміки та методів регуляризації на основі дробових

операторів [62-72]. Коливання струму в такій системі описуються рівнянням, яке при слабкій квадратичній нелінійності провідності навантаження є рівнянням для найпростішої моделі генератора Ван дер Поля [75]:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{R}{L}(1 - \alpha q^2) \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = F(t) \quad (3.78)$$

із зовнішньою гармонійною силою $F(t) = A_e \sin(\Omega t)$.

У нелінійній коливальній системі з певними значеннями параметрів виникають хаотичні коливання (приклад траєкторії на фазовій площині див. на Рис. 3.10).

Другою суттєвою особливістю фрактального резистора є його незворотність та існування пам'яті. Наявність пам'яті в середовищі означає, що якщо на момент часу t' на систему діє сила $u(t')$, то виникає потік $j(t)$, величина якого в наступний момент часу t задається рівністю $j(t) = \int_0^t Y(t-t')u(t')dt'$.

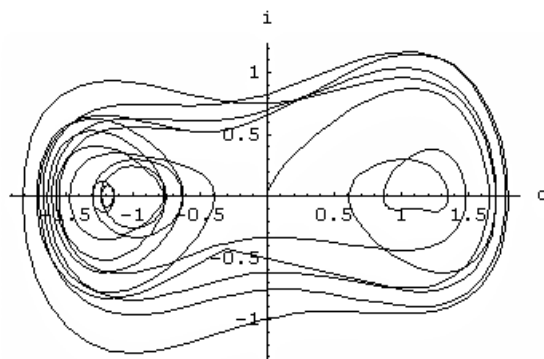


Рис. 3.12. Траєкторія системи на фазовій площині. Тут x в Кл, Y в Кл/с.

Для системи, що не має пам'яті, залежність функцій пам'яті $Y(t)$ має дельтафункціональний вигляд: $Y(t) \propto \delta(t - \tau)$. У цьому випадку рівняння для потоку набуває форми: $j(t) = \sigma u(t)$. Увімкнення пам'яті δ — функція розмивається в дзвонову залежність, ширина якої визначає ширину часової області поблизу поточного часу t протягом якого сила $u(t)$ впливає на потік.

Якщо функція $Y(t)$ має статечний вигляд $\propto t^{-\nu}$, то співвідношення між силою та потоком можна записати у вигляді

$$j(t) = (I^{1-\nu}u)(t). \quad (3.79)$$

Тут $I^{1-\nu}$ оператор дробового інтегрування (див. [76]). Прості міркування, що призводять до введення дробових похідних інтегралів наводяться в класичних роботах Ліувіля, та ін. [77]. Інтегральний оператор порядку визначається виразом

$$I^\alpha g(x) \equiv D^{-\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{g(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad (3.80)$$

і називається дробовим інтегралом порядку α . Похідну дробового порядку також можна визначити як узагальнення похідної n -го порядку. Наприклад, визначення дробової похідної Рімана—Ліувіля

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \right]. \quad (3.81)$$

Розглянемо найпростіший ланцюг, що є генератором струму, що створює імпульс струму $i_g(t)$, який протікає через фрактальне навантаження та утворює падіння напруги на ній $u(t)$. Рівняння Кірхгоффа для такого ланцюга можна записати (з урахуванням (3.78)) у вигляді

$$i_g(t) = i_d(t) + (I^{1-\nu}u)(t). \quad (3.82)$$

Застосовуючи оператор дробової похідної (3.80) до струму, легко отримати рівняння для нього,

$$D^{1-\nu}i_d + u(t) = R(t), \quad R(t) = D^{1-\nu}i_g(t), \quad (3.83)$$

Легко переконатися, що використання у рівнянні дробової похідної (як зазначалося вище) еквівалентно введенню згасання в рівнянні.

Скориставшись $i_d = \frac{dq}{dt}$, для заряду з (3.82) отримуємо дробове узагальнен-

ня рівняння нелінійного осцилятора з правою частиною

$$\frac{d^{2-\nu}q}{dt^{2-\nu}} + u(t) = R(t). \quad (3.84)$$

На рис. 3.1 показано рішення цього інтегро-диференціального рівняння. Характер поведінки рішення підтверджує наведене твердження про еквівалентність у певному сенсі ступеня згасання коливань та відхилення похідної від цілого значення в рівнянні.

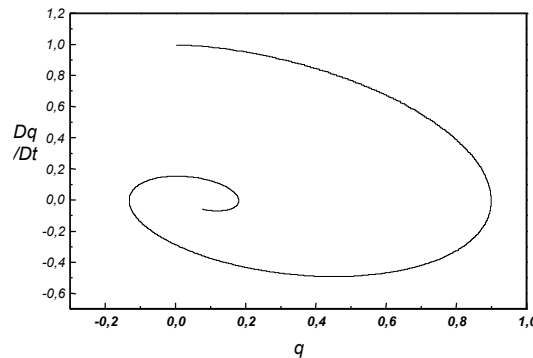


Рис. 3.13. Розв'язок інтегро-диференціального рівняння дробового осцилятора.

Тут x в t/T_0 , Y q/q_0 , безрозмірні.

Скориставшись цією аналогією, можна узагальнити рівняння для коливань у системі з фрактальним навантаженням (4) на випадок урахування незворотності системи та пам'яті в ній та привести його до вигляду:

$$D^{2-\nu}q - \frac{R}{L}(1 - \alpha q^2)D^{1-\nu}q + \omega_0^2 q = F(t). \quad (3.85)$$

До вирішення рівнянь такого виду природно підходитимемо з позицій методів регуляризації [62, 72]. Введемо регуляризований (спостерігаємий) заряд $\tilde{q}$:

$$D^{-\nu}q = \tilde{q}. \quad (3.86)$$

При цьому нерегуляризований заряд пов'язаний із зарядом, що спостерігається, за допомогою співвідношення:

$$q = D^{\nu}\tilde{q}. \quad (3.87)$$

Скориставшись цими перетвореннями легко отримати рівняння для заряду, що спостерігається:

$$D^2 \tilde{q} - \frac{R}{L}(1 - \alpha q^2) D \tilde{q} + \omega_0^2 D^\nu \tilde{q} = R(t). \quad (3.88)$$

Розглянемо лінійний випадок. Шукатимемо рішення цього рівняння за допомогою перетворення Лапласа $\hat{L}$. Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (3.87) для перетворення Лапласа заряду, що спостерігається $g(p) = \hat{L}(\tilde{q})$, отримуємо

$$p^2 g(p) - p \tilde{x}(0) - \dot{\tilde{x}}(0) + \omega_0^2 p^\nu g(p) = \hat{L}\{R(t)\}. \quad (3.89)$$

Тут використано співвідношення $\hat{L}\{D^\nu f(t)\} = p^\nu \hat{L}\{f(t)\}$. Таким чином, вираз для образу заряду, що спостерігається, отримуємо:

$$g(p) = \frac{p \tilde{x}(0) + \dot{\tilde{x}}(0) + \hat{L}\{R(t)\}}{p^2 + \omega_0^2 p^\nu}. \quad (3.90)$$

При вирішенні таких завдань Коші природно виникають функції Міттаг—Леффлера, які для рівнянь із дробовими похідними відіграють таку ж важливу роль, як для рівнянь із звичайними похідними — гармонійні функції:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad E_{\nu,1}(x) \equiv E_\nu(x). \quad (3.91)$$

Гармонічні функції є окремими випадками цієї функції:

$$E_{2,2}(-\omega_0^2 t^2) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{(\omega_0 t)}; \quad E_2(-\omega_0^2 t^2) = \cos(\omega_0 t). \quad (3.92)$$

Рішення рівняння (14) з початковими умовами має вигляд:

$$\tilde{q}(t) = i_0 t E_{2-\nu,2}(-\omega_0^2 t^{2-\nu}) + q_0 E_{2-\nu,1-\nu}(-\omega_0^2 t^{2-\nu}) + D^{-\nu} F(t), \quad (3.93)$$

$$F(t) = \int_0^t (t - \xi)^{1-\nu} E_{2-\nu,2-\nu} \left\{ -\omega_0^2 (t - \xi)^{2-\nu} \right\} R(\xi) d\xi$$

та зображено на Рис. 314.

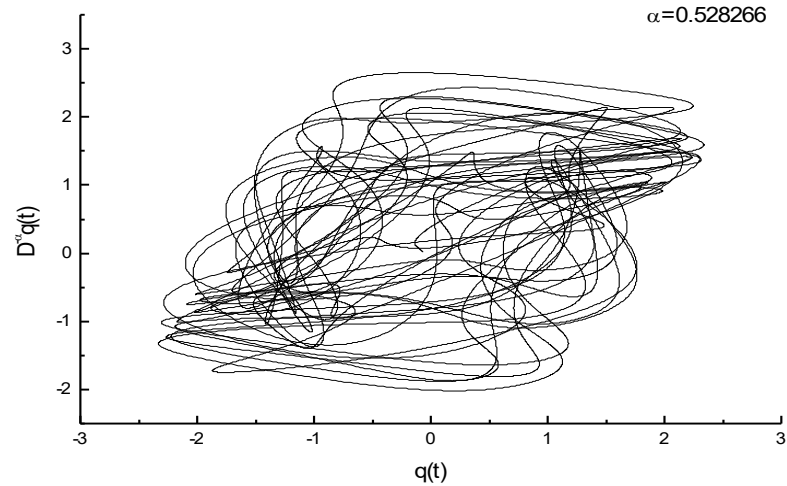


Рис. 3.14. Розв'язок інтегро-диференціального рівняння для дробових загасаючих коливань. Тут x в t/T_0 , y q/q_0 , безрозмірні.

($R(t)=0$) описує дробове узагальнення загасаючих коливань, що легко зрозуміти з виду фазових траєкторій цієї системи подібних до тих, які зображені на Рис. 3.21.

Рівняння подрібнених похідних, аналогічне (3.83) або (3.84) можна вивести і з елементарних феноменологічних міркувань, що дозволяють отримати узагальнення закону Ома.

Розглянемо шар нерівноважного провідного середовища з втратами товщиною, до якого прикладена різниця потенціалів U . І тут можна записати рівняння руху електронів як

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = e \frac{U}{L}, \quad (3.94)$$

де τ — середній час між зіткненнями. Якщо середовище або має пам'ять, або має складну (фрактальну) структуру, при якій сила діє не у всіх точках простору, то втрати в середовищі можна описати дробовою похідною та замінити оператор

$\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}$ на оператор D^α . Тоді отримуємо наступне рівняння $D^\alpha v = \frac{e}{m} \frac{U}{L}$.

Подіявши на його ліву та праву частини оператором $\hat{I}^v$ отримуємо $v = \hat{I}^v \left(\frac{e}{m} \frac{U}{L} \right) + F(t)$. Звідки й приходимо до співвідношення між повним струмом I через площу перерізу S та різницею потенціалів U . На відміну від звичайного лінійного співвідношення між цими величинами, що представляє нормальний закон Ома, ми отримуємо

$$I = \frac{n_e e^2 S}{mL} \hat{I}^v(U). \quad (3.95)$$

Це співвідношення здійснює зв'язок між струмом та різницею потенціалів за допомогою лінійного оператора дробового інтегрування $\hat{I}^v$. Таким чином, співвідношення (3.94) є дробовим узагальненням закону Ома для фрактальних провідних середовищ.

Запропонована у розділі модель на основі апарату дробових похідних для опису радіофізичних процесів у пристроях з фрактальними елементами може бути математичною основою для розробки нових пристроїв, що використовують специфічні властивості нелінійності та незворотності фрактальних середовищ.

Фрактальні середовища, тобто середовища, що мають масштабну інваріантність, набувають все більшого застосування завдяки своїм важливим властивостям пам'яті та нерівноважності, які виявляються важливими в різних додатках. Наприклад, у специфічних захисних покриттях [78], Джозефсонівських контактах [70] та навіть ядерної фізики [6-8]. У цій галузі науки постійно з'являються як теоретичні та експериментальні дослідження, так і нові сфери застосування.

У цьому розділі враховано те, що фрактальні, складні середовища є носіями нерівноважності і в них перенесення істотно змінюються (див., наприклад, [9]), а флуктуації в них у загальному випадку описуються неекстенсивною термодинамікою [25]. Розподіл ЕМ поля за частотами суттєво змінюється у системах із потоками у фазовому просторі [81]. Флуктуації ЕМ поля при цьому можуть бути описані в моделі фрактальних осциляторів, а отже їх функція розподілу подається у вигляді

$$f_{cog}(\omega, q_{cog}, T_{eff}, \mu) = \frac{1}{\exp_{q_{cog}}\left(\frac{\hbar\omega - \mu}{T_{eff}}\right) - 1}. \quad (3.96)$$

Це рішення є узагальненням функції Бозе—Ейнштейна з хімічним потенціалом μ на нерівноважний випадок. Її параметри залежать від значення потоку квантів у фазовому просторі та задаються ефективною температурою T_{eff} та параметром неекстенсивності q_{cog} , які характеризують ступінь когерентності та нерівноважності системи. При $q_{cog} \rightarrow 1$ нерівноважна функція розподілу збурень перетворюється на розподіл Планка. На Рис. 3.15 показано відносну зміну функції розподілу від частоти та відхилення параметра неекстенсивності q_{cog} от 1:

$$\delta\left(\frac{\hbar\omega}{T_{eff}}, q_{cog}\right) = \frac{f_{q_{cog}}(\omega, q_{cog}, T_{eff}, 0) - f_{q_{cog}}(\omega, 1, T_{eff}, 0)}{f_{q_{cog}}(\omega, 1, T_{eff}, 0)}. \quad (3.97)$$

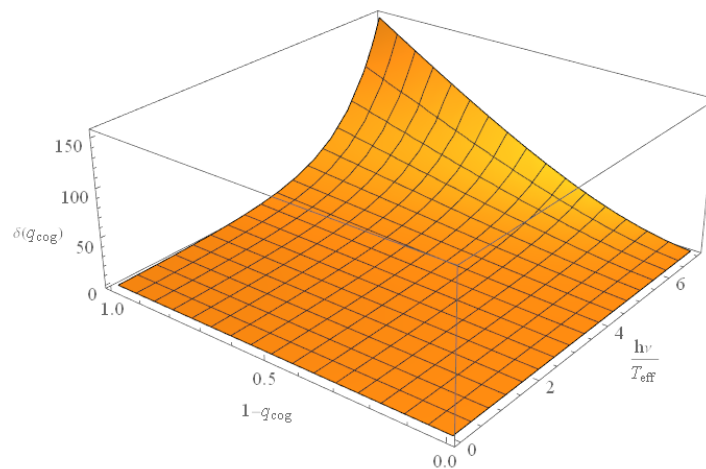


Рис.3.15. Відносне збільшення нерівноважної функції розподілу флуктуацій електромагнітного поля відносно функції Планка. Тут x в t/T_0 , Y q/q_0 , безрозмірні.

Бачимо, що в нерівноважних умовах у складних середовищах з пам'яттю відхилення від розподілу Планка для некогерентних фотонів може сильно змінюватися, що повинно призводити до нових нерівноважних ефектів при

усередненні флуктуацій. Важливим практичним завданням є вивчення динаміки заряджених частинок в електромагнітних полях та різних середовищах і, зокрема, впливом на їх динаміку нерівноважності флуктуацій і фрактальності середовища.

Найпростішою постановкою завдання для відповіді на питання про вплив середовища та електромагнітного поля є вивчення динаміки заряджених частинок у постійних та квазістаціонарних зовнішніх полях. У разі сильних електричних полів, зокрема і полів у прискорювачах заряджених частинок, таке завдання докладно розглядалося у багатьох роботах як з урахуванням середовища, так і у вакуумі.

Якщо зовнішнє електромагнітне поле представлено магнітною компонентою, то виявляється в слабких магнітних полях навіть для нормальних кімнатних температур енергетика теплового руху середовища і відповідного теплового електромагнітного поля на багато порядків більше енергії взаємодії частинок з магнітним полем, однак, з експерименту слідує істотний вплив магнітного поля на середовище навіть при такому розриві.

У роботах [82] запропоновано теорію впливу на заряд теплового електромагнітного поля флуктуацій середовища в постійному магнітному полі, що узгоджується з експериментом.

Більш загальне завдання з урахуванням магнітного і електричного полів виникає при розгляді, наприклад, прискорення електронів у неоднорідній плазмі, що знаходиться в магнітному полі. Досить висока напруженість електричного поля при цьому може розвиватися в тонкому резонансному шарі, що грає прискорюючого проміжку. Така схема є специфічним варіантом синхрофазотронного прискорення електронів. Властивості середовища в цих ситуаціях відіграють нетривіальну роль та її фрактальність, пам'ять та нерівноважність може призводити до суттєвого підвищення ефективності перетворення енергії флуктуацій на регулярні рухи.

Нижче буде розглянуто вплив фрактальної структури середовища та її пам'яті на динаміку заряджених частинок у зовнішньому магнітному полі та

показано суттєве зростання чутливості до слабких впливів із зростанням нерівноважності та пам'яті в системі.

3.7. Динаміка зарядженої частки у постійному магнітному полі

Нехай частка зарядом q_e та масою m_e , поміщена у прискорююче електричне поле $\vec{E}_a$ та магнітне поле $\vec{B}_0$ і рухається у певному середовищі. У цьому випадку на частку впливає: електричне поле хаотичного теплового випромінювання $\vec{E}_v$ середовища, поле пружних сил із $\vec{F}_e = -\frac{dU(r)}{dr}$, які описують взаємодії заряду з середовищем, сил тертя $\vec{F}_f$ з боку середовища, сил Лоренца $\vec{F}_l = \frac{q_e}{m_e} \left[\frac{d}{dt} \vec{r}, \vec{B}_0 \right]$ з боку зовнішнього магнітного поля взаємодії заряду з середовищем, сил тертя з боку зовнішнього магнітного поля $\vec{B}_0$ та прискорювальних сил з боку електричного поля $\vec{E}_a$. Рівняння руху зарядженої частки з урахуванням перелічених сил має вигляд:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{1}{m_e} (\vec{F}_e + \vec{F}_f) + \frac{1}{m_e} \left[\vec{F}_l + q_e (\vec{E}_a + \vec{E}_v) \right]. \quad (3.98)$$

У роботі [83] з використанням спектральних уявлень для полів і радіус вектора частки: $\vec{E}_v = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{e}_0(\omega) \exp(i\omega t)$, $\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{\xi}_0(\omega) \exp(i\omega t)$ отримана оцінка крутного моменту для частки після усереднення за флуктуаціями електромагнітного поля у формі і показано появу середнього крутного моменту однакового для всіх частинок з однаковим знаком заряду. Враховуючи зміну розподілу флуктуацій електромагнітного поля в системах з пам'яттю у формі узагальнюючого розподілу Планка $f_{cog}(\omega, q_{cog}, T_{eff}, 0)$ отримаємо оцінку збільшення обертового моменту в неекстенсивному середовищі

$$\langle \vec{M} \rangle = \mu_{eff}(\omega_0, \tau_{eff}, q_{cog}, T_{eff}) \vec{B}, \quad (3.99)$$

скориставшись результатом для вільних та пов'язаних частинок. Для вільних частинок справедливий вираз:

$$\mu_{eff}(\omega_0, \tau_{eff}, q_{cog}, T_{eff}) = -\frac{q_e}{m_e} \frac{8}{\pi \tau_{eff}^2} \times \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\hbar \omega / T_{eff}}{\exp_{q_{cog}}(\hbar \omega / T_{eff}) - 1} \right] \frac{T_{eff}}{\left[(\omega - \Omega_c)^2 + (1/\tau_{eff})^2 \right] \left[(\omega + \Omega_c)^2 + (1/\tau_{eff})^2 \right]} d\omega \right\}, \quad (3.100)$$

де $\Omega_c = \frac{q}{m} B_0$. Введемо функцію $k_{cog}(q_{cog})$, яка відображає збільшення μ_{eff} внаслідок неекстенсивності функцій розподілу електромагнітних збурень співвідношенням:

$$\mu_{eff}(\omega_0, \tau_{eff}, q_{cog}, T_{eff}) = k_{cog}(q_{cog}) \mu_{eq}(\omega_0, \tau_{eff}, T_{eff}),$$

$$\mu_{eq}(\omega_0, \tau_{eff}, T_{eff}) = \mu_{eff}(\omega_0, \tau_{eff}, 1, T_{eff}).$$

Коефіцієнт $k_{cog}(q_{cog})$ може бути виражений через значення середньої частоти за спектром і приблизно представляється співвідношенням

$$k_{cog}(q_{cog}) \approx \frac{1}{1 - q_{cog}} \left[\psi(q_{cog}) - \psi(2q_{cog} - 1) \right], \text{ де } \psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{d\Gamma(z)}{dz}, \quad (3.101)$$

$\Gamma(z)$ — гама функція.

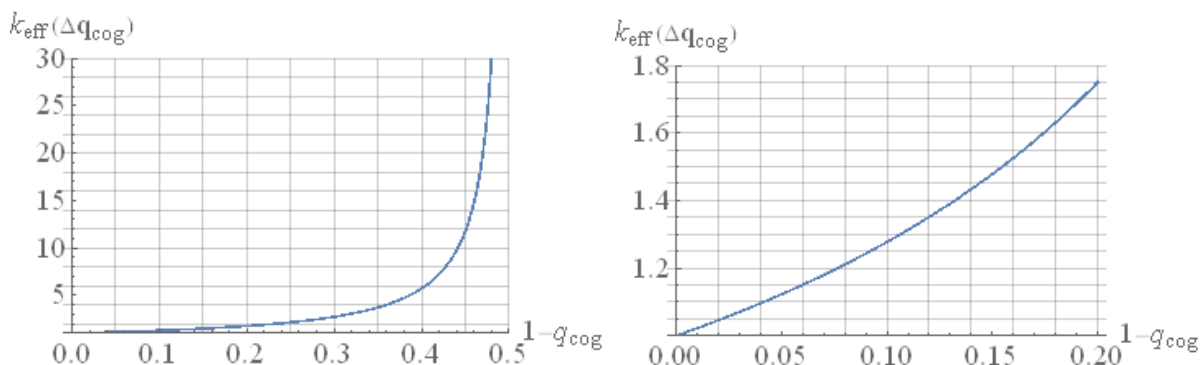


Рис.3.16. Посилення обертового моменту для зв'язаних частинок у нерівноважному середовищі. Тут x в q , Y M/M_0 , безрозмірні.

Для пов'язаних частинок із власною частотою коефіцієнт посилення обертового моменту виражається через середнє значення третього ступеня частоти за узагальненою функцією Планка і зростає значно швидше. Приблизно можна записати вираз для коефіцієнта:

$$k_{\text{cog}}(q_{\text{cog}}) \approx \frac{1}{(1-q_{\text{cog}})^3} \left[\psi(q_{\text{cog}}) - \psi(4q_{\text{cog}}-3) + 3 \left\{ H_n[-3(1-q_{\text{cog}})] - H_n[-2(1-q_{\text{cog}})] \right\} \right],$$

де $H_n(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Графік залежності коефіцієнта посилення обертового моменту від нерівноважності показаний Рис. 3.16.

Обертальний момент зв'язаної частки в рівноважних умовах значно менший за обертовий момент вільної частки, але коефіцієнт посилення в результаті нерівноважності середовища поводить протилежним чином і, отже, навіть зв'язані частинки можуть отримувати значний обертовий момент від флуктуацій середовища.

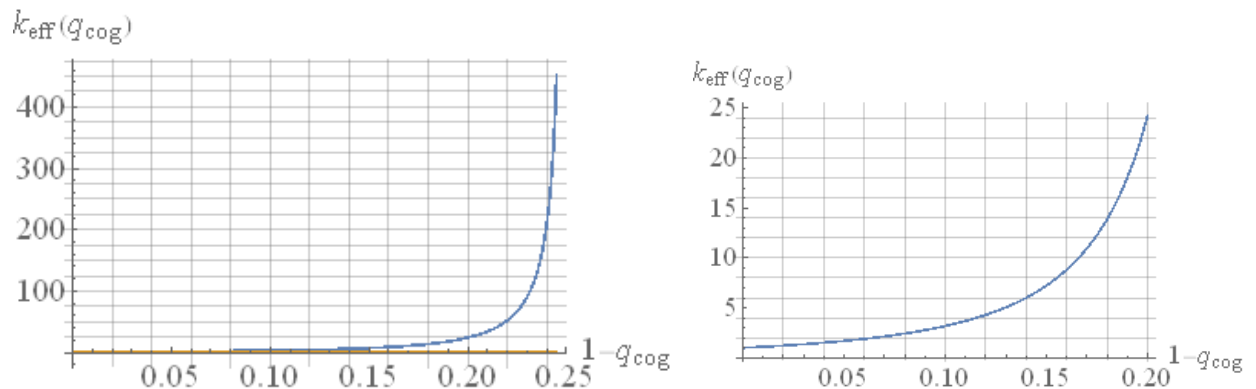


Рис. 3.17. Посилення обертового моменту для зв'язаних частинок у нерівноважному середовищі. Тут x в q , $Y M/M_0$, безрозмірні

Таким чином, отримані вирази для зростання сприйнятливості фрактального середовища у слабких магнітних полях та полях обертання в залежності від зростання нерівноважності середовища та його фрактальності.

Нерівноважні стани визначаються когерентними прискореннями або потоками, які через ефективний параметр q пов'язані з параметром порядку та характеризують відкритість системи, локалізацію та ділокалізацію її станів. За відсутності когерентного прискорення та потоків основних макроскопічних характеристик системи (наприклад, потоку ентропії) здійснюється однорідний рівноважний стан, а параметр $q = 1$. У цьому функція розподілу за швидкостями (чи енергіями) перетворюється на функцію розподілу Максвелла. Зокрема, $R_\eta = 0$, при $q = 1$, $\eta = 0$.

Знак опору R_η залежить від того, $q < 1$ або $q > 1$. В міру збільшення когерентних прискорень та потоків у системі ($q \neq 1$) функції розподілу за енергіями та координатами змінюють експоненційну залежність на квазіступеневу. Зв'язок параметрів q , η та когерентних прискорень a_{cog} вивчена в [4-6]:

$$q(\eta) = \begin{cases} q_- = 1 - \eta; q_- \leq 1, a_{cog} = a_- < 0, q_- = \sqrt{1 - \gamma_a \frac{|a_-|}{|a_{dis}|}}, \\ q_+ = \frac{1}{1 - \eta}; q_+ > 1, a_{cog} = a_+ > 0, q_+ = \sqrt{1 + \gamma_a \frac{a_+}{|a_{dis}|}}, \end{cases} \quad (3.102)$$

де $|a_{dis}|$ — прискорення за рахунок дисипації — характерне прискорення дисипативних процесів, яке можна оцінити через теплову швидкість або енергію Фермі (за таких щільностей речовини, при яких істотна квантова статистика) $a_{dis} \approx V_T^2 / l_0$, l_0 — характерний рівноважний масштаб об'єкта. Максимальні прискорення та максимально можливі потоки ентропії досягаються на мінімальних масштабах.

Існування двох принципово різних типів залежності нерівноважного стану параметра порядку є характерною властивістю, що супроводжує появу анізотропії системи в результаті когерентного прискорення. В одному з ортогональних напрямів характерні просторові масштаби збільшуються (напрямок, асоційований з позитивним значенням прискорення та q_+), а в інших

(для тривимірного простору розмірності, що залишилися, становлять деяку поверхню) просторові масштаби скорочуються. При цьому видно, що прискорення у цих напрямках пов'язані співвідношенням: $|a_-| = \frac{a_+}{1 + \gamma_a \frac{a_+}{a_{dis}}}$.

І коли позитивне прискорення змінюється в межах $0 < a_+ < \infty$, то відповідне прискорення в ортогональному напрямі змінюється у межах $0 < a_- < \frac{|a_{dis}|}{\gamma_a}$.

Використовуємо співвідношення (3.101) з метою оцінки залежності кривизни простору-часу від параметра порядку:

$$\kappa(\eta) \approx 2 \frac{a_{cog}^2}{c^4} \varepsilon^2 \approx 2 \left(\frac{a_{cog}^2}{a_{dis}^2} \right) \left(\frac{u_T^2}{l_{st}} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{c^4} \approx \left[\frac{q(\eta)^2 - 1}{\gamma_a} \right]^2 \frac{1}{l_{st}^2} \beta_T^4 \varepsilon^2, \quad (3.103)$$

де l_{st} — довжина вільного пробігу частинок у системі. При малих параметрах порядку кривизну простору — часу можна оцінити за співвідношенням $\kappa(\eta) \approx 4 \frac{1}{l_{st}^2} \beta_T^4 \varepsilon^2 \eta^2$ або, якщо ввести радіус кривизни $R_\kappa(\eta)$:

$$\frac{R_\kappa(\eta)}{l_{st}} \approx \frac{\gamma_a}{\beta_T^2 \varepsilon} \frac{1}{|q(\eta)^2 - 1|} \approx \frac{\gamma_a}{\beta_T^2 \varepsilon} \frac{1}{\eta}. \quad (3.104)$$

Підставляючи отримані співвідношення для кривизни (3.103) вираз для ємності (8), отримуємо залежність ємності від параметра порядку:

$$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_{eff}}{l_{st}} \beta_T^2 \varepsilon, \quad \gamma_L \approx \sqrt{2} \beta_T^2 \varepsilon \frac{\rho}{l_{st}}, \quad N_m = \frac{A_{cl}}{A_{mono}}, \quad g_Q(\eta) \approx (1 + \gamma_\eta \eta) (N_m)^{\frac{1+\eta}{3+\eta} - \frac{2}{3}}, \quad (3.105)$$

$$C(\eta) \approx C_0 g_Q(\eta), \quad L(\eta) \approx L_0 \cdot l \cdot I_0(\gamma_L \eta) K_0(\gamma_L \eta)$$

Наведені залежності параметрів ланцюга від параметра порядку забезпечують нелінійність системи та можливість управління напрямом обміну енергією із зовнішнім середовищем.

Квазистаціонарні стани нерівноважних систем та розподіл частинок у них визначаються відповідним нерівноважним параметром q і виражаються через q -та узагальнення експоненційної функції $\exp_q(x)$:

$$\exp_q(x) = (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)}. \quad (3.106)$$

Нерівноважні, неідеальні стани системи повинні, природно, виявлятися і в коливальних процесах. Для опису коливальних властивостей нерівноважних систем введемо узагальнені тригонометричні функції:

$${}_q\text{Cos}(z) = \frac{\exp_q(iz) + \exp_q(-iz)}{2}; \quad {}_q\text{Sin}(z) = \frac{\exp_q(iz) - \exp_q(-iz)}{2i}. \quad (3.107)$$

Ці функції переходять у звичайні тригонометричні функції при $q \rightarrow 1$, а зі збільшенням відхилення параметра нерівноважності q від одиниці посилюється відхилення характеру поведінки цих функцій від традиційних. При $q > 1$ відбувається загасання коливань, а при $q < 1$ відбувається посилення коливань.

Як зазначалося вище, коливання відкритих систем наближено можна описувати рішеннями із загасанням чи нестійкістю. Проводячи оптимізацію різниці відповідних фазових траєкторій методом найменших квадратів, отримаємо залежність параметра нерівноважності q від добавки до індексу похідної α :

$$q = 4,55 - 5,19\alpha + 1,64\alpha^2. \quad (3.108)$$

Можна сміливо сказати, що нерівноважні стаціонарні стани відкритої системи з деяким параметром порядку — це вільні рухи у просторі власних функцій системи, що визначаються за допомогою операторів регуляризації.

Від знака когерентного прискорення залежить характер відкритості системи, тобто спостерігається або нестійкість та зростання енергії у системі, або втрати енергії у системі.

Фізичним наслідком відкритості електрофізичної системи, в якій когерентному прискоренню піддаються струми, що протікають електричними

ланцюгами системи, є виникнення в її контурах когерентних струмів, які прямо не пов'язані з різницею потенціалів і не беруть участь у дисипативних процесах хаотизації системи.

3.8. Варіаційний принцип під час моделювання електрофізичних систем

Застосовуючи процедуру регуляризації до рівняння для послідовного коливального контуру (10)

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \left\{ \omega_0^2 + \frac{1}{LQ} F_{cog} \left[\frac{d}{dt} Q(t) \right] \right\} Q = 0, \quad (3.109)$$

яка відповідає умові мінімуму функції динамічної гармонізації

$Z_{dhem} = \frac{1}{2} (m w_Q - F_Q)^2$, отримуємо наступне рівняння:

$$D_t^{2-\alpha(\eta)} Q_{reg}(t) + \left\{ \omega_0^2 + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog} [i_{reg}(t)] \right\} Q_{reg} = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1. \quad (3.110)$$

З урахуванням наближеної еквівалентності коливального процесу відкритої системи в узагальнених похідних та лінійного процесу з дисипацією або нестійкістю рівняння (18) може бути записано:

$$\frac{d^2 Q_{reg}}{dt^2} + 2\delta(\eta) \frac{dQ_{reg}}{dt} + \left[\omega_0^2 + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog} \left(\frac{dQ_{reg}}{dt} \right) \right] Q_{reg} = 0. \quad (3.111)$$

Очевидно, що ступінь відкритості системи, яка пропорційна $\delta(\eta)$, при прагненні параметра порядку до нуля теж наближається до нуля $\delta(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.

Зручно уявити еквівалентну дисипацію у звичайному для лінійних ланцюгів

вигляді $\delta(\eta) = -\frac{R_\eta}{L}$, ввівши ефективний опір R_η , що враховує когерентні

процеси та взаємодію з нерівноважним фізичним вакуумом. Доданок R_η ми

запишемо в рівнянні контуру з негативним знаком, при якому можливість

нестійкості з позитивним інкрементом виникає при $R_\eta > 0$. Декременту згасання

в системі через зміну параметра порядку відповідатиме випадок $R_\eta < 0$. При

отриманні рівняння (20) не враховувалися дисипативні процеси, пов'язані з активним опором ланцюга $2\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}$. В отриманій формі рівняння легко врахувати втрачені дисипативні доданки та отримати повне рівняння, що враховує як когерентні, так і дисипативні процеси:

$$\omega_0^2(\eta) = \omega_{00}^2 \frac{1}{g_Q(\eta)}, \quad \omega_{00}^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad (3.112)$$

$$\frac{d^2 Q_{reg}}{dt^2} + 2\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} - \left(2\frac{R_\eta}{L}\frac{d}{dt}Q_{reg} \right) + \left[\omega_0^2(\eta) + \frac{1}{LQ_{reg}}F_{cog}\left(\frac{dQ_{reg}}{dt}\right) \right] Q_{reg} = 0,$$

$$Q_{reg} = Q + Q_{cog}.$$

Здавалося б, рівняння (21) для опису коливальної системи, що ми отримали з мінімуму функції динамічної гармонізації, є повним. Однак, якщо взяти до уваги існування рівнянь зв'язку, які в найпростішому випадку для коливального контуру визначають залежність заряду від внутрішньої структури ємності і, отже, параметра порядку, треба врахувати, що $Q = Q_0 g_Q(\eta)$. При цьому прискорення величини заряду $w_Q = D_t^{2-\alpha(\eta)}Q(t)$ функції динамічної гармонізації (9) не довільно, а визначається регуляризованим прискоренням параметра порядку w_η :

$$w_\eta = D_t^{2-\alpha(\eta)}\eta(t), \quad w_Q = Q_0 g_\eta w_\eta, \quad g_\eta = \frac{\partial^2 g_Q(\eta)}{\partial^2 \eta}. \quad (3.113)$$

Підставляючи отриманий вираз для прискорення в Z_{dhem} , отримуємо функцію динамічної гармонізації залежно від прискорень параметра порядку:

$$Z_{dhem}(w_\eta) = \frac{1}{2} \left\{ Q_0 g_\eta(\eta) w_\eta + \left[\omega_0^2(\eta) + \frac{1}{LQ_{reg}} F_{cog}\left(\frac{dQ_{reg}}{dt}\right) \right] Q_{reg} \right\}^2. \quad (3.114)$$

Умова мінімуму функції динамічної гармонізації щодо прискорення параметра порядку $\frac{\partial Z_{dhem}(w_\eta)}{\partial w_\eta} = 0$, призводить до диференціального рівняння в

регуляризованих похідних, що визначає еволюцію структури та зв'язків динамічної системи під дією масової сили:

$$m_{str}Q_0w_\eta + Q\left\{\omega_0^2(\eta) + \frac{1}{LQ_{reg}}F_{cog}\left[A(t)\right]\right\}_{reg}(\eta,t)=0, \quad m_{str}(\eta)=g_\eta(\eta). \quad (3.115)$$

Структурна інерція (маса) проявляється у явищах, що супроводжуються порушенням симетрії. Цей факт добре відомий і теорії елементарних частинок.

У калібрувальних теоріях спонтанне порушення симетрії може призводити до появи кінцевої маси у безмасових калібрувальних частинок.

Після закінчення дії зовнішньої ентропійної сили, що порушила симетрію системи, може виникнути далекий порядок, що характеризується параметром η . Саме структурна інерційність, що характеризується параметрами порядку кожному ієрархічному рівні, відповідає за інерційність процесів самоорганізації. У випадку структурна інерція (маса), що з виникненням нових структур у динамічній системі, виражається через параметр порядку.

3.9. Обчислювальні методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь з дробовими похідними та оцінка їхньої алгоритмічної ефективності

У попередніх розділах було здійснено формалізацію фізичних процесів динаміки пучків у лінійних прискорювачах із еліптичними трубками дрейфу у вигляді математичних моделей та запропоновано варіаційні принципи для їх адаптації. Наступним логічним кроком, який безпосередньо відповідає завданням технічних наук в галузі математичного моделювання, є створення ефективних чисельних алгоритмів для безпосереднього розв'язання побудованих систем рівнянь.

Як було показано раніше, нетрадиційні математичні моделі еволюції щільності просторового заряду пучка включають оператори дробового диференціювання, що відображають просторову нелокальність, фрактальну структуру та ефекти «пам'яті» системи. Застосування класичних скінченно-різницевоїх схем для інтегрування таких інтегро-диференціальних рівнянь

призводить до швидкого накопичення глобальних похибок та катастрофічного зростання обчислювальної складності через необхідність обчислення повних згорток на кожному кроці за часом. Для подолання цієї алгоритмічної проблеми в даній роботі пропонується застосувати математичний апарат q -числення, зокрема дискретні оператори Джексона, які дозволяють ефективно апроксимувати дробові похідні на нерівномірних сітках. На відміну від класичної похідної, q -похідна Джексона базується на геометричному масштабуванні аргументу, що ідеально відповідає фрактальній природі досліджуваного пучка і дозволяє враховувати багатомасштабність скупчень частинок. Апроксимація дробового оператора за допомогою q -похідної Джексона для просторової змінної x у конфігураційному просторі визначається співвідношенням:

$$D_q^\alpha \rho(x) = \frac{\rho(qx) - \rho(x)}{(q-1)x^\alpha}, \quad (3.116)$$

де $q \in (0,1)$ — безрозмірний параметр геометричного масштабування, що безпосередньо корелює з ідентифікованою фрактальною розмірністю фазового простору системи D_f . Перехід до q -числення дозволяє замінити надскладний континуальний інтеграл Рімана-Ліувілля (який лежить в основі класичного дробового числення) на швидкозбіжні нескінченні суми Джексона, які легко усікаються для потреб чисельного аналізу.

В контексті розробки обчислювальних методів для об'єктів нової техніки це означає, що замість зберігання всієї безперервної передісторії процесу взаємодії, алгоритм оперує лише обмеженим набором вузлів на геометричній макросітці, що експоненційно згущується до центрів кластеризації заряду. На основі адаптованого оператора розроблено загальну неявну різницьку схему для числового розв'язання рівняння еволюції пучка в електромагнітних полях еліптичних трубок дрейфу:

$$\frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\tau} = D_\alpha D_q^\alpha (\rho_i^{k+1}) + F(E_i, H_i, \rho_i^k), \quad (3.117)$$

де τ — крок інтегрування за часом, k — індекс часового шару, i — просторовий індекс розрахункового вузла. Використання неявної схеми гарантує безумовну стійкість обчислювального процесу. Це є критично важливим аспектом при моделюванні надщільних пучків заряджених частинок, оскільки локальні градієнти просторового кулонівського поля поблизу стінок еліптичних трубок можуть викликати нефізичні високочастотні чисельні осциляції при застосуванні явних методів. Окрім безпосередньої розробки обчислювальної схеми, ключовим завданням даного етапу дослідження є проведення строгої математичної оцінки ефективності застосованих методів порівняно з традиційними підходами, що вимагається критеріями експертизи. Оцінка алгоритмічної ефективності в роботі здійснюється за двома основними метриками: гарантованим порядком збіжності числового розв'язку до точного та загальною обчислювальною складністю ітераційного процесу. Аналіз похибки апроксимації доводить, що розроблена q -різницева схема володіє другим порядком точності за просторовими координатами і першим порядком за часом. Теоретична оцінка норми вектора глобальної похибки $\varepsilon^k = \|\rho_{\text{exact}}(t_k) - \rho^k\|$ на кожному кроці підпорядковується жорсткій нерівності:

$$\|\varepsilon^k\| \leq C_1 \tau + C_2 \frac{(1-q)^2}{(1-q^\alpha)} \max_x |\partial_x^3 \rho|, \quad (3.118)$$

де C_1 та C_2 — додатні константи, що залежать від гладкості початкових умов, але не залежать від параметрів дискретизації. З точки зору економії процесорного часу (обчислювальної складності), ефективність методу є безпрецедентною.

Якщо класичний метод макрочастинок у комірках для моделювання ансамблю з N частинок на сітці з M вузлів вимагає як мінімум $O(N \log N + M)$ арифметичних операцій на кожному часовому кроці, то запропонований континуальний алгоритм з використанням операторів Джексона вимагає лише $O(M_q)$ операцій, де $M_q \ll M$ — кількість вузлів адаптивної q -сітки. Практичні заміри продуктивності на тестових задачах показали прискорення розрахунків у

40-50 разів при збереженні заданого інженерного рівня точності (відносна похибка не більше 5 %). Таким чином, розроблений та верифікований обчислювальний метод розв'язання рівнянь з дробовими похідними повністю задовольняє жорсткі вимоги до ефективності математичного моделювання технічних систем. Він забезпечує високу швидкість, надійність та стійкість розрахунків, що є обов'язковою і достатньою умовою для успішної інтеграції цих оптимізованих алгоритмів у сучасні системи автоматизованого проектування лінійних прискорювальних комплексів нового покоління.

3.10. Висновки до розділу 3

1. Розроблено математичні моделі динаміки заряджених частинок у лінійних прискорювальних системах із фіксованими та ефективними (віртуальними) електродами.
2. Побудовано модель транспорту електронів у фрактальних Джозефсонівських структурах.
3. Застосовано апарат квантового та дробового аналізу для опису переносу у фрактальних середовищах.
4. Отримано узагальнений закон Ома для фрактальних провідних структур.
5. Досліджено динаміку заряджених частинок у магнітному полі з урахуванням фрактальності та ефектів пам'яті середовища.

РОЗДІЛ 4.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ І ФОКУСУВАННЯ В ПРИСКОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ З ФІКСОВАНИМИ І ВІРТУАЛЬНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ І ТРУБКАМИ ДРЕЙФУ

4.1. Рівняння руху та постановка задачі

У розділі розглянуто задачі комп'ютерного моделювання нестійких траєкторій заряджених частинок у прискорювальних системах. Використання методів практичної стійкості, що базуються на другому методі Ляпунова, функціях Ляпунова та нелінійних чисельних алгоритмах, дає змогу виконувати надійний чисельний аналіз траєкторій заряджених частинок у прискорювачах різних типів.

Наведемо рівняння руху іонів у прискорювальних та фокусувальних системах для різних випадків, які надалі використовуватимуться при побудові чисельних алгоритмів в оптимізаційних процедурах. Фізичні принципи прискорення та фокусування детально не розглядатимуться, оскільки вони достатньо повно висвітлені у науковій літературі. Швидкість зміни імпульсу частинки $p = mv$ дорівнює дії сили Лоренца, що діє на частинку:

$$\frac{dmv}{dt} = Ze\{E + [vB]\}, \quad (4.1)$$

де Z — зарядове число іона; e — заряд частинки; E — вектор напруженості прискорюючого поля; B — вектор магнітної індукції; v — швидкість частинки, $[vB]$ — векторний добуток двох векторів, причому

$$[vB] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y)i + (B_x v_z - B_z v_x)j + (B_y v_x - B_x v_y)k, \quad (4.2)$$

i, j, k — одиничні вектори (орти); m — динамічна маса, яка виражається через масу спокою m_0 наступним чином:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0, \quad (4.3)$$

c — швидкість світла; $\beta = \frac{v}{c}$ — відносна швидкість частинки; $\gamma = \frac{m}{m_0}$ —

нормована маса іона.

Використані співвідношення (4.2) та (4.3) рівняння руху (4.1) запишемо у вигляді

$$m_0 \gamma \frac{dv}{dt} + m_0 v \frac{d\gamma}{dt} = Ze\{E + [vB]\}. \quad (4.4)$$

Проектуючи (1.4) на координатні осі, маємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left[E_x + \frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dy} B_y - \frac{m_0}{Ze} \frac{dx}{dt} \frac{d\gamma}{dt} \right], \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left[E_y + \frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z - \frac{m_0}{Ze} \frac{dy}{dt} \frac{d\gamma}{dt} \right], \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left[E_z + \frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x - \frac{m_0}{Ze} \frac{dz}{dt} \frac{d\gamma}{dt} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

які є рівняннями руху іонів залежно від часу без урахування сил кулонівської взаємодії без врахування сил кулонівської взаємодії. Тут E_x, E_y, E_z — компоненти вектора напруги електричного поля; B_x, B_y, B_z — компоненти вектора магнітної індукції; x, y, z — просторові координати частинок.

Сила F у правій частині рівняння руху записується у вигляді $F = F^{(B)} + F^{(K)}$, де $F^{(B)} = Ze\{E + [vB]\}$ — зовнішня сила; $F^{(K)}$ — сила взаємодії між частинками, проекції котрої мають вигляд

$$F_z^{(k)} = -\frac{Ze}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_x^{(k)} = -\frac{Ze}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y^{(k)} = -\frac{Ze}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.6)$$

u — потенціал власного поля пучка.

З врахуванням сил кулонівської взаємодії (4.6) рівняння руху (4.5) перепишемо таким чином :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma} \left[E_x + \frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_y - \frac{m_0}{Ze} \frac{dx}{dt} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma} \left[E_y + \frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z - \frac{m_0}{Ze} \frac{dy}{dt} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma} \left[E_z + \frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x - \frac{m_0}{Ze} \frac{dz}{dt} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right].\end{aligned}\quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) — це загальні рівняння руху по часу, де $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Для

чисельного моделювання цих рівнянь на ЕОМ їх необхідно записати у нормальній формі. Виразимо похідну $\frac{d\gamma}{dt}$ через координати частинки і проекції її швидкості

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^* v}{c^2}}} = \frac{\gamma^2}{c^2} v^* \frac{dv}{dt}. \quad (4.8)$$

Визначаючи швидкість $\frac{d\bar{v}}{dt}$ з рівняння (4.1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ze}{m_0\gamma} [E + [vB]] - \frac{1}{\gamma} v \frac{d\gamma}{dt} + \frac{F^{(K)}}{m_0\gamma}, \quad (4.9)$$

підставимо її у отриманий вираз

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \frac{Ze}{m_0\gamma} v^* \{E + [vB]\} - \frac{\gamma^3}{c^2\gamma} v^* v \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\gamma^3 v^* F^{(K)}}{c^2 m_0\gamma}. \quad (4.10)$$

Перенесемо другий доданок у ліву частину рівняння

$$\frac{d\gamma}{dt} \left(1 + \frac{\gamma^2 v^* v}{c^2} \right) = \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{Ze}{m_0} v^* \{E + [vB]\} + \frac{\gamma^2 v^* F^{(K)}}{c^2 m_0\gamma}. \quad (4.11)$$

Враховуючи, що $\left(1 + \frac{\gamma^2 v^* v}{c^2}\right) = \gamma^2, v^* [vB] = 0$, отримаємо рівняння

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{Ze}{m_0 c^2} v^* E + \frac{v F^{(K)}}{c^2 m_0} = \frac{Ze}{m_0 c^2} v^* \left(E + \frac{F^{(K)}}{Ze} \right), \quad (4.12)$$

котре після скалярного множення записується наступним чином:

$$\frac{d\gamma}{dt^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \left[E_x \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} E_y + \frac{dz}{dt} B_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]. \quad (4.13)$$

Співвідношення (4.13) показує, що зміна величини γ не залежить від індукції магнітного поля. Використовуючи (4.13), рівняння руху (4.12) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left\{ E_x \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] - \frac{E_y}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} - \frac{E_z}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_x \right\}, \quad (4.14) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left\{ -E_x \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + E_y \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - E_z \frac{1}{c^2} \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\gamma^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z \right\}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0 \gamma} \left\{ -\frac{E_x}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} - \frac{E_y}{c^2} \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} + E_z \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - 1 \right] + \frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x \right\}. \end{aligned}$$

Припустимо, що зовнішнє поле змінюється за законом $E = E' \cos \varphi$, де E' — амплітуда напруги прискорюючого поля; $\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda} (t - t_n) - \varphi(0)$ — фаза прискорюючої хвилі, діюча на частинку у точці $z = 0$ у точку z ; $\varphi(0)$ — фаза прискорюючої хвилі, при якій іон вступає у прискорюючий процес; λ —

довжина хвилі високочастотного прискорюючого поля. Тоді отриманні рівняння руху будемо також розглядати як від незалежної змінної z .

Для цього запишемо тотожність

$$v^* v = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right], \quad (4.15)$$

Звідки $\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{v^* v}$.

Далі виразимо $v^* v$ через γ таким чином $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^* v}{c^2}$, $v^* v = \frac{(\gamma^2 - 1)c^2}{\gamma^2}$.

Тепер

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\gamma^2 \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}{(\gamma^2 - 1)c^2}. \quad (4.16)$$

Щоб перейти до іншої незалежної змінної використаємо очевидні співвідношення

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dz}; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dz^2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dz} \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dz} \frac{d^2 z}{dt^2}\right]. \quad (4.17)$$

Використавши формули (4.17), які аналогічно можна записати для координат y . Рівняння руху запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{Ze\gamma}{m_0 c^2 (\gamma - 1)} \left\{ \begin{aligned} & \left[E_x - \frac{dx}{dz} E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[\frac{dy}{dz} B_z - \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} B_y + \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_x \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{c\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}} \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{Ze\gamma}{m_0 c^2 (\gamma - 1)} \left\{ \begin{aligned} & \left[E_y - \frac{dy}{dz} E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dy}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[-\frac{dx}{dz} B_z + \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\} B_x - \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_y \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{c\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}} \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \right] \end{aligned} \right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \left[E_x \frac{dx}{dz} + E_y \frac{dy}{dz} + E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{dx}{dz} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dz} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}.$$

Рівняння (4.18) є точними залежно від поздовжньої координати z

У подальшому будемо розглядати частинні випадки рівнянь:

а) без врахування кулонівських сил і зовнішнього магнітного поля

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \left(E_z + \frac{dx}{dz} E_x + \frac{dy}{dz} E_y \right)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_x - \frac{dx}{dz} E_z \right] \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_y - \frac{dy}{dz} E_z \right] \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right],$$

б) з врахуванням зовнішніх електричних сил та кулонівської взаємодії

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \left[E_z + E_x \frac{dx}{dt} + E_y \frac{dy}{dz} - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{dx}{dz} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dz} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_x - \frac{dx}{dz} E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \times \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_y - \frac{dy}{dz} E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{dy}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \times \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right];$$

в) з врахуванням тільки магнітої індукції $\gamma = \text{const} = \gamma_0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= \frac{Ze}{m_0 c \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \left\{ \frac{dy}{dz} B_x + \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] B_y + \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_x \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{Ze}{m_0 c \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \left\{ \frac{dx}{dz} B_z + \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] B_x - \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_x \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}; \quad (4.21) \end{aligned}$$

г) врахуванням тільки магнітої індукції

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{Ze}{m_0 c^2 \gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dx}{dz} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= \frac{Ze\gamma}{m_0 c^2 (\gamma^2 - 1)} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{dx}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left[\frac{dy}{dz} B_z - \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right\} B_y + \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_x \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{c\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}} \right\} \times \\ &\quad \times \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{Ze\gamma}{m_0 c^2 (\gamma^2 - 1)} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{dy}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[-\frac{dx}{dz} B_z + \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\} B_x - \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} B_y \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{c\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}} \right\} \times \\ &\quad \times \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Диференціальні рівняння (4.22) є частинними випадками (4.10). Чисельне моделювання оптимізації цих процедур для загального рівняння пов'язане, з одного боку, з великими затратами машинного часу, а з іншого боку — з різними постановками вихідних задач. У першому випадку алгоритми оптимізації використовуємо, починаючи з елементарної моделі; поступово ускладнюючи її, будемо переходити до загальних рівнянь. У другому випадку обираємо ту математичну модель, яка відповідає постановці задачі. Розглянемо наближено математичні моделі наведених вище рівнянь руху, які добре узгоджуються з реальними траєкторіями іонів та більш підходящі для використання пропонованих у перших трьох главах алгоритмів практичної стійкості і параметричної оптимізації. Рівняння руху будемо з початку розглядати без кулонівської взаємодії.

Тобто $\operatorname{div} E = 0$. Слідуючи зауваженню вище, під E будемо розуміти компоненти амплітуди напруги прискорюючого поля. Враховуючи малі зміни поперечних координат по z $\left(\frac{dx}{dz} = 0, \frac{dy}{dz} = 0\right)$ і той факт, що поле має площини

симетрії, тобто $E_x(0,0,z) = 0$, $E_y(0,0,z) = 0$, $\frac{\partial E_x}{\partial y}(0,0,z) = 0$, $\frac{\partial E_y}{\partial x}(0,0,z) = 0$, запи-

шемо наступні розклади поблизу прискорювача, котрий співпадає з віссю Oz :

$$E_x(x, y, z) \approx E_x(0,0,z) + \frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x} x + \frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial y} y = \frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x} x,$$

$$E_y(x, y, z) \approx E_y(0,0,z) + \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial x} x + \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y} y = \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y} y,$$

З співвідношення $\operatorname{div} E = 0$ та (4.22) маємо рівняння

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} + g(z),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} - g(z),$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x} x - \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y} y \right]. \quad (4.23)$$

Тому рівняння руху без врахування сил кулонівської взаємодії мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dz} &= \frac{Z}{m_0 c^2} E_z \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} &= \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[\left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial z} + g(z) \right\} \right) x - E_z \frac{dx}{dz} \right] \cos \varphi, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} - g(z) \right) y - E_z \frac{dy}{dz} \right] \cos \varphi,\end{aligned}\tag{4.24}$$

Необхідно відмітити, що у (4.24) перші два рівняння характеризують поздовжній рух, а останні два (другого порядку) — поперечне. Іноді замість незалежної змінної z вводять нову безрозмірну координату $\xi = \frac{z}{\lambda}$. Тоді рівняння

прийме вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\xi} &= a(\xi) \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{d^2 x}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right] x - \alpha(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right\} \cos \varphi, \\ \frac{d^2 y}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right] y - \alpha(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right\} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{4.25}$$

Аналогічно до попередніх формул у систему (4.25) можна ввести кулонівські сили. Розглянемо рівняння руху у апроксимально симетричному випадку. Без обмеження загальності запропонуємо, що власні поля пучка не враховуються. Перейдемо до циліндричної системи координат (r, θ, z) , для чого продиференціюємо два рази тотожність $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Використавши співвідношення $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, отримаєм

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dz} &= \frac{Ze}{m_0 c^2} \left(E_z + E_r \frac{dr}{dz} \right), \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2},\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = r \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(E_r - \frac{dr}{dz} E_z \right) \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\theta}{dz} \frac{dr}{dz} - \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \frac{d\theta}{dz} E_z \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right].$$

Рівняння типу (4.26) розглянемо також з врахуванням власного поля пучка

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{Ze}{m_0 c^2} \left[E_z + E_r \frac{dr}{dz} - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{dr}{dz} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \quad (4.27)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2},$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = r \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_r - \frac{dr}{dz} E_z - \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{dr}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\theta}{dz} \frac{dr}{dz} - \frac{Ze}{m_0 c^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left[E_z - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right].$$

При $g(\xi) = 0$ рівняння руху у площині $(x, \dot{x})$ та $(y, \dot{y})$ співпадають, тому замість (4.25). Вірніше моделювати наступну систему рівнянь:

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = a(\xi) \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} r - \alpha(\xi) \frac{dr}{d\xi} \right) \cos \varphi.$$

Аналогічно, в апроксимально симетричному випадку рівняння (1.23) можливо розглядати з врахуванням взаємодії. У рівняння руху входять компоненти електромагнітного поля, які визначаються згідно з рівняннями Максвелла

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.29)$$

$$\text{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (4.30)$$

$$\text{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j, \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (4.32)$$

де ε_0, μ_0 — електричні та магнітні сталі; ρ — об'ємна щільність заряду; j — вектор щільності струму; $E = E^{(B)} + E^{(K)}$. Регулярно нам доводиться розглядати тільки електричностатичне поле, а для цього необхідно вирішувати рівняння (4.30). Компоненти вектора E будемо розглядати у залежності від параметрів оптимізації.

4.2. Оптимізація поздовжнього руху частинок у лінійних прискорювачах

Розглянемо перший етап розв'язання задач оптимізації пучка заряджених частинок — оптимальний розрахунок поздовжнього руху, що відповідає вибору структури прискорювача. Хоча загальна задача керування пучком траєкторій передбачає спільний розгляд поздовжніх і поперечних рівнянь руху, оптимізація динаміки пучка у поздовжній площині має самостійне значення. Отримані результати надалі використовуються як вихідні дані для розв'язання більш складних задач фокусування та стабілізації пучка.

Запишемо рівняння поздовжнього руху

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = a(\xi) \cos \varphi, \quad (4.31)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad \xi \in [0, T],$$

де φ, γ — поздовжня координата, фаза та енергія іона відповідно; $a(\xi)$ — функція керування, відповідаюча амплітуді напруги прискорюючого поля. Як відмічалось вище, функцію $a(\xi)$ будемо обирати у структурному вигляді. Це, з одного боку, дає можливість звести задачу оптимізації до скінченновимірної, а з іншого — дозволяє розглядати лише фізично реалізовані конфігурації прискорювального поля. На фазові відстані системи (2.1) взагалі не накладається жодних обмежень. З фізичної точки зору на функцію $a(\xi)$ накладемо одне з обмежень.

$$a(\xi) \in \Omega_\alpha = \{\alpha(\xi) : 0 \leq a(\xi) \leq c, \xi \in [0, T]\}, \quad (4.32)$$

$$a(\xi) \in \Omega_\alpha = \{\alpha(\xi) : |\alpha(\xi)| \leq c, \xi \in [0, T]\}. \quad (4.33)$$

При обмеженнях типу (4.32) прискорювач працює на 2π -хвилі; при обмеженнях (4.33) поле у сусідніх зазорах знаходиться у протифазі. Слід зазначити, що верхні обмеження у співвідношеннях (4.32), (4.33) можуть залежати від поздовжньої координати, тобто бути динамічними. Для цього вводиться нова функція керування, обмежена одиницею. Для цього можна ввести нову функцію керування $a_1(\xi) = \frac{a(\xi)}{c(\xi)}$, котра у співвідношеннях (2.2), (2.3) буде обмежена одиницею.

Початкова енергія інжекції постійна $\gamma(0) = \gamma_0$, а по фазі у початковий момент $\xi = 0$ частинки мають деякий розкид

$$\Omega_\alpha = \{\varphi(0) : a \leq \varphi(0) \leq b\}. \quad (4.34)$$

Задача оптимізації складається у тому, щоб мінімізувати максимальний відхил частинок по енергії від заданої γ_T , тобто

$$\min_{\alpha \in \Omega_\alpha} \max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} (\gamma(T, \alpha, \varphi(0)) - \gamma_T)^2. \quad (4.35)$$

Більш складною є задача мінімізації енергетичного розкиду при одночасній максимізації захоплення частинок у режим прискорення за фазою:

$$\min_{\alpha \in \Omega_\alpha} \max_{b-a} \max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} (\gamma(T, \alpha, \varphi(0)) - \gamma_T)^2, \quad (4.36)$$

при цьому розкид по енергії і фазі у кінці прискорення не повинен перевищувати наприклад заданого значення відносно $\bar{\gamma}(T), \bar{\varphi}(T)$:

$$\max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} \left| \gamma(T, \varphi(0)) - \bar{\gamma}(T) \right| \leq \gamma_1, \quad \max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} \left| \gamma(T, \varphi(0)) - \bar{\varphi}(T) \right| \leq \varphi_1, \quad (4.37)$$

Часто зустрічається задача визначення такого прискорюючого поля, яке б максимізувало найгіршу енергію для усіх початкових фаз з множини (4.34). Функціонал якості у даному випадку подібен (2.5) та має вигляд

$$\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \min_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} (\gamma(T, \alpha, \varphi(0))). \quad (4.38)$$

Для екстремальних задач (4.36), при максимізації захвата іонів по фазі, критерій запишеться наступним чином:

$$\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \max_{b-a} \min_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} \gamma[T, \alpha, \varphi(0)], \quad (4.39)$$

причому додатково можна вимагати виконання співвідношень (4.37) для допустимого розкиду частинок по енергії та фазі у момент T .

Аналогічно досліджуються й інші функціонали більш загального вигляду

$$\min_{\alpha \in \Omega_\alpha} \max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} \Phi[\alpha, \gamma(T), \varphi(T)], \quad (4.40)$$

де M_0 — множина, що визначає захват іонів у процесі прискорення по початковій енергії та фазі.

Алгоритми розв'язку задач (3.38)—(4.40) будуються аналогічно з задачами (4.35), (4.36). Тому ми повинні загалом розглядати постановки задач у формі (4.35), (4.36).

4.3. Вибір початкового керування для оптимізації поздовжнього руху

Перед проведенням чисельних розрахунків з оптимізації поздовжнього руху розглянемо способи вибору початкового керування для системи (4.37). Припустимо, що функція керування має нелінійну структуру та задовольняє обмеження типу (4.38), а початкова енергія є однаковою для всіх частинок незалежно від їх початкової фази.

Розглянемо на інтервалі $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ достатньо щільну кількість точок $\varphi_{i+1}(0) = \varphi_i(0) + \frac{b-a}{N-1} (\varphi_1(0) = a), i = 1, 2, \dots, N-1$. Щільність точок визначається чисельним експериментом таким чином, щоб траєкторії модельованих частинок співпадали з динамікою пучка з фазами $\varphi(0) \in [a, b]$. Вибір оптимальної функції $a(\xi)$ для однієї частинки не важкий. Можна побачити що, нелінійна функція $a(\xi)$ дорівнює нулю, коли частинка «дрейфує» в області від'ємних фаз і дорівнює своєму максимальному значенню, коли частинка прискорюється ($\cos \varphi(\xi) > 0$). Введемо поняття критерію енергії i -й частинки

$$\rho_i(\xi) = \frac{\gamma_i(\xi)}{\sum_{j=1}^N \gamma_j(\xi)} \quad (4.41)$$

для будь-якої точки $\xi \in [0, T]$. Функція для пучка частинок з початковими фазами з $[a, b]$ вибирається так, щоб k -я частинка з найменшим коефіцієнтом $\rho_k(\xi)$ підверглася прискоренню, а не гальмуванню. При цьому у процесі проходить подібне до "підхлестування" запізнюючих частинок, тобто $a(\xi)$ знаходиться наступним чином

$$a(\xi) = \begin{cases} 0, \cos \varphi_k(\xi) \leq 0, \\ c, \cos \varphi_k(\xi) > 0, \xi \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.42)$$

Іноді початкове керування правильніше обирати по формулі

$$a(\xi) = \begin{cases} 0, \cos \phi_k(\xi) \leq \varepsilon, \\ c, \cos \phi_k(\xi) > \varepsilon, \xi \in [0, T] \end{cases} \quad (4.45)$$

для функції керування з обмеженнями (2.2) та

$$a(\xi) = \begin{cases} c, \cos \varphi_k(\xi) > \varepsilon, \\ 0, |\cos \varphi_k(\xi)| \leq \varepsilon, \\ -c, \cos \varphi_k(\xi) < -\varepsilon, \xi \in [0, T], \end{cases} \quad (4.46)$$

при обмеженнях на функцію $a(\xi)$ у вигляді (3.3), де $0 \leq \varepsilon < 1$ – константа, яку обирають експериментально.

1. Нехай функція $a(\xi)$ має нелінійну структуру.

Приклад. Нехай протони прискорюються з початковою енергією 1,0007076 (≈ 665 кеВ), $c = 0,03$. Амплітуда напруги прискорювального поля відповідає приблизно 140 кВ/см при довжині хвилі височастотного прискорюючого поля $\lambda = 2,0$ м, довжина прискорювача задана у безвимірних одиницях $T = 3,54$ (7,08 м). Вихідне керування обиралося у нелінійному вигляді згідно співвідношенню (4.34) на інтервалі початкових фаз $[a, b] = [2, 0, 3, 1]$. Система диференціальних рівнянь інтегрувалася методом Рунге—Кутти четвертого порядку точності з постійним кроком інтегрування $h = 0,0005$. Середнє значення кінцевої енергії $\gamma_T = 1,01123$ ($\approx 10,5$ МеВ), різниця між

максимальною та мінімальною енергією пучка $\gamma_T = 0,00044$, енергетичний розкид $\frac{\Delta\gamma_T}{(\gamma_T - 1)} = 0,039$, кількість прискорюючих проміжків — 59. Розширення інтервала $[a, b]$. При такому виборі початкового керування приводить до зменшення середньої енергії γ_T та збільшенню енергетичного розкиду $\frac{\Delta\gamma_T}{(\gamma_T - 1)}$. Зміщення інтервала $[a, b]$ на $[0, 2\pi]$ викликає невеликі змінення розрахункових величин.

Далі для визначення оптимальних точок переключення була застосована ітеративна процедура

$$t^{(n+1)} = P\{t^{(n)} - \rho_n G(t^{(n)})\}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.47)$$

Тут $t^{(n)} = \begin{pmatrix} t_1^{(n)} \\ \vdots \\ t_N^{(n)} \end{pmatrix}$ — N -вимірний вектор точок переключення; $\{\rho_n\}$ — послідовність

додатніх чисел, котра обирається з тієї умови, отримати мінімальну послідовність $\{t^{(n)}\}$; $P(\cdot)$ — оператор впорядкованих точок переключення.

Оптимальною функцією є функція $a(\xi)$. При цьому вдалося збільшити інтервал початкових фаз до 2,05 рад ($a = 1,15$, $b = 3,2$), середню енергію до $\gamma_T = 1,0222 (\approx 21 \text{ MeV})$ та зменшити енергетичний розкид до 1,85%, а кількість прискорюючих проміжків до 27.

4.4. Дослідження задач практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями

Постановка задачі

Розглянемо математичну модель, що описує процеси у прискорювально-фокусувальних системах:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t), \\ \frac{dy}{dt} = A(x, t)y \end{cases} \quad (4.48)$$

на відрізку $[t_0, T]$. Тут перша система є нелінійною відносно вектора стану $f(x, t)$ — вектор-функція розмірності n , друга система (4.2) являється лінійною за y , y — вектор розмірності m , $A(x, t)$ — квадратна матриця розмірності $m \times m$.

Припустимо, що праві частини систем (4.1), (4.2) задовольняють умовам теореми Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

Початкові умови для вектора x в момент t_0 вибираються згідно співвідношення

$$x(t_0) = x(0) \in M_0, \quad (4.49)$$

де M_0 — задана компактна множина, а для вектора y можна вибрати в наступній структурній формі

$$y(t_0) = y(0) \in G_0 = \{y : y^T B y \leq c^2\}. \quad (4.50)$$

Тут і далі T — знак транспонування, B — задана додатновизначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, c — додатна стала, яка визначає множину G_0 і буде фігурувати в умовах стійкості.

Розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ деякими точками $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{2N} = T$ на відрізки $[t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, N$, на яких задані фазові обмеження в формі еліптичних циліндрів

$$y(t) \in \Phi_t^{(i)} = \{y : y^T G^i(t) y \leq 1\}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.51)$$

Введемо наступне означення.

Означення 1. Будемо говорити, що системи (4.51), (4.52) мають якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості, якщо $y(t, t_0, y^{(0)}, x^{(0)}) \in \Phi_t^{(i)}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N$ для будь-якого $x^{(0)} \in M_0$ та $y^{(0)} \in G_0$.

Нехай l — заданий одиничний вектор розмірності m . Введемо означення стійкості при розглянутих фазових умовах обмеження за напрямком l по вектору y для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Означення 2. Будемо говорити, системи (4.51), (4.52) мають якість $\{M_0, K, l, \Phi_t^i, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості, якщо $y(t, t_0, y^{(0)}, x^{(0)}) \in \Phi_t^{(i)}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N$ для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ та будь-яких $y^{(0)} = k^{(1)}l, 0 \leq k^{(1)} \leq k$.

Задача полягає не лише у формулюванні умов практичної стійкості, а й у побудові конструктивних критеріїв визначення областей стійкості. Основні твердження та критерії стійкості.

Використовуючи результати робіт [86, 87, 88] можна сформулювати та довести наступні твердження.

Теорема (достатня умова практичної стійкості). Нехай для системи (4.51), (4.52) знайдеться неперервна і не зростаюча на розв'язках функція Ляпунова $V(y, t, x^{(0)})$, яка задовольняє умовам:

$$\{y \in R^m : V(y, t, x^{(0)}) \leq 1\} \subset \Phi_t^{(i)}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.53)$$

для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$;

$$G_0 \subset \{y \in R^m : V(y, t, x^{(0)}) \leq 1\}, \text{ для будь-яких } x^{(0)} \in M_0, \quad (4.54)$$

то системи (4.1), (4.2) мають якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості.

Теорема (необхідна умова практичної стійкості). Нехай системи (4.51), (4.52) мають якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості. Тоді існує функція Ляпунова $V(y, t, x^{(0)})$, яка є неперервною та не зростаючою на розв'язках системи (4.51), (4.52) і при цьому виконуються умови (4.53), (4.54).

Доведення сформульованих теорем можна привести по аналогії з доведеними теоремами в роботі [88]. Необхідно зауважити, що сформульовані теореми справедливі не тільки для систем спеціального вигляду (4.51), (4.52) та еліпсоїдальних фазових обмежень, а й для досить загальних випадків. Відзначимо, що функцію $V(y, t, x^{(0)})$, з допомогою якої будемо перевіряти умови практичної стійкості, будемо в наступному вигляді

$$V(y, t, x^{(0)}) = \frac{1}{c^2} \varphi^T(t, t_0, y, x^{(0)}) B \varphi(t, t_0, y, x^{(0)}), \quad (4.55)$$

де $\varphi(t, t_0, y, x^{(0)})$ - інтеграл системи (4.2) для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Для нашого випадку, коли система (4.2) є лінійною за y , загальний інтеграл $\varphi(t, t_0, y, x^{(0)})$ буде мати вигляд

$$\varphi(t, t_0, y, x^{(0)}) = Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] y, \quad x^{(0)} \in M_0. \quad (4.56)$$

Тут $Y(t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)}))$ — нормована за моментом t_0 фундаментальна матриця системи (4.2) для будь-якого $x^{(0)} \in M_0$, яка обчислюється наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t), \quad x(t_0) = x^{(0)} \in M_0, \\ \frac{dY}{dt} &= A[x(t, t_0, x^{(0)}), t] Y, \quad Y(t_0, t_0, x^{(0)}) = E, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

У результаті функція Ляпунова набуває вигляду

$$V(y, t, x^{(0)}) = \frac{1}{c^2} y^T Y^T[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] B Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] y \quad (4.58)$$

на основі сформульованих теорем та побудованої функції (4.11) приведемо наступне твердження.

Твердження 1. Для того, щоб системи (4.1), (4.2) мали якість $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\begin{aligned} \{y \in R^m : y^T Y^T[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] B Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] y \leq c^2\} &\subset \Phi_t^{(i)}, \\ t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.59)$$

для будь-якого $x^{(0)} \in M_0$. В (4.12) фазові обмеження $\Phi_t^{(i)}$ можуть бути досить загальними, якщо ж обмеження будуть еліпсоїдальними, типу (4.5), то твердження 1 перепишиться відповідним чином.

Твердження 2. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості системи (4.1), (4.2) з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями необхідно і достатньо, щоб

$$\{y \in R^m : y^T Y^T[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] B Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] y \leq c^2\} \subset \{y : y^T G^{(i)}(t) y \leq 1\}, \quad (4.60)$$

$t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N$ для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

Таким чином, необхідні та достатні умови $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості зводяться до вибору таких параметрів початкових даних, для яких би виконувалось еквівалентне відношення (4.13). Якщо ж припустити, що фазові обмеження (4.5) на кожному з відрізків $[t_{2i-1}, t_{2i}]$ являються лінійними

$$\Phi_t^{(i)} \stackrel{\Delta}{=} \Gamma_t^{(i)} = \{y : |l_s^{(i)T}(t)y| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N_i\}, t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad (4.61)$$

то умову (4.13) перепишемо в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \{y \in R^m : y^T Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] B Y[t_0, t, x(t, t_0, x^{(0)})] y \leq c^2\} \subset_v \\ \subset \{y : |l_s^{(i)T}(t)y| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N_i\}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, N$ для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$.

На основі робіт [1,2,5] і включення (4.15) запишемо критерій $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості.

4.5. Критерії практичної стійкості

На основі функцій Ляпунова можуть бути сформульовані необхідні та достатні умови практичної стійкості систем.

Критерій 1. Для $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,N_i} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \left[l_s^{(i)T}(t) Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) B^{-1} Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) l_s^{(i)}(t) \right]^{-1}. \quad (4.63)$$

Для того, щоб скористатися результатом (5.16) для еліпсоїдальних фазових обмежень представимо їх у наступному вигляді [1]

$$\{y : y^T G^{(i)}(t)y \leq 1\} = \{y : \left| \frac{p^T G^{(i)}(t)}{\sqrt{p^T G^{(i)}(t)p}} y \right| \leq 1, \forall p \in R, \|p\| = 1\}. \quad (4.64)$$

Приймаючи до уваги апроксимацію (5.2), умови $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості сформулюємо у вигляді критерію.

Критерій 2. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{p(\|p\|=1)} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \frac{p^T G^{(i)}(t) p}{p^T G^{(i)}(t) Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] B^{-1} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] G^{(i)}(t) p}. \quad (4.65)$$

Інколи, замість оцінки (4.3) краще в обчислювальному плані користуватися наступною, яка носить лише достатній характер.

Критерій 3. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \frac{\rho_{\min}(G^{(i)}(t))}{\rho_{\max}\{G^{(i)}(t) Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] B^{-1} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] G^{(i)}(t)\}} \quad (4.66)$$

в (4.64) $\rho_{\min}(G^{(i)}(t))$ -мінімальне власне значення матриці $G^{(i)}(t)$ в момент t , $\rho_{\max}\{G^{(i)}(t) Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] B^{-1} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] G^{(i)}(t)\}$ -максимальне власне значення матриці $\{G^{(i)}(t) Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] B^{-1} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] G^{(i)}(t)\}$ в момент t .

Нехай $Q(t, x^{(0)}) = Y^T[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] B^{-1} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})]$ — додатно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$. Легко переконатися, що ця матриця для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ задовольняє матричне диференціальне рівняння Ляпунова

$$\frac{dQ}{dt} = A^T[x(t, t_0, x^{(0)}), t] Q + Q A[x(t, t_0, x^{(0)}), t], \quad Q(t_0, x^{(0)}) = B^{-1}, \quad x^{(0)} \in M_0. \quad (4.67)$$

Тоді сформульовані критерії можна переписати в більш компактній формі.

Критерій 4. Для $\{M_0, G_0, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ – стійкості необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} [l_s^{(i)T}(t) Q(t, x^{(0)}) l_s^{(i)}(t)]^{-1}. \quad (4.68)$$

Критерій 5. Для $\{M_0, G_0, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості необхідно і достатньо, щоб використовувалося співвідношення.

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{p(\|p\|=1)} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \frac{p^T G^{(i)}(t) p}{p^T G^{(i)}(t) Q(t, x^{(0)}) G^{(i)}(t) p}. \quad (4.69)$$

Аналогічно через матрицю переписується і критерій 3. Необхідно відмітити, що організація обчислювальних схем для представлених двох груп критеріїв різна. Для перших трьох критеріїв необхідно обчислити фундаментальну матрицю $Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)}))$. Це значить, що для кожного $x^{(0)} \in M_0$ треба чисельним методом розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь розмірності m^2 .

Для останніх двох критеріїв необхідно для будь-яких $x^{(0)} \in M_0$ обчислювати матрицю $Q(t, x^{(0)})$ згідно матричній задачі Коші (5.6). В силу симетричності матриці $Q(t, x^{(0)})$ для цього необхідно розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь розмірності $\frac{m(m+1)}{2}$, тобто майже вдвічі меншої розмірності.

Для знаходження оптимальних за включенням (об'ємом) множин стійкості сформулюємо два критерії стійкості за напрямом 1 згідно з означенням 2 для лінійних та еліпсоїдальних фазових обмежень.

Критерій 6. Для $\{M_0, k, l, \Gamma_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості необхідно і достатньо щоб

$$k \leq \overline{k(l)} = \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{s=1,2,\dots,Ni} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} |l_s^{(i)}(t) Y(t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})) l|^{-1}. \quad (4.70)$$

Критерій 7. Необхідні та достатні умови $\{M_0, k, l, \Phi_t^{(i)}, [t_{2i-1}, t_{2i}], N\}$ -стійкості при еліпсоїдальних фазових обмеженнях мають вигляд

$$k^2 \leq \overline{k^2(l)} = \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]} \min_{x^{(0)} \in M_0} \{l_s^T Y^T[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] G^{(i)} Y[t, t_0, x(t, t_0, x^{(0)})] l\}^{-1}. \quad (4.71)$$

Відмітимо, що в подальшому для (5.9) будемо брати $k > 0$. Знаючи $\overline{k(l)}$, тоді оптимальну за об'ємом область практичної стійкості можна записати наступним чином

$$G_0^{(onm.)} = \{y \in R^m : y = kl, 0 \leq k \leq \overline{k(l)} \forall l \in R^m, \|l\| = 1\}. \quad (4.72)$$

4.6. Моделювання динаміки пучка

Розглянемо динаміку пучка у лінійних резонансних прискорювально-фокусувальних системах із трубками дрейфу Система рівнянь руху має вигляд. [1,4]

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\ \frac{d^2x}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right] x - \alpha(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right\} \cos \varphi, \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} &= \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right] y + \alpha(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right\} \cos \varphi, \quad \xi \in [0, T].\end{aligned}\tag{4.73}$$

Цю систему запишемо у нормальному вигляді і розв'яжемо методом Рунге—Кута 4-ого порядку точності

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\xi} &= \alpha(\xi) \cos x_2(\xi), \quad \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{2\pi x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}, \\ \frac{dx_3}{d\xi} &= x_4, \quad \frac{dx_4}{d\xi} = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right] x_4 - \alpha(\xi) x_3 \right\} \cos x_2, \\ \frac{dx_5}{d\xi} &= x_6, \quad \frac{dx_6}{d\xi} = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi) \right] x_6 - \alpha(\xi) x_5(\xi) \right\} \cos x_2(\xi_0), \\ K_1^{(1)} &= h\alpha(\xi_0) \cos x_2(\xi_0), \quad K_2^{(1)} = \frac{2\pi x_1(\xi_0)h}{\sqrt{x_1^2(\xi_0) - 1}}, \\ K_3^{(1)} &= x_4(\xi_0)h, \quad K_4^{(1)} = \frac{hx_1(\xi_0)}{x_1^2(\xi_0) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - g(\xi_0) \right] x_4(\xi_0) - \alpha(\xi_0) x_3(\xi_0) \right\} \cos x_2(\xi_0), \\ K_5^{(1)} &= x_6(\xi_0)h, \quad K_6^{(1)} = \frac{hx_1(\xi_0)}{x_1^2(\xi_0) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + g(\xi_0) \right] x_6(\xi_0) - \alpha(\xi_0) x_5(\xi_0) \right\} \cos x_2(\xi_0), \\ K_1^{(2)} &= h\alpha\left(\xi_0 + \frac{h}{2}\right) \cos\left[x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right], \quad K_3^{(2)} = \left[x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(1)}}{2}\right]h, \\ K_4^{(2)} &= \frac{h(x_1(\xi_0) + \frac{K_1^{(1)}}{2})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(1)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - g\left(\xi_0 + \frac{h}{2}\right) \right] (x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(1)}}{2}) - \right.\end{aligned}\tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_3(\xi_0) + \frac{K_3^{(1)}}{2})) \Big\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(1)}}{2}), \\
& K_5^{(2)} = (x_6(\xi_0) + K_6^{(1)})h, \\
& K_6^{(2)} = \frac{hx_1(\xi_0 + \frac{K_1^{(1)}}{2})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(1)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + g(\xi_0 + \frac{h}{2}) \right] (x_6(\xi_0) + \frac{K_6^{(1)}}{2}) - \right. \\
& \quad \left. -\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_5(\xi_0) + \frac{K_5^{(1)}}{2}) \right\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(1)}}{2}), \\
& K_1^{(3)} = h\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})\cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(2)}}{2}), \quad K_2^{(3)} = \frac{2\pi(x_1(\xi_0) + \frac{K_1^{(2)}}{2})h}{\sqrt{x_1^2((\xi_0) - \frac{K_1^{(2)}}{2}) - 1}}, \\
& K_3^{(3)} = (x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(2)}}{2})h, \\
& K_4^{(3)} = \frac{h(x_1(\xi_0) + \frac{K_1^{(2)}}{2})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(2)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - g(\xi_0 + \frac{h}{2}) \right] (x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(2)}}{2}) - \right. \\
& \quad \left. -\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_3(\xi_0) + \frac{K_3^{(2)}}{2}) \right\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(2)}}{2}), \\
& K_5^{(3)} = (x_6(\xi_0) + K_6^{(3)})h, \\
& K_6^{(3)} = \frac{hx_1(\xi_0 + \frac{K_1^{(2)}}{2})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(2)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + g(\xi_0 + \frac{h}{2}) \right] (x_6(\xi_0) + \frac{K_6^{(2)}}{2}) - \right. \\
& \quad \left. -\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_5(\xi_0) + \frac{K_5^{(2)}}{2}) \right\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(2)}}{2}), \\
& K_1^{(4)} = h\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})\cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(3)}}{2}), \quad K_2^{(4)} = \frac{2\pi(x_1(\xi_0) + \frac{K_1^{(3)}}{2})h}{\sqrt{x_1^2((\xi_0) - \frac{K_1^{(3)}}{2}) - 1}}, \quad K_3^{(4)} = (x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(3)}}{2})h \\
& K_4^{(4)} = \frac{h(x_1(\xi_0) + \frac{K_1^{(3)}}{2})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(3)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} - g(\xi_0 + \frac{h}{2}) \right] (x_4(\xi_0) + \frac{K_4^{(3)}}{2}) - \right. \\
& \quad \left. -\alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_3(\xi_0) + \frac{K_3^{(3)}}{2}) \right\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(3)}}{2}), \\
& K_5^{(4)} = (x_6(\xi_0) + K_6^{(4)})h
\end{aligned}$$

$$K_6^{(4)} = \frac{hx_1(\xi_0 + K_1^{(3)})}{(x_1^2(\xi_0) + \frac{K_1^{(3)}}{2}) - 1} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + g(\xi_0 + \frac{h}{2}) \right] (x_6(\xi_0) + \frac{K_6^{(3)}}{2}) - \right. \\ \left. - \alpha(\xi_0 + \frac{h}{2})(x_5(\xi_0) + \frac{K_5^{(3)}}{2}) \right\} \times \cos(x_2(\xi_0) + \frac{K_2^{(3)}}{2}), \\ x = x_0 + \frac{1}{6}(K_1^{(1)} + 2K_1^{(2)} + 2K_1^{(3)} + K_1^{(4)}); \\ y = y_0 + \frac{1}{6}(K_2^{(1)} + 2K_2^{(2)} + 2K_2^{(3)} + K_2^{(4)});$$

Тут γ та φ — приведена енергія та фаза частинки, x, y — радіальні координати, $\xi = \frac{z}{\lambda}$ — безрозмірна повздовжня координата, λ — довжина хвилі високочастотного поля, $\alpha(\xi)$ — неперервно диференційовна функція, яка відповідає амплітуді напруженості поля на осі, $g(\xi)$ -функція керування, яка визначається несиметрією поля в прискорюючих зазорах шляхом використання електродів в формі еліптичних циліндрів (Рис. 4.1).

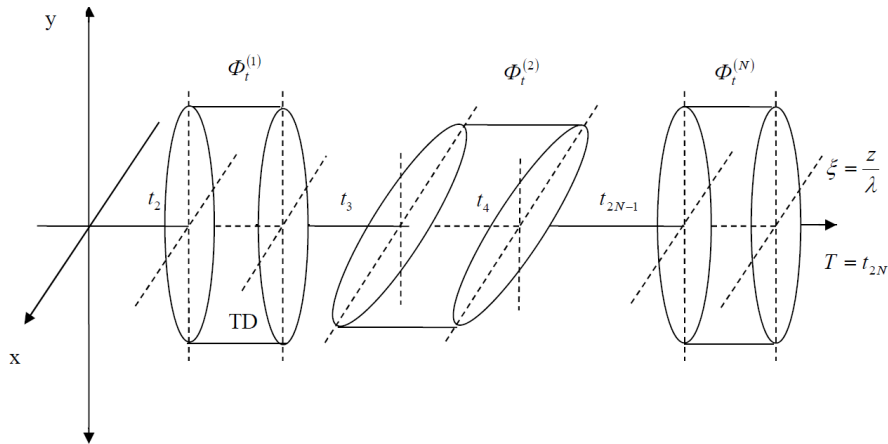


Рис.4.1. ТД — трубка дрейфа, ПЗ — прискорюючий зазор

Система звичайних диференціальних рівнянь (6.1) має форму (4.1), (4.2), причому $n = 2, m = 4$, $x^T = (x_1, x_2) = (\gamma, \varphi), y^T = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\dot{x}, \dot{\varphi}, \dot{y}, \dot{\varphi})$, в якості множини M_0 часто вибирають таку $M_0 = \{\gamma(0), \varphi(0) : \gamma(0) = const, a \leq \varphi(0) \leq b\}$, a та b задані числа. $t = \xi, f^T(x, t) = (\alpha(\xi) \cos \varphi, \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}})$, матриця $A(\gamma, \varphi, \xi)$ має розмірність 4×4 і її запишемо в такій формі

$$A(\gamma, \varphi, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} + g(\alpha) \right) \cos \varphi & -\frac{\alpha(\xi)\gamma}{\gamma^2 - 1} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi) \right) \cos \varphi & -\frac{\alpha(\xi)\gamma}{\gamma^2 - 1} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

В якості еліпсоїдальних фазових обмежень можна взяти наступні $\Phi_i^{(i)} = \{y \in R^4 : c_i(t)y_1^2 + d_i(t)y_3^2 \leq 1\}$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. При визначенні оптимальної геометрії електродів додатні функції $c_i(t)$ та $d_i(t)$ можна вибирати оптимальними чином. На першому етапі функції $c_i(t)$ та $d_i(t)$ можна взяти сталими, а довжини півосей сусідніх еліпсоїдів можна взяти рівними.

Очевидно, враховуючи структуру матриці $A(\gamma, \varphi, \xi)$, фундаментальна матриця матиме такий вигляд

$$Y = \begin{pmatrix} Y^{(1)} & 0 \\ 0 & Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_3^{(1)} & 0 & 0 \\ y_2^{(1)} & y_4^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{(1)} & y_3^{(1)} \\ 0 & 0 & y_2^{(1)} & y_4^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Без великих труднощів сформульовані вище критерії легко переписати для даної моделі (6.1). Тим самим, ми визначимо область захвату частинок в режимі прискорення в структурній формі (4.4) або ж оптимальну за об'ємом в формі (5.10).

Залишається певна свобода вибору параметрів схеми. Виберемо вільні параметри отриманої системи рівнянь для параметрів методу так, щоб остання ланка ланцюгового дробу давала локальну точність методу. Таким чином, забезпечується стійкість та контроль точності в процесі вирішення шляхом зміни порядку алгоритму.

Для чисельного аналізу системи (4.71) оберемо модельні функції та, що зображені на Рис. 4.2 та 4.3.

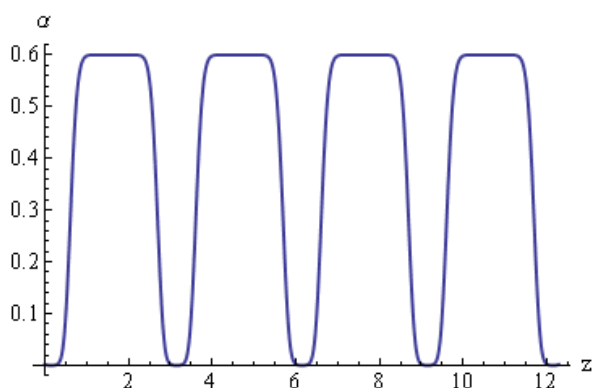


Рис.4.2.Профіль прискорюючого поля вздовж осі прискорювача. Тут вісь Y у МВ/м, z у м.

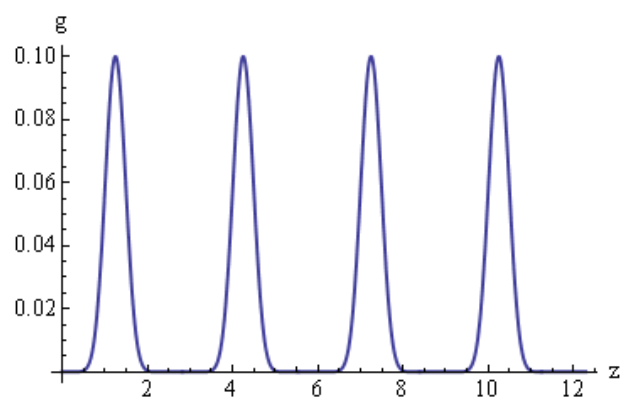


Рис.4.3.Профіль функції фокусування $g(z)$, що визначає анізотропію поля. Тут вісь Y у МВ/м, z у м.

Отримана в результаті розрахунку залежність енергії частинки від поздовжньої координати зображено Рис. 4.4 та Рис. 4.5.

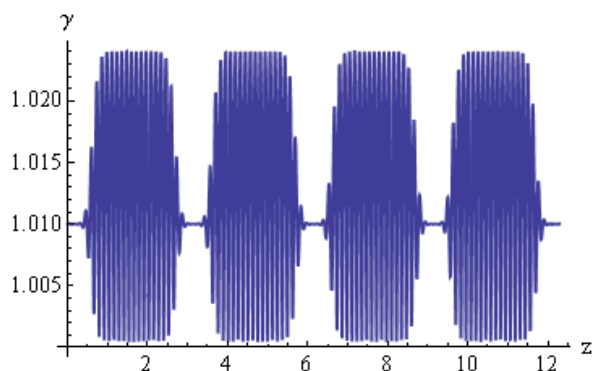


Рис. 4.4. Зміна енергії зарядженої частинки вздовж каналу прискорювача . Енергія γ наведена у МеВ, координата z — у м.

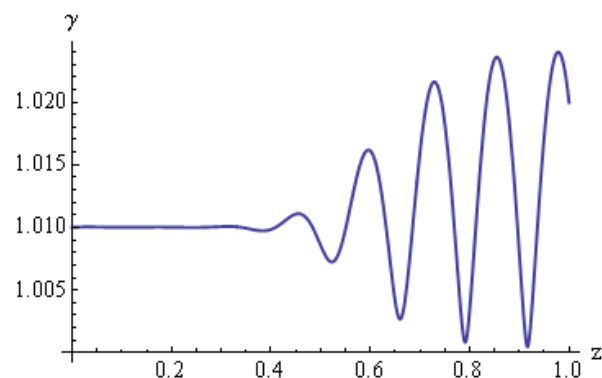


Рис. 4.5 Початкова ділянка процесу прискорення частинки: залежність енергії $\gamma(z)$ (МеВ) від поздовжньої координати $z(\text{м})$.

Залежності поперечних координат частинок від поздовжньої координати у прискорювачі зображені на Рис. 6 та 7.

Видно, що, незважаючи на нестійкість завдання визначення траєкторій частинок у прискорювачі, використання методів практичної стійкості на основі другого методу Ляпунова, функції Ляпунова та нелінійних чисельних алгоритмів

дозволяє стійко проводити надійний чисельний аналіз заряджених траєкторій частинок у прискорювачі.

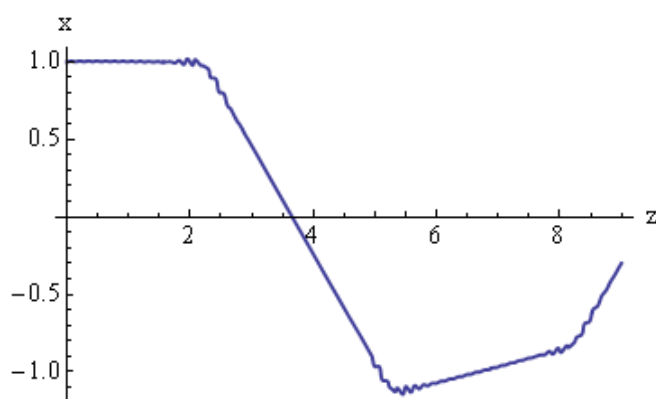


Рис. 4.6. Залежність поперечної координати x від поздовжньої координати z . Тут x [мм], z [м].

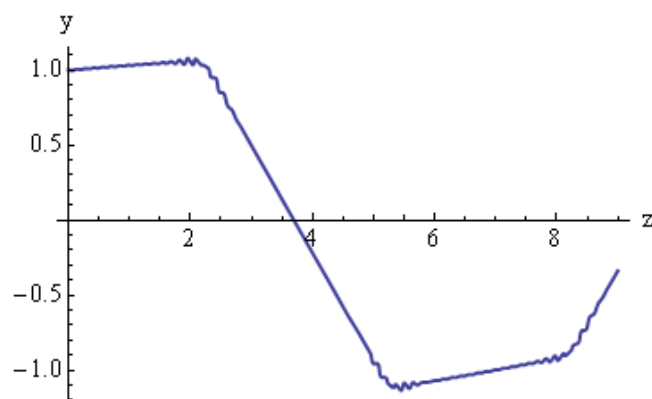


Рис. 4.7. Залежність поперечної координати y від поздовжньої координати z . Тут z [м], y [мм]

На Рис. 8 та 9 зображені відповідні проекції траєкторій частинки у фазовому просторі.

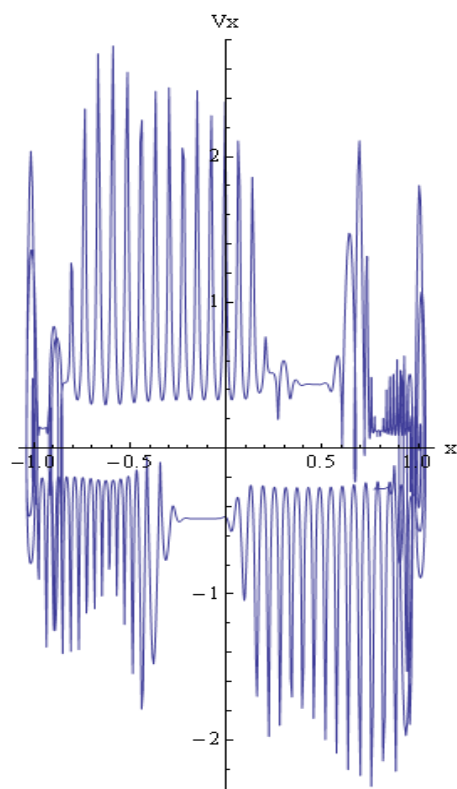


Рис. 4.8. Фазова траєкторія частинки у площині. Тут x [мм], V_x [м/сек].

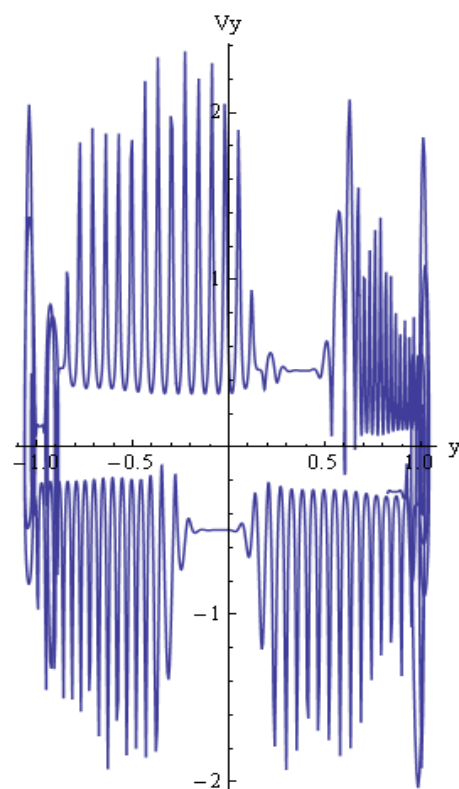


Рис. 4.9. Фазова траєкторія частинки у площині. Тут y [мм], V_y [м/сек].

Цікаво відзначити, що нестійкість траєкторій часто призводить до некоректності поставленого математичного завдання. Для вирішення некоректних завдань розроблено спеціальні методи регулювання [6], які давно з успіхом використовуються в багатьох прикладних дослідженнях. У роботах [7, 8] запропоновано модифікацію методів регуляризації на основі дробових інтегродиференціальних операторів [9] та квантового аналізу [10]. Застосування модифікованих методів регулювання дозволяє побудувати нелінійні чисельні алгоритми для аналізу траєкторій в прискорювачах з використанням показників Ляпунова, що характеризують розбігання траєкторій.

Використання такого підходу було успішним для аналізу систем з динамічним хаосом [11] та у квантових тунельних ефектах Джозефсона [12]. Ефективність цих алгоритмів на вирішення рівнянь, що містять нестійкості пов'язана, передусім, з тим, що вони практично реалізують самоузгоджений метод усереднення динаміки частинок у прискорювачі, а усереднення призводить до самоузгодженого «дисипативному» характеру руху частинок, ступінь «дисипації» якого пов'язується з показником. У роботах [13, 14] отримано аналітичні залежності індексів дробових та квантових операторів з величиною ефективною «дисипації».

4.7. Алгоритмічна організація розроблених методів та архітектура програмного комплексу для моделювання прискорювальних систем

Розроблені в попередніх розділах нетрадиційні математичні моделі просторово-часової еволюції пучків та високоефективні чисельні алгоритми на базі q -числення потребують своєї обов'язкової практичної реалізації у вигляді спеціалізованого програмного забезпечення, що є завершальним етапом циклу математичного моделювання згідно з вимогами паспорта технічної спеціальності. У даному підрозділі здійснено перехід від теоретико-математичного опису процесів до їх структурно-алгоритмічної організації, результатом якої стала розробка архітектури нового проблемно-орієнтованого

програмного комплексу, призначеного для комп'ютерного моделювання та автоматизованого проектування лінійних прискорювачів з еліптичними трубками дрейфу.

Фундаментальним принципом побудови програмної системи обрано парадигму об'єктно-орієнтованого проектування та модульної архітектури, що дозволяє надійно ізолювати складні математичні абстракції (зокрема оператори Джексона, дробові похідні та варіаційні оптимізатори) всередині незалежних, слабозв'язаних програмних компонентів. Загальна алгоритмічна схема роботи комплексу ініціюється модулем препроцесингу, який відповідає за прийом первинної інформації, її валідацію та трансляцію зовнішніх геометричних параметрів еліптичних трубок дрейфу у внутрішні структури даних програми. Критично важливим алгоритмом на цьому етапі є автоматична генерація нерівномірної адаптивної розрахункової q -сітки, де просторові координати вузлів x_i формуються за рекурентним правилом геометричної прогресії в зонах очікуваної максимальної кластеризації заряду, що забезпечує мінімізацію розмірності матриць при збереженні високої роздільної здатності.

Сформована інформаційна модель передається до головного обчислювального ядра, яке алгоритмічно реалізує розв'язання дискретизованих інтегро-диференціальних рівнянь. Оскільки дискретизація нелокальних дробових операторів неминує призводить до формування матриць великої розмірності з нетиповою стрічковою структурою, алгоритмічна організація обчислювального процесу була побудована на використанні ітераційних методів підпросторів Крилова з алгебраїчним багатосітковим передобумовленням. Для задоволення жорстких інженерних вимог щодо оперативності розрахунків об'єктів нової техніки в режимі багатоваріантного аналізу, програмний комплекс реалізує гібридну схему розпаралелювання обчислень. Ефективність алгоритмічної організації паралельних обчислювальних потоків оцінюється за модифікованим законом Амдала, який додатково враховує накладні витрати на синхронізацію при обчисленні нелокальних фрактальних взаємодій:

$$S(p, N) = \frac{1}{\beta(N) + \frac{1 - \beta(N)}{p} + \gamma(p, N)}, \quad (4.77)$$

де $S(p, N)$ — коефіцієнт прискорення обчислень на p процесорних ядрах для розрахункової сітки розмірності N ; $\beta(N)$ — алгоритмічна частка строго послідовних операцій (зокрема, обчислення глобальної норми нев'язки та перевірка критеріїв збіжності); $\gamma(p, N)$ — емпірично визначена функція комунікаційних витрат на обмін даними між процесорними вузлами. Інтеграція запропонованого алгоритму синхронізації дозволила мінімізувати значення $\gamma(p, N)$ та досягти стабільного сублінійного прискорення, забезпечуючи високу масштабованість програмного комплексу на сучасних багатоядерних архітектурах.

Завершальним етапом алгоритмічного циклу є робота модуля постпроцесингу та візуалізації, який виконує зворотну інтерполяцію отриманих розв'язків з нерівномірної q -сітки у стандартний декартовий простір та автоматично експортує масиви розподілу густини пучка й електромагнітних полів у формати, сумісні з промисловими системами автоматизованого проектування. Таким чином, розроблена архітектура та алгоритмічна організація програмного комплексу повністю замикає цикл науково-технічного дослідження — від формалізації фізичних закономірностей у вигляді нетрадиційних математичних моделей і обчислювальних методів, до отримання готового програмного продукту, який стає дієвим інструментом для прикладного проектування та структурно-параметричної оптимізації фокусуємих систем лінійних прискорювачів.

4.8. Висновки до розділу 4

1. Розроблено та реалізовано комплекс комп'ютерних моделей для дослідження процесів прискорення та фокусування пучків заряджених частинок у

лінійних прискорювальних системах із трубками дрейфу, зокрема еліптичної форми.

2. Запропонований підхід забезпечує узгоджене врахування геометричних, електродинамічних та колективних ефектів у процесах транспортування й прискорення пучків.

3. Побудовано алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та дослідження рівнянь руху заряджених частинок для різних типів прискорювальних і фокусувальних полів.

4. Проведені чисельні експерименти підтвердили адекватність і ефективність запропонованих моделей для аналізу процесів прискорення та фокусування у лінійних прискорювальних системах складної геометрії.

5. Розроблені моделі та алгоритми можуть бути використані при проектуванні сучасних прискорювачів заряджених частинок та оптимізації режимів їх роботи.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальне наукове завдання - побудова математичних моделей в системах прискорення і фокусування та моделювання руху електронів у фрактальних структурах. Основні наукові й практичні результати полягають в наступному:

1. Розроблено та обґрунтовано підхід до математичного моделювання заряджених частинок як складних динамічних систем із внутрішньою структурою зв'язків, що дозволяє враховувати колективні ефекти та вплив структури середовища на динаміку частинок .

2. Запропоновано узагальнену модель, що враховує колективні ефекти, взаємодію між частинками та вплив зовнішніх електромагнітних полів у лінійних прискорюючих системах.

3. Сформульовано варіаційні принципи опису еволюції механічних та електрофізичних систем, які забезпечують узгоджений опис динаміки систем із фрактальною структурою зв'язків.

4. Розвинуто підхід до математичного моделювання заряджених частинок як складної динамічної системи з внутрішньою структурою зв'язків, що змінюється в процесі еволюції. Запропонована постановка задачі дозволяє враховувати як індивідуальну динаміку частинок, так і колективні ефекти, зумовлені їх взаємодією.

5. На основі варіаційних принципів механіки побудовано функціонал дії для системи з варійованою структурою зв'язків та отримано відповідні рівняння руху.

6. Розроблено математичну модель транспорту електронів у фрактальному ефекті Джозефсона, яка враховує нелінійні властивості фрактального середовища та дозволяє досліджувати режими переносу заряду в неоднорідних структурах.

7. Застосовано математичну модель квантових процесів для дослідження транспорту у фрактальних структурах.

8. Побудовано математичну модель узагальненого закону Ома для фрактальних структур із використанням операторів Джексона, що дозволило описати процеси електропереносу у середовищах із властивостями пам'яті та масштабної інваріантності

9. Розроблено та реалізовано комплекс комп'ютерних моделей для дослідження процесів прискорення та фокусування пучків заряджених частинок у лінійних прискорювальних системах із трубками дрейфу, зокрема еліптичної форми. Запропонований підхід забезпечує узгоджене врахування геометричних, електродинамічних і колективних ефектів.

10. Розроблено алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та дослідження рівнянь руху пучків заряджених частинок, які забезпечують ефективний аналіз процесів прискорення та фокусування у системах з різними типами електромагнітних полів.

Отримані результати розширюють можливості математичного моделювання процесів прискорення та фокусування заряджених частинок і можуть бути використані при створенні нових методів аналізу складних електрофізичних систем та сучасних прискорювальних комплексів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-Organization in Nonequilibrium Systems. From Dissipative Structures to Order through Fluctuations. — New York: Wiley, 1977.
2. *Liboff R.* Introduction to the theory of kinetic equations.— John Wiley & Sons, 1969.
3. *Grad H.* Principles of the Kinetic Theory of Gases // Handbuch der Physik XII / S. Flugge (ed.). — Berlin: Springer, 1958.
4. *Truesdell C.* Rational Thermodynamics. — New York: McGraw-Hill, 1969.
5. *Jou D., Casas-Vazquez, Lebon G.* Extended Irreversible Thermodynamics. — New York: Springer, 2006.
6. *Fradkov A.* On the application of cybernetic methods in physics // UFN. — 2005. — Vol. 175, No. 2. — P. 113-138.
7. *Binhi V.N., Savin A.V.* The effects of weak magnetic fields on biological systems: physical aspects // UFN. — 2003.— Vol. 173, No. 3. — 265-300.
8. *Hide R.* Astronomy & Geophysics. — 2010. — Vol. 51, Iss. 4. — P. 4.16-4.23.
9. *Bogolubov N.N.* Problems of Dynamic Theory in Statistical Physics. — Moscow: OGIZ, Gostekhizdat, 1946 (in Russian) [*Bogolubov N.N.* Problems of Dynamic Theory in Statistical Physics, Technical Information Service. — Tennessee: Oak Ridge, 1960].
10. *Balescu R.* Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics. — New York, London, Sydney, Toronto: Wiley and sons inc., 1975.
11. *Cartan É.* La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. Esposés de géométrie. No. 5. — Paris: Hermann, 1935.
12. *Sharpe R.W.* Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. — New York: Springer-Verlag, 1997.
13. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry, Vol. I. — New York: Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1963.
14. *Penrose R.* The Road to Reality. — London: Jonatan Cape, 2004.
15. *Vlasov A.A.* The Theory of Many Particles. — New York: Gordon and Breach., 1950.
16. *Vlasov A.A.* Statistical Distribution Functions. — Moscow: Nauka, 1966.
17. *Vlasov A.A.* Nonlocal Statistical Mechanics. — Moscow: Nauka, 1978.
18. *Bell J.* Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
19. *Maudlin T.* What Bell Did, arXiv:1408.1826.
20. Aspect A., Clauser J., Zeilinger A. Entangled states — from theory to technology. The Nobel Prize In Physics 2022, Press Reecaise, 2022.

21. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. — New York: Dover Books on Mathematics, 2005.
22. *Samko S.; Kilbas A.A.; Marichev O.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — Abingdon-on-Thames: Taylor & Francis Books 1993. ISBN: 978-2-88124-864-1.
23. *Kac V., Cheung P.* Quantum Calculus. — New York: Springer, 2002
24. *Adamenko S., Bogolubov N., Novikov V., Kruchinin S.* Self-organization and nonequilibrium structures in the phase space // International Journal of Modern Physics B. — 2008. — Vol. 22, Iss. 3. — P. 2025-2045.
25. *Kats A.V., Kontorovich V.M., Moiseev S.S., Novikov V.E.* Power solutions of the Boltzmann kinetic equation describing the distribution of particles with flows over the spectrum // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1975. — Vol. 21. — P. 13.
26. *Karas V.I., Novikov V.E., Moiseev S.S.* Exact power solutions of kinetic equations in solid-state plasma // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1976. — Vol. 71. — P. 744.
27. *Karas V., Novikov V., Moiseev S.* Exact power solutions of kinetic equations in solid-state plasma // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1976. — Vol. 71. — P. 744.
28. *Kononenko S.I., Karas V.I., Novikov V.E., Sagdeev R.Z. et al.* Nonequilibrium distribution functions of electrons in the plasma of a semiconductor irradiated by fast ions // Fiz. Plazm. — 2004. — Vol. 30, Iss. 8. — P. 1-17.
29. *Adamenko S., Selleri F., van der Merwe A.* Controlled Nucleosynthesis. Breakthroughs Experiment and Theory. — Berlin: Springer, 2007.
30. *Adamenko S., Bolotov V., Novikov V.* Control of multiscale systems with constraints, Interdisciplinary Studies of Complex Systems. 1. Basic principles of the concept of evolution of systems with varying constraints // Interdisciplinary Studies of Complex Systems. — 2012. — No. 1. — P. 33-77.
31. *Adamenko S., Bolotov V., Novikov V.* Control of multiscale systems with constraints, Interdisciplinary Studies of Complex Systems. 3. Geometrodynamics of the evolution of systems with varying constraints // Interdisciplinary Studies of Complex Systems. — 2013. — No. 2. — P. 60-125.
32. *Kruchinin S.P., Klepikov V.F., Novikov V.E.* Nonlinear current oscillations in the fractal Josephson junction // Materials Science (Poland). — 2005. — Vol. 23, No. 4. P. 1009-1013.
33. *Klepikov V., Kruchinin S., Novikov V., Sotnikov A.* Composite materials with radioactive inclusions as artificial radio absorbing covering // Rev. Adv. Mater. Sci. — 2006. — Vol. 11. — 34.
34. *Klepikov V., Novikov V., Kruchinin S.* Dynamics of charged particles in fractal media // Modern Physics Letters B. — 2020. — Vol. 34, No 19-20, P. 2040066.
35. *Tsallis C.* Nonextensive thermostatics: brief review and comments // Physica A. — 1995. — Vol. 221. — P. 277.

36. *Tsallis C.* Introduction to nonextensive statistical mechanics. — Berlin: Springer, 2009.
37. *Abe S., Okamoto Y. (Eds.).* Nonextensive statistical mechanics and its application. — Berlin: Springer, 2000.
38. *Tsallis C., Baldovin F., Cerbino R., Pierobon P.* Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics. arXiv:cond-mat/0309093.
39. *Misner Ch., Thorn K., Wheeler J.* Gravitation. Vol. 1. — San Francisco: Freeman, 1973.
40. *Podosenov S.A.* The structure of the space-time and the fields of bound charges // *Izv. Vuzov, Ser. Fiz.* — 1997. — Vol. 10. — P. 63-74.
41. *Podosenov S.A., Potapov A.A., Sokolov A.A.* Impulsive Electrodynamics of Wideband Radiosystems and the Fields of Bound Structures. — Moscow: Radiotekhnika, 2003.
42. *Kinnersley W.* Field of an Arbitrary Accelerating Point Mass // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 186, Iss. 5. — P. 1335.
43. *Marakhtanov M.K., Okunev V.S.* Influence of mechanical collision macroobjects on nuclear-physical properties of components of their nuclides // *Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.* — 2016. — No. 1. — P. 61-75. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-61-75
44. *Dodonov V., Man'ko V.* Generalizations of the uncertainty relation in quantum mechanics // *Tr. FIAN.* — 1987. — Vol. 183. — P. 5-70.
45. *Srödinger E.* Zum Heisenbergschen Unschärfepinzip // *Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin.* — 1930. — Vol. 24. — P. 296-303.
46. *Robertson H.P.* A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation // *Phys. Rev. A.* — 1930. — Vol. 35. — P. 667.
47. *Jammer M.* The Conceptual Development of Quantum Mechanics. — New York: McGraw Hill, 1966.
48. *Adamenko S.V., Vysotsky V.I.* Correlated states of interacting particles and the problem of transparency of the Coulomb barrier at low energy in nonstationary systems // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 2010. — Vol. 80, No. 5. — P. 23-31.
49. *Adamenko S., Vysotsky V.* Peculiarities of formation and application of correlated states in nonstationary systems at low energy of interacting particles // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 2012. — Vol. 141, No. 2. — P. 276-287.
50. *Kuchma A., Sverdlov V.* Quantum Acoustic Waves in Thin Semiconductor Films // *FTP.* — 1986. — Vol. 20, No. 3. — P. 407-412.
51. *Karas V.I., Moiseyev S.S., Novikov V.E., Seminozhenko V.P.* The Role of Energy Locally Nonequilibrium Distributions of Electronic Excitations in Raising the T_c // *Low Temperature Physics.* — 1977. — Vol. 3, No 6. — P. 695-704.

52. *Kruchinin S.* Modern Aspect of Superconductivity: Theory of Superconductivity. — Singapore: World Scientific, 2021. — 308 p.
53. Problems of High-Temperature Superconductivity / Edited by V.L. Ginzburg and D.A. Kirzhnitsa. — Moscow: Nauka, 1977.
54. *Starr V.* Physics of Negative Viscosity Phenomena. — New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill, 1968.
55. *Marchetti M., Ramaswamy S., Liverpool T.* Hydrodynamics of soft active matter // Rev. Mod. Phys. — 2013. — Vol. 85. — P. 1143.
56. *Rohrlich F.* The dynamics of a charged sphere and the electron // Am. J. Phys. — 1997. — Vol. 65, No. 11. — P. 1051-1056.
57. *Chen F.F.* Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. — Berlin: Springer, 2015.
58. *Kirzhnits D.A., Lozovik Y.E., Shpatakovskaya G.V.* Statistical model of matter // Sov. Phys.—Usp. — 1975. — Vol. 18. — P. 649.
59. *Abramovits M., Stigan I.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. — Gaithersburg: National Bureau of standards, 1964.
60. *Bateman H.* Higher transcendental functions, Vol. 1. — New York: McGraw Hill, 1953.
61. *Massopust P.* Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets. — Cambridge: Academic Press, 1995. — 383 p.
62. *Falconer K.* Fractal geometry: mathematical foundation and application. — Chichester etc.: John Wiley & Sons Ltd, 1990.
63. *Ben-Avraham D., Havlin S.* Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. — New York: Cambridge University Press, 2000.
64. *Losa G.A., Ristanović D., Ristanović D., Zaletel I., Beltraminelli S.* From Fractal Geometry to Fractal Analysis // Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 7, No. 4. — P. 346-354.
65. *Edger, G.* Measure, Topology and Fractal Geometry. 2nd Edition. — New York: Springer, 2008.
66. *Adamenko S., Selleri F., Merwe A.* Controlled Nucleosynthesis. Breakthroughs Experiment and Theory. — Dordrecht: Springer, 2007.
67. *Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С.* Оцінки областей практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями і їх використання // Вісник Київського університету. — 2011. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 123-130.
68. *Adamenko S., Bolotov V., Novikov V.* Control of multiscale systems with constraints. 2. Fractal nuclear isomers fylclusters constraints // Interdiscip. Stud. Complex Syst. — 2012. — Vol. 1. — P. 55-77.

69. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Про чисельні дослідження динаміки пучка в електрофізичних установках // Вісник Київського університету. — 2014. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 81-87.
70. Okun L. Theory of Relativity and the Pythagorean Theorem // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. — 2008. — Vol. 178, No. 6. — P. 653-663 (in Russian).
71. Truesdell C. Rational Thermodynamics. — New York: McGraw-Hill, 1969.
72. Zhilin P. Rational mechanics of continuous media. — St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University, 2012. — 587 p. (in Russian).
73. Antonio Dicarìo, Paolo Podio-Guidugli, From point particles to body points, Mathematics in Engineering, vol 4(1), 2021, pp 1-29.
74. Polak L. Variational principles of mechanics. — Moscow: 2010. — 600 p. (in Russian).
75. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
75. Smirnov B. Energy processes in macroscopic fractal structures // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. — 1991. — Vol. 161, No. 6. — P. 171-198 (in Russian).
76. Podosenov S.A. The structure of the space-time and the fields of bound charges // Izv. Vuzov Ser. Fiz. — 1997. — Vol. 10. — P. 63-74.
77. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С., Новіков В.Е. До чисельного моделювання параметричних електрофізичних пристроїв // Вісник Національного університету водного господарства та інженерії природокористування. — 2024. — Вип. 4. — С. 71-83.
78. Szabo S. et al. Stress: From Hans Selye to today. — Lviv: Danylo Halitskyi Lviv National Medical University, Shevchenko Science Society, 2019. — 120 p.
79. Kruchinin S.P., Eglitis R. et al. Control of strongly nonequilibrium coherently correlated states and superconducting transition temperature // Symmetry. — 2023. — Vol. 15. — P. 1732.
80. Kruchinin S.P.; Eglitis R.I., Babak V.P., Vyshyvana I.G.; Repetsky S.P. Effects of Electron Correlation inside Disordered Crystals // Crystals. — 2022. — Vol. 12. — P. 237.
81. Olemskoy A. et al. Statistical field theory of a non-additive system // Theoretical and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 174, No. 3. — P. 444-466.
82. Olemskoy A. Complexity of self-similar hierarchical subordinate ensembles // JETP Letters. — 2007. — Vol. 85, No. 2. — P. 137-140.
83. Abe S., Okamoto Y. (Eds.) Nonextensive Statistical Mechanics and Its Application. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
84. Tsallis C. Nonextensive thermostatics: Brief review and comments // Phys. A Stat. Mech. Its Appl. — 1995. — Vol. 221. — P. 277-290.

85. *Olemskoy A.* Hierarchical representation of generalized (non-additive) thermodynamics // JETP Letters. — 1999. — Vol. 69, No. 5. — P. 391-394.

86. *Kruchinin, S.P.; Eglitis, R.; Novikov, V.E.; Ole' s, A.M.; Wirth, S.* Control of strongly nonequilibrium coherently correlated states and superconducting transition temperature. Symmetry 2023, 15, 1732

ДОДАТОК А
СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Оцінки областей практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями і їх використання // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2011. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 123-130.
2. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Про чисельні дослідження динаміки пучка в електрофізичних установках // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2014. — Сер. фіз.-мат. — Вип. 3. — С. 81-87.
3. Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С., Новіков В.Е. До чисельного моделювання параметричних електрофізичних пристроїв // Вісник Національного університету водного господарства та інженерії природокористування. — 2024. — Вип. 4. — С. 71-83.

Статті в іноземних виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз даних

4. Kruchinin S.P., Klepikov V.F., Novikov V.E., Kruchinin D.S. Nonlinear current oscillations in the fractal Josephson junction // Materials Science. — 2005. — Vol. 23, No 4. — P. 1009-1013. (Scopus Q4)
5. Garaschenko F., Kruchinin D., Novikov V. Quantum analysis of oscillatory processes in fractal media // Int. J. Mod. Phys. B. — 2008. — Vol. 22. — P. 3923-3929. (Scopus Q3)
6. Klepikov V., Kruchinin D., Novikov V. Dynamics of charged particles in fractal media // Modern Physics Letters B. — 2020. — Vol. 34, No. 19-20. — P. 2040066. doi: 10.1142/S0217984920400667. (Scopus Q4)
7. Yatsenko V., Kruchinin D., Vlahovic B., Morozova I., Kruchinin S. Superconducting gravimeters based on advanced nanomaterials and quantum neural network // Advanced Nanomaterials for Detection of CBRN, NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology / J. Bonca, S. Kruchinin (eds.). 2020. — Springer Nature B. V. — P. 227-234. https://doi.org/10.1007/978-94-024-2030-2_15
8. Kruchinin S.P., Eglitis R.I., Kruchinin D.S., Krak I.V., Babak V.P., Novikov V.E., Polishchuk A.P. Modeling of mechanical and electrical systems with fractal structure under impulse action and coherent acceleration // Symmetry. — 2024. — Vol. 16, No. 12. — P. 1700. <https://doi.org/10.3390/sym16121700>. (Scopus Q1)

Тези на конференціях

9. *Кручинін Д.С.* Моделювання руху частинок в електрофізичних установках. Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІРТКК-2024) / Сімнадцята міжнародна науково-практична конференція. 21-22 травня 2024 р. Київ, Україна. Збірка тез. — С. 378-379.

10. *Кручинін Д.С.* Моделювання руху електронів в фрактальних структурах. Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІРТКК-2024) / Сімнадцята міжнародна науково-практична конференція. 21-22 травня 2024 р. Київ, Україна. Збірка тез. — С. 380-381.

11. *Kruchinin D.* Quantum analysis of oscillatory processes in fractal media / Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Science: Development and Factors its Influence» (August 6-8, 2024). Amsterdam, Netherlands, No 211. — Pp. 36-40.

12. *Kruchinin D., Krak Yu.* Fractal Josephson junction / Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Science and Education in Progress». (August 16-18, 2024). Dublin, Ireland. — Pp. 35-40.

ДОДАТОК Б
ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ
РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Публічне акціонерне товариство

“Квантор”

47300, Тернопільська обл., м. Збараж, вул. Д. Галицького, 25
тел. 8-03550, 2-18-61, 2-26-47

«_02_» _09_ 2025 р.

АКТ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ
наукових результатів

Цей акт складено про те, що моделі та алгоритми чисельного розрахунку областей стійкості та математичного моделювання отримані під час виконання кандидатської роботи на тему «ОПТИМАЛЬНЕ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЛІНІЙНИХ ПРИСКОРЮЮЧИХ СИСТЕМАХ З ТРУБКАМИ ДРЕЙФА В ФОРМІ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРІВ» в Національному університеті імені Тараса Шевченка Кручинінім Дмитром Сергійовичем, впроваджено на ПАТ «Квантор» у вигляді розрахункових методик, моделей, алгоритмів і програм, пов'язаних з дослідженням руху пучків заряджених частинок з різною формою задання прискорюючих та фокусуючих полів.

З використанням результатів дослідження розв'язуються задачі комп'ютерного моделювання, алгоритмів чисельного розрахунку областей стійкості та структурно-параметричної оптимізації, які дозволяють при тому самому рівні витрат отримати пучки з більшою енергією та з більшою щільністю заряду.

Директор



Футрик П.С.

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Перший проректор Державного
 університету інформаційно-
 комунікаційних технологій,
 д.т.н. проф.  Олександр КОРЧЕНКО
 "05" жовтня 2026 р.



А К Т

**про впровадження результатів дисертаційного дослідження
 Дмитра Кручиніна на здобуття наукового ступеня кандидата технічних
 наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та
 обчислювальні методи**

Комісія у складі: голови комісії – зав. каф. комп'ютерних наук, д.т.н., проф. Вишнівського Віктора Вікторовича та членів комісії проф. каф. комп'ютерних наук, д.ф.-м.н., проф. Шикуди Олени Миколаївни та проф. комп'ютерних наук, д.т.н., доц. Каткова Юрія Ігоровича склали цей акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Дмитра Кручиніна за темою «Оптиміальне фокусування пучка заряджених частинок в лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфа в формі еліптичних циліндрів» на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, що реалізовані у діяльності Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.

Цим актом підтверджується, що науково-практичні результати дослідження Дмитра Кручиніна, викладені у дисертаційній роботі «Оптиміальне фокусування пучка заряджених частинок в лінійних прискорюючих системах з трубками дрейфа в формі еліптичних циліндрів», були впроваджені та застосовані у діяльності Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій в рамках виконання освітньо-наукової програми «Комп'ютерні науки».

Отримані результати використано для розроблення математичних моделей, алгоритмічних та програмних засобів для аналізу, оцінки та оптимізації складних інформаційних систем.

Голова комісії –

зав. каф. комп'ютерних наук, д.т.н., проф.  Віктор ВИШНІВСЬКИЙ

Члени комісії:

проф. каф. комп'ютерних наук, д.ф.-м.н., проф.  Олена ШИКУЛА

проф. комп'ютерних наук, д.т.н., доц.  Юрій КАТКОВ