

УДК 621.326

Юрій Крутій, д.т.н., проф.; Алла Перпері, к.т.н., доц.; Данило Величко, аспірант
Одеська державна академія будівництва та архітектури, Україна

ПРО ПАРАМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛИХ ПЛАСТИН НА СТЕПЕНЕВО-ЗМІННІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Досліджено задачу про вільні осесиметричні коливання круглих пластин на степеневозмінній пружній основі Вінклера. Запропонований метод дослідження ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння коливань в частинних похідних. Для множини значень показника степеня s , який характеризує неоднорідність основи, обчислено власні частоти коливань круглої пластини та встановлено аналітичні залежності частот від параметра s .

Ключові слова: круглі пластини, неоднорідна пружна основа, вільні осесиметричні коливання, аналітичний метод, частоти коливань, параметричний аналіз.

Yurii Krutii, Alla Perperi, Danylo Velychko

ABOUT THE PARAMETRIC ANALYSIS OF AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES ON A POWER-LAW VARYING ELASTIC FOUNDATION

The problem of free axisymmetric vibrations of solid circular plates resting on a power-law varying Winkler elastic foundation is investigated. The proposed analytical approach is based on the exact solution of the corresponding partial differential equation of motion. For a range of values of the exponent that characterizes the inhomogeneity of the foundation, the natural frequencies of the circular plate are computed, and analytical relationships between the frequencies and the governing parameter are established.

Key words: circular plates, inhomogeneous elastic foundation, free symmetric oscillations, analytical method, oscillation frequencies, parametric analysis.

Круглі пластини на суцільній пружній основі становлять окремий тип конструкцій, що широко використовуються в інженерній практиці. Їх застосування охоплює низку галузей, серед яких – промислове та цивільне будівництво, гідротехніка, транспортна інфраструктура, машинобудування, кораблебудування тощо. Одним з найпоширеніших підходів до моделювання взаємодії конструкції з пружною основою є модель Вінклера, де основа характеризується коефіцієнтом постелі – єдиним параметром, що описує її жорсткість. Зазвичай передбачається, що основа є однорідною, а коефіцієнт постелі відповідно – сталим, що суттєво спрощує математичний опис. Проте на практиці така ідеалізація рідко відповідає дійсності. Для отримання точніших результатів доцільно враховувати неоднорідність основи, при якій коефіцієнт постелі є функцією координат.

Авторами досліджено задачу про осесиметричні коливання круглих суцільних пластин сталої циліндричної жорсткості D , що опираються на неоднорідну пружну основу (рис. 1), для якої коефіцієнт постелі задається степеневою функцією

$$k(r) = k(a) \left(\frac{r}{a} \right)^s, \quad s \geq 0.$$

Диференціальне рівняння коливань в амплітудному стані має вигляд [1, 2]

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] \right\} + \left(k(a) \left(\frac{r}{a} \right)^s - \rho h \omega^2 \right) w(r) = 0, \quad (1)$$

де ρ – щільність матеріалу, h – товщина пластини, ω^2 – частота вільних коливань пластини, $w(r)$ – амплітудна функція прогинів, що залежить тільки від координати r .

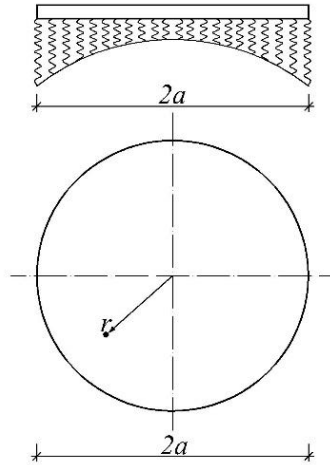


Рисунок 1. Суцільна пластина на змінній пружній основі

Точний розв'язок рівняння (1) повністю визначається наступною формулою [1, 2]:

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r) + C_3 Y_1(r) + C_4 Y_2(r), \quad (2)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – сталі інтегрування, $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n=1, 2$) – визначені фундаментальні розв'язки рівняння (1), причому функції $Y_n(r)$ ($n=1, 2$) містять логарифми. Загалом формула (2) буде придатна для дослідження коливань суцільних та кільцевих пластин. Однак дане дослідження присвячено саме суцільним пластинам, тому із умови скінченності прогину в центрі пластини $r=0$, знаходимо $C_3 = C_4 = 0$. В такому разі замість формули (2) матимемо

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r). \quad (3)$$

Отже, у випадку що розглядається будуть задіяні тільки фундаментальні функції

$$X_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-K)^k \Omega^{2m} \alpha_{n,m,k}(r) \quad (n=1, 2),$$

де $K = a^4 k(a)/D$ – відомий безрозмірний параметр, $\Omega = \sqrt{(a^4 \rho h \omega^2)/D}$ – безрозмірна частота,

$$\alpha_{n,0,0}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \quad (n=1, 2),$$

$$\alpha_{n,m,0}(r) = \frac{1}{(2^{2m}(n+2m-1)!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4m-2} \quad (m=1, 2, 3, \dots),$$

$$\alpha_{n,0,k}(r) = \frac{1}{(p_{n,0,1} p_{n,0,2} K p_{n,0,k})^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+k(s+4)-2} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$\alpha_{n,m,k}(r) = c_{n,m,k} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4(m+k)+ks-2} \quad (m=1, 2, 3, \dots)(k=1, 2, 3, \dots),$$

$$c_{n,0,0} = 1. \quad c_{n,m,0} = \frac{1}{(2^{2m}(n+2m-1)!)^2}, \quad c_{n,0,k} = \frac{1}{(p_{n,0,1} p_{n,0,2} K p_{n,0,k})^2}, \quad c_{n,m,k} = \frac{c_{n,m-1,k} + c_{n,m,k-1}}{p_{n,m,k}^2},$$

$$p_{n,m,k,s} = (2n+4(m+k)+ks-4)(2n+4(m+k)+ks-2).$$

Для реалізації авторського методу (АМ) створено відповідний алгоритм розрахунку, який реалізовано у вигляді програмного коду на Visual Basic for Applications, чим забезпечено можливість параметричного аналізу осесиметричних

коливань пластин на степеневозмінній пружній основі типу Вінклер у програмному режимі.

Приклад. Розглянуто суцільну круглу бетонну пластину жорстко закріплену по контуру з характеристиками: модуль пружності матеріалу $E = 15 ГПа$; коефіцієнт Пуассона $\mu = 1/6$; $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$; $a = 2 \text{ м}$; $h = 0,1 \text{ м}$; $k(a) = 6 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$. Для заданої пластини виконано розрахунки перших п'яти осесиметричних частот коливань для різних значень показника степеня із заданого інтервалу $0 \leq s \leq 3$ з кроком 0,25. Відповідні результати розрахунку АМ наведені в табл. 1.

Таблиця 1

s	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	76,589699	232,965588	512,434350	906,813307	1414,756161
0,25	72,527302	231,857063	511,943731	906,538915	1414,581180
0,5	69,503496	231,093743	511,612155	906,354668	1414,464043
0,75	67,226178	230,541866	511,375005	906,223232	1414,380543
1	65,490879	230,125643	511,197093	906,124722	1414,317971
1,25	64,153616	229,800290	511,058301	906,047936	1414,269219
1,5	63,112035	229,538324	510,946587	905,986212	1414,230070
1,75	62,292578	229,322262	510,854414	905,935382	1414,197881
2	61,641819	229,140606	510,776863	905,892713	1414,170909
2,75	61,120489	228,985538	510,710589	905,856337	1414,147957
3	60,699429	228,851574	510,653237	905,824926	1414,128175

Розглядаючи частоти як функції незалежної змінної s на інтервалі $0 \leq s \leq 3$, а також маючи множину значень цих функцій, апроксимуємо їх поліномами. Вибираючи четвертий степінь апроксимуючого полінома, матимемо наступні аналітичні залежності частот коливань від параметра s та відповідні значення коефіцієнту детермінації R^2 :

$$\omega_1 = 76,5590 - 18,0650s + 9,1480s^2 - 2,4532s^3 + 0,2672s^4, \quad R^2 = 0,9999;$$

$$\omega_2 = 232,9500 - 4,8867s + 2,8012s^2 - 0,8586s^3 + 0,1028s^4, \quad R^2 = 0,9999;$$

$$\omega_3 = 512,4300 - 2,1581s + 1,2674s^2 - 0,3949s^3 + 0,0478s^4, \quad R^2 = 0,9998;$$

$$\omega_4 = 906,8100 - 1,2053s + 0,7120s^2 - 0,2226s^3 + 0,0270s^4, \quad R^2 = 0,9998;$$

$$\omega_5 = 1414,800 - 0,768s + 0,4546s^2 - 0,1422s^3 + 0,0173s^4, \quad R^2 = 0,9998.$$

Наявність цих формул дозволяє обчислювати частоти вільних коливань пластини для будь якого значення параметра s з інтервалу $0 \leq s \leq 3$. З метою верифікації розробленого АМ виконано порівняння результатів розрахунку з відповідними даними, отриманими методом скінченних елементів у програмному комплексі LIRA-FEM. Результати зіставлення продемонстрували добру узгодженість обчислень та підтвердили валідність запропонованого АМ.

Перелік посилань

1. Крутий Ю., Величко Д. Про вільні коливання круглих суцільних та кільцевих пластин на неоднорідній пружній основі Вінклера. *Матеріали I-ї Міжнародної науково-технічної конференції «ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА» присвяченої 80-ти річчю з дня народження професора Ч.В. Пульки*, м. Тернопіль, 6-7 черв. 2024 р., с. 186-188.

2. Крутий Ю.С., Перпері А.О., Величко Д.В. Розрахунок на вільні осесиметричні коливання круглих пластин, що опираються на степеневозмінну пружну основу Вінклера. *Сучасне будівництво та архітектура*. 2025. № 12. С. 51-64.

<https://doi.org/10.31650/2786-6696-2025-12-51-64>