

УДК 517.52/524: 517.58/589

І.Готинчан, канд. фіз.-мат. наук; М.Ленюк, докт. фіз.-мат. наук
Чернівецький факультет Національного технічного університету
"Харківський політехнічний інститут"

**ПІДСУМОВУВАННЯ ОДНІЄЇ СІМ'Ї ФУНКЦІОНАЛЬНИХ
РЯДІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕ-
ТВОРЕННЯ ТИПУ ГАНКЕЛЯ 1-ГО РОДУ – (КОНТОРОВИЧА -
ЛЕБЕДЄВА) 2-ГО РОДУ – ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ**

Методом порівняння розв'язків, побудованих на піввісі з двома точками спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя і Лежандра методом функцій Коші і методом скінченного гібридного інтегрального перетворення підсумовано сім'ю поліпараметричних функціональних рядів

Підсумовування функціональних рядів за функціями Бесселя $J_{\nu,\alpha}(br)$ та $N_{\nu,\alpha}(br)$ на інтервалі (a,b) та на інтервалі (a,b) з однією й двома точками спряження здійснено в роботі [1], а на інтервалі (a,b) з n точками спряження - в роботі [2]. Підсумовування функціональних рядів за функціями Бесселя $C_{\alpha_2}(\lambda r, b)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r, b)$ здійснено в роботах [2], [3]. Підсумовування функціональних рядів за присланими функціями Лежандра знаходимо в роботі [2].

В даній статті здійснено підсумовування функціональних рядів за суперпозицією функцій Бесселя та Лежандра на інтервалі з двома точками спряження.

Розглянемо крайову задачу про побудову обмеженого на множині $I_{12} = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3), R_3 < \infty\}$ розв'язку системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя і Лежандра

$$\begin{aligned} (B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2)u_1(r) &= -g_1(r), & r \in (0, R_1), \\ (B_{\alpha_2} - q_2^2)u_2(r) &= -g_2(r), & r \in (R_1, R_2), \\ (\Lambda_\mu - q_3^2)u_3(r) &= -g_3(r), & r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} (r^{\alpha_1 - \nu} u_1(r)) = 0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3 \right) u_3(r) \Big|_{r=R_3} = g_R \quad (2)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \quad j, k = 1, 2. \quad (3)$$

У рівностях (1) - (3) $q_j \geq 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \cdot \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \cdot \beta_{2j}^k$, $k=1, 2$;

$$B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}, \quad \nu \geq \alpha_1 \geq -\frac{1}{2}, \quad B_{\alpha_2} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2,$$

$$\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{c\theta}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r}, \quad \mu > 0, \quad 2\alpha_2 + 1 > 0, \quad \lambda \in (0, \infty); \quad B_{\nu,\alpha_1}, B_{\alpha_2} -$$

диференціальні оператори Бесселя [4,5], Λ_μ - диференціальний оператор Лежандра для присланих функцій [6].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} - q^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $K_{\nu,\alpha}(qr)$ [4], а для рівняння Бесселя $(B_\alpha - q^2)v = 0$ - функції $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu - q^2)v = 0$ утворюють прислані функції Лежандра $P_{-\frac{\lambda}{2}+q}^\mu(chr)$ і $L_{-\frac{\lambda}{2}+q}^\mu(chr)$ [6].

Навність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1) - (3) методом функцій Коші [7,8]:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= A_1 I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + \int_0^{R_1} E_1(r, \rho) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho, \\ u_2(r) &= A_2 I_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + B_2 K_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r, \rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho, \\ u_3(r) &= A_3 P_{-\frac{\lambda}{2}+q_3}^\mu(chr) + B_3 L_{-\frac{\lambda}{2}+q_3}^\mu(chr) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r, \rho) g_3(\rho) sh \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $E_j(r, \rho)$ - функції Коші:

$$E_j(r, \rho)|_{r=\rho+0} - E_j(r, \rho)|_{r=\rho-0} = 0, \\ \frac{d}{dr} E_j(r, \rho)|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr} E_j(r, \rho)|_{r=\rho-0} = -[\varphi_j(\rho)]^{-1}, \quad (5)$$

$$\varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha_1+1}, \quad \varphi_2(\rho) = \rho^{2\alpha_2-1}, \quad \varphi_3(\rho) = sh\rho.$$

Визначимо функції:

$$\Psi_{\nu, \alpha; jk}^{m*}(qR_m, qr) = U_{\nu, \alpha; jk}^{m1}(qR_m)K_{\nu, \alpha}(qr) - U_{\nu, \alpha; jk}^{m2}(qR_m)I_{\nu, \alpha}(qr), \\ \Delta_{\nu, \alpha; jk}(\lambda R_1, \lambda R_2) = U_{\nu, \alpha; j2}^{11}(\lambda R_1)U_{\nu, \alpha; k1}^{22}(\lambda R_2) - U_{\nu, \alpha; j2}^{12}(\lambda R_1)U_{\nu, \alpha; k1}^{21}(\lambda R_2), \\ F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 2}(chR_2, chr) = Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 21}(chR_2)I_{-\frac{\gamma}{2}+q_3}^{\mu}(chr) - Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 22}(chR_2)P_{-\frac{\gamma}{2}+q_3}^{\mu}(chr), \quad j, k = 1, 2; \\ \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu}(chR_2, chR_3) = Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 21}(chR_2)Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 32}(chR_3) - Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 22}(chR_2)Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 31}(chR_3).$$

Інші величини загальноприйняті [4, 5].

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції:

$$E_1(r, \rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{U_{\nu, \alpha; 11}^{11}(q_1 R_1)} \begin{cases} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r), & 0 < \rho < r < R_1; \end{cases} \\ E_2(r, \rho) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_2, \alpha_2; 11}(\lambda R_1, \lambda R_2)} \begin{cases} \Psi_{q_2, \alpha_2; 12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r) \Psi_{q_2, \alpha_2; 11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Psi_{q_2, \alpha_2; 12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda \rho) \Psi_{q_2, \alpha_2; 11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r), & R_1 < \rho < r < R_2; \end{cases} \\ E_3(r, \rho) = \frac{S_\mu(q_3)}{\Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 12}^{\mu}(chR_2, chR_3)} \times \\ \times \begin{cases} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 12}^{\mu, 2}(chR_2, chr) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 3}(chR_2, ch\rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 12}^{\mu, 2}(chR_2, ch\rho) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 3}(chR_2, chr), & R_2 < \rho < r < R_3, \end{cases} \\ S_\mu(q_3) = 2^{-1} \pi \Gamma(\frac{\gamma}{2} + q_3 - \mu) (\Gamma(\frac{\gamma}{2} + q_3 + \mu))^{-1}.$$

Умови спряження (3) і крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин A_j ($j = \overline{1, 3}$) і B_k ($k = 2, 3$) дають алгебраїчну систему:

$$U_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(q_1 R_1) A_1 - U_{q_2, \alpha_2; j2}^{11}(\lambda R_1) A_2 - U_{q_2, \alpha_2; j2}^{12}(\lambda R_1) B_2 = \delta_{j2} (G_{12} + \omega_{21}) + \delta_{j1} \omega_{11}, \\ U_{q_2, \alpha_2; j1}^{21}(\lambda R_2) A_2 + U_{q_2, \alpha_2; j1}^{22}(\lambda R_2) B_2 - Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 21}(chR_2) A_3 - Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; j2}^{\mu, 22}(chR_2) B_3 = \\ = \delta_{j2} (G_{23} + \omega_{22}) + \delta_{j1} \omega_{12}, \\ Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 31}(chR_3) A_3 + Z_{-\frac{\gamma}{2}+q_3; 22}^{\mu, 33}(chR_3) B_3 = g_R, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

У системі (6) беруть участь символ Кронекера δ_{jk} та функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_0^{R_1} \frac{I_{\nu,\alpha_1}(q_1 \rho)}{U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1)} g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho - \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{q_2,\alpha_2;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)} g_1(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho,$$

$$G_{23} = \frac{c_{21}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{q_2,\alpha_2;12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda \rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1, \lambda R_2)} g_1(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho - \frac{c_{22}}{sh R_2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(ch R_3, ch \rho)}{\Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu}(ch R_2, ch R_3)} g_3(\rho) sh \rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: визначник алгебраїчної системи (6)

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q) \equiv A_{\nu,(\alpha);2}(q) \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu}(ch R_2, ch R_3) - A_{\nu,(\alpha);1}(q) \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu}(ch R_2, ch R_3) =$$

$$= U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1) B_{\alpha_2,\mu;2}(q) - U_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(q_1 R_1) B_{\alpha_2,\mu;1}(q) \neq 0. \quad (7)$$

Тут прийняті позначення: $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$,

$$A_{\nu,(\alpha);j}(q) = U_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(q_1 R_1) \Delta_{q_2,\alpha_2;j}(\lambda R_1, \lambda R_2) - U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1) \Delta_{q_2,\alpha_2;2j}(\lambda R_1, \lambda R_2), \quad j = 1, 2;$$

$$B_{\alpha_2,\mu;j}(q) = \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu}(ch R_2, ch R_3) \Delta_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda R_1, \lambda R_2) - \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu}(ch R_2, ch R_3) \Delta_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_2, \lambda R_3).$$

Визначимо: 1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);31}^{\mu}(r, q) = \frac{c_{21}}{\lambda^2 \alpha_2 R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{c_{22}}{sh R_2 S_{\mu}(q_3)} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r),$$

$$W_{\nu,(\alpha);32}^{\mu}(r, q) = \frac{c_{22}}{sh R_2 S_{\mu}(q_3)} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \Theta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, q), \quad (8)$$

$$\Theta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, q) = U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1) \Psi_{q_2,\alpha_2;22}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r) - U_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(q_1 R_1) \Psi_{q_2,\alpha_2;12}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r).$$

$$W_{\nu,(\alpha);33}^{\mu}(r, q) = \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \left[A_{\nu,(\alpha);2}(q) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu,2}(ch R_2, chr) - A_{\nu,(\alpha);1}(q) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,2}(ch R_2, chr) \right];$$

2) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\nu,(\alpha);11}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \left\{ I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) \left[B_{\alpha_2,\mu;2}(q) \Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho) - \right. \right.$$

$$\left. - B_{\alpha_2,\mu;1}(q) \Psi_{\nu,\alpha_1;21}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho) \right\} \quad 0 < r < \rho < R_1,$$

$$\left. - B_{\alpha_2,\mu;1}(q) \Psi_{\nu,\alpha_1;21}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r) \right\} \quad 0 < \rho < r < R_1;$$

$$H_{\nu,(\alpha);12}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) \Theta_{\mu,\alpha_2}^{\mu}(\rho, q);$$

$$\Theta_{\mu,\alpha_2}^{\mu}(r, q) = \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,22}(ch R_2, ch R_3) \Psi_{q_2,\alpha_2;11}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r) - \Delta_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu,22}(ch R_2, ch R_3) \Psi_{q_2,\alpha_2;21}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r);$$

$$H_{\nu,(\alpha);13}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{21}c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1} shR_2} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, ch\rho),$$

$$H_{\nu,(\alpha);21}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) \Theta_{\mu, \alpha_2}(r, q); \quad (9)$$

$$H_{\nu,(\alpha);22}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \begin{cases} \Theta_{\nu,(\alpha)}(r, q) \Theta_{\mu, \alpha_2}(\rho, q), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Theta_{\nu,(\alpha)}(\rho, q) \Theta_{\mu, \alpha_2}(r, q), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases}$$

$$H_{\nu,(\alpha);23}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{22}}{shR_2} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, ch\rho) \Theta_{\nu,(\alpha)}(r, q);$$

$$H_{\nu,(\alpha);31}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{11}c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_1+1} R_2^{2\alpha_2+1} shR_2} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, chr),$$

$$H_{\nu,(\alpha);32}^{\mu}(r, \rho, q) = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, chr) \Theta_{\nu,(\alpha)}(\rho, q);$$

$$H_{\nu,(\alpha);33}^{\mu}(r, \rho, q) = S_{\mu}(q_3) \begin{cases} W_{\nu,(\alpha);33}^{\mu}(r, q) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, ch\rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ W_{\nu,(\alpha);33}^{\mu}(\rho, q) F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_3, chr), & R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases}$$

3) породженні неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);11}^{\mu,1}(r, q) = \frac{B_{\alpha_2, \mu;2}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r), \quad \mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);21}^{\mu,1}(r, q) = -\frac{B_{\alpha_2, \mu;1}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);12}^{\mu,1}(r, q) = \frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu}(chR_2, chR_3)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);22}^{\mu,1}(r, q) = -\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;12}^{\mu}(chR_2, chR_3)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);11}^{\mu,2}(r, q) = -\frac{U_{\nu, \alpha_1;21}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \Theta_{\nu, \alpha_2}(r, q), \quad \mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);21}^{\mu,2}(r, q) = \frac{U_{\nu, \alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \Theta_{\nu, \alpha_2}(r, q),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);12}^{\mu,2}(r, q) = \frac{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu}(chR_2, chR_3)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \Theta_{\nu,(\alpha)}(r, q),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);22}^{\mu,2}(r, q) = -\frac{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu}(chR_2, chR_3)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} \Theta_{\nu,(\alpha)}(r, q),$$

$$\mathfrak{H}_{\nu,(\alpha);11}^{\mu,3}(r, q) = -\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{U_{\nu, \alpha_1;21}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{\gamma}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(chR_2, chr),$$

$$\Re_{\nu,(\alpha);21}^{\mu,3}(r,q) = \frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{1}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(ch R_2, chr),$$

$$\Re_{\nu,(\alpha);12}^{\mu,3}(r,q) = \frac{A_{\nu,(\alpha);2}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{1}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(ch R_2, chr),$$

$$\Re_{\nu,(\alpha);22}^{\mu,3}(r,q) = -\frac{A_{\nu,(\alpha);1}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(q)} F_{-\frac{1}{2}+q_3;22}^{\mu,3}(ch R_2, chr).$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (6) і підстановки одержаних значень A_j ($j=1,2$) та B_k ($k=2,3$) у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) - (3):

$$u_j(r) = \int_0^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}^{\mu}(r, \rho, q) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\nu,(\alpha);j2}^{\mu}(r, \rho, q) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + \\ + \int_{R_2}^{R_3} H_{\nu,(\alpha);j3}^{\mu}(r, \rho, q) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_3-1} d\rho + W_{\nu,(\alpha);j3}^{\mu}(r, q) g_R + \sum_{i,k=1}^2 \Re_{\nu,(\alpha);jk}^{\mu,j}(r, q) \omega_{ik}; \quad j = \overline{1,3}. \quad (10)$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1) - (2) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_{12} гібридним диференціальним оператором

$$M_{\nu,(\alpha)}^{\mu} = \theta(r)\theta(R_1-r)B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_2} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\Lambda_{\mu}, \quad (11)$$

де $\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда [8].

Диференціальний оператор $M_{\nu,(\alpha)}^{\mu}$ самоспряжений і не має жодної особливості точки на множині I_{12} . Тому спектр його дійсний і дискретний.

З метою побудови спектра і відповідної йому спектральної вектор-функції оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{\mu}$ розглянемо спектральну задачу Штурма - Ліувілля: побудувати обмежений нснулловий розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя та Лежандра для звичайних функцій

$$\begin{aligned} (B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2) V_{\nu,(\alpha);1}^{\mu}(r, \beta) &= 0, & r \in (0, R_1), \\ (B_{\alpha_2} + b_2^2) V_{\nu,(\alpha);2}^{\mu}(r, \beta) &= 0, & r \in (R_1, R_2), \\ (\Lambda_{\mu} + b_3^2) V_{\nu,(\alpha);3}^{\mu}(r, \beta) &= 0, & r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (12)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} (r^{\alpha_1-\nu} V_{\nu,(\alpha);1}^{\mu}(r, \beta)) = 0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3 \right) V_{\nu,(\alpha);3}^{\mu}(r, \beta) |_{r=R_3} = 0 \quad (13)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) V_{\nu,(\alpha);k}^{\mu}(r, \beta) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) V_{\nu,(\alpha);k+1}^{\mu}(r, \beta) \right] |_{r=R_k} = 0, \quad j, k = \overline{1,2}. \quad (14)$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} + b^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(br)$ та $N_{\nu,\alpha}(br)$ [4], а для рівняння

Бесселя $(B_{\alpha_2} + b^2)v = 0$ - функції $C_{\alpha_2}(\lambda r, b)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r, b)$ [2]. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu + b^2)v = 0$ утворюють функції $A_{-\gamma_2+ib}^\mu(chr)$ та $B_{-\gamma_2+ib}^\mu(chr)$ [6].

Якщо покласти

$$V_{v,(\alpha);1}^\mu(r, \beta) = A_1 J_{v, \alpha_1}(b_1 r),$$

$$V_{v,(\alpha);2}^\mu(r, \beta) = A_2 C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2) + B_2 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2),$$

$$V_{v,(\alpha);3}^\mu(r, \beta) = A_3 A_{-\gamma_2+ib_3}^\mu(chr) + B_3 B_{-\gamma_2+ib_3}^\mu(chr),$$

то умови спряження (14) і крайова умова в точці $r = R_3$ дають алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned} U_{v,(\alpha);j1}^{11}(b_1 r) A_1 - X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2) A_2 - X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2) B_2 &= 0, \quad j=1,2 \\ X_{\alpha_2;j1}^{21}(\lambda R_2, b_2) A_2 + X_{\alpha_2;j1}^{22}(\lambda R_1, b_2) B_2 - Y_{-\gamma_2+ib_3;j2}^{\mu,21}(ch R_2) A_3 - Y_{-\gamma_2+ib_3;j2}^{\mu,22}(ch R_2) B_3 &= 0, \quad (15) \\ Y_{-\gamma_2+ib_3;22}^{\mu,31}(ch R_3) A_3 + Y_{-\gamma_2+ib_3;22}^{\mu,32}(ch R_3) B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Алгебраїчна система (15) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли визначник системи

$$\delta_{v,(\alpha)}^\mu(\beta) = a_{v,(\alpha);2}(\beta) \delta_{-\gamma_2+ib_3;12}^\mu(ch R_2, ch R_3) - a_{v,(\alpha);1}(\beta) \delta_{-\gamma_2+ib_3;22}^\mu(ch R_2, ch R_3) = 0. \quad (16)$$

Тут беруть участь функції:

$$\begin{aligned} a_{v,(\alpha);j}(\beta) &= u_{v,(\alpha);j1}^{11}(b_1 R_1) \delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2) - u_{v,(\alpha);j1}^{11}(b_1 R_1) \delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2), \\ \delta_{-\gamma_2+ib_3;j2}^\mu(ch R_2, ch R_3) &= Y_{-\gamma_2+ib_3;j2}^{\mu,21}(ch R_2) Y_{-\gamma_2+ib_3;22}^{\mu,32}(ch R_3) - Y_{-\gamma_2+ib_3;j2}^{\mu,22}(ch R_2) Y_{-\gamma_2+ib_3;22}^{\mu,31}(ch R_3), \\ \delta_{\alpha_2;jk}(\lambda R_1, \lambda R_2, b_2) &= X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2) X_{\alpha_2;k1}^{22}(\lambda R_2, b_2) - X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2) X_{\alpha_2;k1}^{21}(\lambda R_2, b_2). \end{aligned}$$

Всі інші величини загальноприйняті [4,5,6].

Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{v,(\alpha)}^\mu(\beta) = 0$ утворюють дискретний спектр [6]: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$; їх модулі складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (15) при $\beta = \beta_n$ маємо:

$$\begin{aligned} V_{v,(\alpha);1}^\mu(r, \beta_n) &= \frac{c_{21} c_{22} \text{sh} \pi b_{2n}}{\pi \lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1} \text{sh} R_2} S_\mu^*(b_{3n}) J_{v, \alpha_1}(b_{1n} r), \\ V_{v,(\alpha);2}^\mu(r, \beta_n) &= \frac{c_{22}}{\text{sh} R_2} S_\mu^*(b_{3n}) [u_{v,(\alpha);11}^{11}(b_{1n} R_1) \Psi_{\alpha_2;22}^1(\lambda R_1, \lambda r, b_{2n}) - u_{v,(\alpha);21}^{11}(b_{1n} R_1) \Psi_{\alpha_2;12}^1(\lambda R_1, \lambda r, b_{2n})], \\ V_{v,(\alpha);3}^\mu(r, \beta_n) &= a_{v,(\alpha);2}(\beta_n) f_{-\gamma_2+ib_3;12}^{\mu,2}(ch R_2, chr) - a_{v,(\alpha);1}(\beta_n) f_{-\gamma_2+ib_3;22}^{\mu,2}(ch R_2, chr). \quad (17) \end{aligned}$$

У рівностях (17) беруть участь функції:

$$S_{\mu}^*(b_{3n}) = \frac{2}{\pi^2} ch\pi b_{3n} |\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + ib_{3n})|^2;$$

$$\Psi_{\alpha_2, j2}^1(\lambda R_1, \lambda r, b_{2n}) = X_{\alpha_2, j2}^{11}(\lambda R_1, b_{2n}) D_{\alpha_2}(\lambda r, b_{2n}) - X_{\alpha_2, j2}^{12}(\lambda R_1, b_{2n}) C_{\alpha_2}(\lambda r, b_{2n}),$$

$$f_{-\frac{1}{2}+ib_{3n}, j2}^{\mu, 2}(chR_3, chr) = Y_{-\frac{1}{2}+ib_{3n}, j2}^{\mu, 21}(chR_2) B_{-\frac{1}{2}+ib_{3n}}^{\mu}(chr) - Y_{-\frac{1}{2}+ib_{3n}, j2}^{\mu, 22}(chR_2) A_{-\frac{1}{2}+ib_{3n}}^{\mu}(chr);$$

$$b_{jn} = (\beta_n^2 + k_j^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k_j^2 \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Згідно з роботою [2] маємо твердження.

Теорема (про зображення). *Будь-яка вектор-функція $g(r)$ з області визначення оператора $M_{v,(\alpha)}^{\mu}$ зображається абсолютно і рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою власних вектор-функцій*

$$\left\{ V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=1}^3 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) V_{v,(\alpha),k}^{\mu}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho) V_{v,(\alpha)}^{\mu}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)}{\|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2}. \quad (18)$$

Ряд Фур'є (18) визначає пряме $H_{v,(\alpha)}^{\mu}$ і обернене $H_{v,(\alpha)}^{-\mu}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го - (Конторовича - Лебєдєва) 2-го роду - Лежандра 2-го роду:

$$H_{v,(\alpha)}^{\mu}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n = \sum_{k=1}^3 \tilde{g}_{nk}, \quad (19)$$

$$H_{v,(\alpha)}^{-\mu}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)}{\|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2} \equiv g(r). \quad (20)$$

Побудований за відомою логічною схемою [9] методом запровадженого формулами (19), (20) інтегрального перетворення єдиний розв'язок крайової задачі (1) - (3) має структуру:

$$u_j(r) = shR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{v,(\alpha),j}^{\mu}(r, \beta_n) V_{v,(\alpha),3}^{\mu}(R_3, \beta_n)}{\alpha_{22}^3 (\beta_n^2 + q_1^2) \|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2} g_R +$$

$$+ \sum_{m=1}^3 \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{v,(\alpha),j}^{\mu}(r, \beta_n) V_{v,(\alpha),m}^{\mu}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2} \right) g_m(\rho) \sigma_m \varphi_m(\rho) d\rho +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 a_k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{v,(\alpha),12}^{\mu,k}(\beta_n) V_{v,(\alpha),j}^{\mu}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2} \omega_{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{v,(\alpha),22}^{\mu,k}(\beta_n) V_{v,(\alpha),j}^{\mu}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \|V_{v,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)\|^2} \omega_{1k} \right], \quad j = \overline{1, 3},$$

де $u_k = \sigma_k R_k^{2\alpha_k+1}$, $R_0 = 0$, $Z_{v,(\alpha),j2}^{\mu,k}(\beta_n) = \left(\alpha_{12}^k \frac{d}{dr} + \beta_{12}^k \right) V_{v,(\alpha),k+1}^{\mu}(r, \beta_n) |_{r=R_k}$.

Порівнюючи розв'язки (10) і (21) в силу єдиності, маємо формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\nu,(\alpha);j}^{\mu}(r, \beta_n) V_{\nu,(\alpha);3}^{\mu}(R_3, \beta_n)}{\alpha_{22}^3 (\beta_n^2 + q_1^2) \left\| V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \right\|^2} = \frac{1}{sh R_3} W_{\nu,(\alpha);3j}^{\mu}(r, q), \quad j = \overline{1,3}, \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\nu,(\alpha);j}^{\mu}(r, \beta_n) V_{\nu,(\alpha);k}^{\mu}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \left\| V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \right\|^2} = \frac{1}{\sigma_k} H_{\nu,(\alpha);jk}^{\mu}(r, \beta, q), \quad j, k = \overline{1,3}, \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\nu,(\alpha);12}^{\mu,k}(\beta_n) V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \left\| V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \right\|^2} = \frac{c_{1k}}{a_k} \mathfrak{R}_{\nu,(\alpha);2k}^{\mu,j}(r, q), \quad k = 1, 2, j = \overline{1,3}, \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\nu,(\alpha);22}^{\mu,k}(\beta_n) V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_1^2) \left\| V_{\nu,(\alpha)}^{\mu}(r, \beta_n) \right\|^2} = -\frac{c_{1k}}{a_k} \mathfrak{R}_{\nu,(\alpha);1k}^{\mu,j}(r, q), \quad k = 1, 2, j = \overline{1,3}, \quad (25)$$

$$\sigma_1 = \frac{c_{11} c_{12} R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21} c_{22} R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{sh R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{sh R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_3 = 1, \quad q_1^2 = \max\{q_1^2, q_2^2, q_3^2\}.$$

Основна теорема: Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)], B_{\alpha_2}[g_2(r)], \Lambda_{\mu}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_{12} , а вектор-функція $g(r)$ задовольняє крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (7) однозначної розв'язності крайової задачі (1) - (3), то справджуються формули (22)-(25) підсумовування поліпараметричних функційно-нальних рядів за власними функціями оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{\mu}$.

Результати роботи поповнюють довідкову математичну літературу і можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними функціями гібридних диференціальних операторів, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

The family of polyparametrical functional sequences was summarized by means of comparison of solutions, built on the two-conjugation points semiaxis for the separate system of the modified differential Bessel and Legendre equations by means of Koshier functions and the method of non- suspended hybrid integral transformation.

Література

1. Блажівський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінчених гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том I. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. - 167 с.
2. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку - Чернівці: Прут, 2001. - 228 с.
3. Блажівський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінчених гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том II. - Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. - 168 с.
4. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 61 с. - (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Ленюк М.П., Михалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Контуровича - Лебедєва. - Чернівці: Прут, 2002. - 280 с.
6. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. - Львов, 1989. - 60 с. - (Препринт/АН УССР. Ин-т прикладных проблем механики и математики; 89.0).
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328 с.
9. Блажівський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінчених гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том III. - Чернівці: Прут, 2002. - 264 с.

Одержано 03.09.2003 р.