УДК 550.386,<<52>>:519.216

О.Маєвський; М.Приймак, докт.техн.наук; Л.Щербак, докт.техн.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ТА СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗБУРЕНЬ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ З ВРАХУВАННЯМ ЇХ ДОБОВОЇ СТОХАСТИЧНОЇ ПЕРІОДИЧНОСТІ

Обґрунтовано математичну модель магнітних збурень, яка враховує їх стохастичну періодичність, викликану добовим обертанням Землі навколо своєї осі, та фізику утворення цієї періодичності. Наведено оцінки періодичного математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення магнітних збурень, які підтверджують їх стохастичну періодичність та адекватність моделі.

Вступ Центральну роль в існуванні всього живого на Землі відіграє Сонце. Тому цілком закономірно, що перед людством протягом всієї його свідомої діяльності поставали найрізноманітніші питання, які стосуються багатьох аспектів Сонця. Один із них – це медичний, пов'язаний із значним впливом деяких факторів Сонця на психофізичний стан людей. В зв'язку із зростаючим погіршенням екологічного стану навколишнього середовища цей вплив в останні роки стає все відчутнішим. Як свідчать багаточисельні дослідження, особливо медичного напрямку, до найбільш впливових на стан людини факторів належать магнітні бурі, джерелом яких є певні процеси, що відбуваються на Сонці. На питанні щодо причин виникнення магнітних бур зупинимось більш детально [1,2,3].

Вся енергія, яка використовується на Землі, випромінюється Сонцем. Основна частина цієї енергії поступає у вигляді електромагнітних хвиль або, як часто говорять, у вигляді світла. Однак Сонце випромінює не тільки світло, але і заряджені частинки, які випаровуються із Сонця подібно до газу. В технічній літературі цей потік газу (заряджених частинок) дістав назву *сонячного вітру*.

Сонячний вітер існує завжди. Але час від часу на Сонці відбуваються вибухові процеси або *сонячні спалахи*. В періоди вибухів підсилюється в багато разів сонячне випромінювання на різних частотах, наступають періоди так званої *максимальної сонячної активності*. Місця на Сонці, де відбуваються сонячні спалахи, мають вигляд темних плям неправильної форми і дістали назву *сонячних плям*.

Під час сонячних спалахів також значно збільшується потік заряджених частинок. Через певний час (12-24 год.) потік цих частинок досягає орбіти Землі. Обтікання магнітосфери Землі плазмою сонячного вітру із змінною щільністю і швидкістю заряджених частинок, а також проникнення цих частинок в магнітосферу в кінцевому стані призводить до сильного її збурення (стиснення), що проявляється в збільшенні напруженості магнітного поля Землі. Такого роду сильні збурення магнітосфери називають ще *магнітними бурями*, іноді світовими магнітними бурями, тому що їх реєструють магнетометри всього світу. Нагадаємо [4], що для прикладних досліджень магнітні бурі зручно вимірювати в ***балах***, які є інтегральним показником і характеризують відхилення магнітного поля від норми за певний проміжок часу (наприклад, за тригодинні інтервали): чим більше відхилення, тим більше балів має магнітне поле. Цей показник магнітного поля в балах ще називають **К–індексом** або **Кр–індексом**.

В медицині вже давно помічено, що під час магнітних бур значно збільшується кількість захворювань, особливо серцево-судинних. Тому для медичних служб важливо вміти оцінювати кореляційні і регресійні зв'язки між інтенсивністю магнітних бур та кількістю захворювань, а також проводити на цій основі розрахунок прогнозних значень кількості захворювань в залежності від прогнозу магнітних бур, оскільки останній вираховується з великою достовірністю на багато днів наперед.

Однак вирішення цих і багатьох інших питань викликає значні труднощі. Головна причина в тому, що магнітні бурі, як і більшість природних процесів в навколишньому світі, мають випадковий характер. Більше того, спостереження за магнітними бурями показують, що їх характерною особливістю є стохастична періодичність. Щоб пересвідчитися в цьому, розглянемо наведений на рис. 1 графік значень магнітних бур за 8 днів липня 2002 року з кроком дискретизації $\Delta t = 3$ год. [4].

Розміщені в таблиці 1 результати попереднього аналізу магнітних бур показують приблизну повторюваність значень магнітних бур з періодом $T = 24$ *год*. Максимальні значення магнітні бурі переважно приймають в вечірні і нічні години (приблизно з 20-ї години вечора до 3-ї – 6-ї години ранку), мінімальні значення в основному припадають на денні години (з 8-ї – 9-ї години до 13-ї – 18-ї години). Таку поведінку магнітних бур, коли одночасно має місце випадковість і повторюваність, називають *стохастичною періодичністю* (іноді ритмічністю або циклічністю).

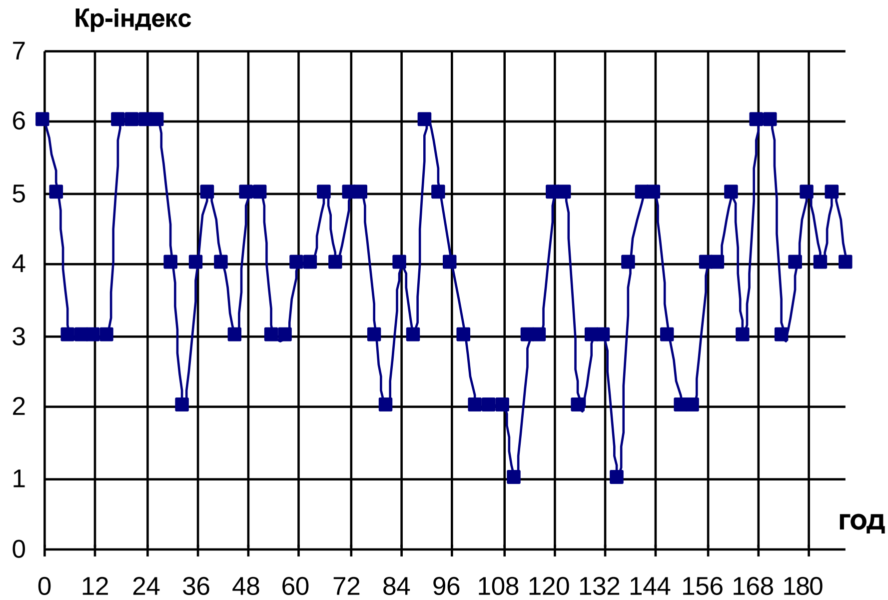

Рис. 1. Значення магнітних збурень за 8 днів липня 2002 року

Таблиця 1

Години максимальних і мінімальних значень магнітних збурень в липні 2002 року (20-27 липня)

Число	Години максимальних значень		Години мінімальних значень
20	0-3	20-24	9-18
21	0-6	-	9-15
22	1-6	20-24	8-14
23	0-6	20-24	9-13
24	0-3	20-24	8-18
25	0-6	21-24	8-18
26	0-3	20	8-13
27	1-6	15, 20	8-12

Спостереження за магнітними бурями на більш тривалих інтервалах часу (десятки, сотні років) показують [1,5,6], що для них має місце також стохастична періодичність, пов’язана із періодом обертання Місяця навколо Землі ($T \approx 28.4$ днів) та стохастична періодичність з періодом $T \approx 11.5$ року. В цьому зв’язку можна відзначити, що аналогічним прикладом складної стохастичної періодичності є морське хвилювання [7], де на фоні одних хвиль з порівняно великими випадковими періодами і амплітудами спостерігаються інші хвилі з меншими, теж випадковими періодами і амплітудами. На їх фоні – ще інші хвилі і т.д.

Але щоб результати досліджень магнітних збурень були науково обґрунтованими, перш за все необхідно побудувати їх модель, оскільки тільки на базі моделі можливо розробляти методи аналізу та прогнозу магнітних збурень, їх імітаційного моделювання.

Мета роботи - побудова конструктивної моделі магнітних збурень, яка б враховувала не тільки їх стохастичну періодичність, але і причини її виникнення, та оцінка на основі моделі періодичних ймовірнісних характеристик магнітних бур.

Ідея враховувати моделі сигналу його стохастичну періодичність належить Є.Є. Слуцькому [7]. На даний час існує декілька класів випадкових процесів, які в тій чи іншій мірі враховують стохастичну періодичність сигналів і можуть бути вибрані в якості моделі магнітних бур. Насамперед це періодичні [7,8] та періодично корельовані [9] випадкові процеси, які визначаються наступним чином.

Випадковий процес $\{\xi(t),\ t\in(-\infty,\infty)\}$ називається періодичним (за Слуцьким), якщо для довільного цілого $n\geq 1$ та довільних $t_1,...,t_n,x_1,...,x_n$ його багатовимірна функція розподілу є періодичною по сукупності аргументів (по всіх аргументах одночасно), тобто

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,...,\xi(t_n)<x_n\}=F(x_1,...,x_n;t_1+T,...,t_n+T).$$

В прикладних дослідженнях для опису ритмічних сигналів широко використовуються періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП), для яких періодичними є лише їх перші дві моментні функції – математичне сподівання і кореляційна функція:

$$\mathrm{M}\xi(t)=\mathrm{M}\xi(t+T),\ R(t_1,t_2)=\mathrm{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right\}=R(t_1+T,t_2+T),$$

де $\overset{\circ}{\xi}=\xi(t)-\mathrm{M}\xi(t)$. Як наслідок, для цих процесів періодичною буде також дисперсія:

$$D\xi(t)=D\xi(t+T).$$

Важливо наголосити, що хоча періодичні і ПКВП виділені із множини нестаціонарних процесів, тим не менше для них розроблені статистичні методи, які дозволяють знаходити оцінки їх періодичних ймовірнісних характеристик, використовуючи для цього лише одну реалізацію [10,11,13]. Разом з тим ці процеси мають суттєвий недолік, який полягає в тому, що вони є описовими, тобто лише постулюють стохастичну періодичність, не розкриваючи механізму та причин її виникнення. Тому ще необхідна перевірка правильності вибору (адекватності) цих процесів як моделей стохастичних періодичних сигналів.

В останній час при обґрунтуванні моделей стохастично періодичних сигналів, які згідно з фізикою їх утворення мають *імпульсний характер*, використовують лінійний випадковий процес [12]

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\eta(\tau),\qquad(1)$$

де при кожному фіксованому t невипадкова функція (ядро) $\varphi(\tau,t)\in L_2(-\infty,\infty)$ і є імпульсною характеристикою лінійної системи, $\{\eta(\tau),\tau(-\infty,\infty)\}$ - випадковий процес з незалежними періодичним приростами (породжуючий процес).

В [13,14] показано, що якщо в (1) ядро $\varphi(\tau,t)=\varphi(t-\tau)$, тобто система є стаціонарною, а $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними періодичними приростами, то лінійний випадковий процес

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)d\eta(\tau) \tag{2}$$

буде періодичним (за Слуцьким). З допомогою лінійного періодичного випадкового процесу (2) обґрунтовані моделі ряду стохастично періодичних сигналів, які за своєю природою мають імпульсний характер, зокрема, обґрунтовані моделі енергонавантажень [13,14], шумів кавітації [14], магнітних шумів феромагнетиків при їх циклічному перемагнічуванні [14].

Із перерахованих вище випадкових процесів найбільш зручними для теоретичних і прикладних досліджень виявляються лінійні періодичні випадкові процеси, оскільки вони дозволяють врахувати не тільки стохастичну періодичність, але і механізм, причини її виникнення. Саме це ми використаємо при обґрунтуванні моделі магнітних бур, які з точки зору фізики їх утворення є векторними випадковими полями імпульсного характеру.

Побудова моделі магнітних збурень. Розглянемо окремо заряджену частинку ω_k сонячного вітру, яка несе на собі одиничний заряд, рухається з деякою постійною швидкістю $\bar{v}=(v_x,v_y,v_z)$ і в момент часу τ_k знаходиться в точці $\bar{x}_k=(x_k,y_k,z_k)$. Оскільки будь-який рухомий заряд утворює навколо себе векторне магнітне поле, то магнітне поле, утворене частинкою ω_k, яке спостерігається в точці $\bar{y}=(x,y,z)$ в момент часу t позначимо через $\bar{\varphi}(\bar{x}_k,\bar{y};\tau_k,t)$.

Будемо вважати, що магнітосфера Землі є лінійною, тобто для неї виконується принцип суперпозиції. Оскільки магнітні збурення утворюється багатьма рухомими зарядженими частинками сонячного вітру, незалежними між собою, то на основі теореми про накладання випадкових збурень [15] модель магнітної бурі можемо записати у вигляді суми

$$\bar{\xi}(\bar{y},t)=\sum_{k:\tau_k\le t}\alpha_k\bar{\varphi}(\bar{x}_k,\bar{y};\tau_k,t), \tag{3}$$

де α_k - вагові коефіцієнти, які пропорційні зарядам, що їх несе кожна із елементарних частинок ω_k.

Останній вираз (3) можна записати в іншому вигляді, якщо ввести випадкове з незалежними приростами поле $\eta(\bar{x};\tau)$, $\bar{x}=(x,y,z)$, яке описує заряджені частинки сонячного вітру. Це поле терпить стрибки в тих точках $\bar{x}_k$ і в ті моменти часу τ_k, де і коли знаходяться заряджені частинки сонячного вітру, причому величини стрибків рівні α_k, тобто рівні величинам зарядів частинок ω_k. При зроблених зауваженнях модель магнітної бурі можна записати у вигляді стохастичного інтегралу

$$\bar{\xi}(\bar{y},t)=\int_R\int_V\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y};\tau,t)d\eta(\bar{x},\tau), \tag{4}$$

де V - область в тривимірному просторі R^3; R - вісь часу, причому для кожного фіксованого $\bar{y}$ та фіксованому t $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y};\tau,t)\in L_2(V\times R)$, тобто модуль векторного поля $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y};\tau,t)$ інтегрований в квадраті в просторі $V\times R$:

$$\int_R\int_V\left|\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y};\tau,t)\right|^2 d\tau dv=\int_R\int_V\left|\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y};\tau,t)\right|^2 d\tau dxdydz\le\infty .$$

Векторне поле $\varphi(\bar{x},\bar{y};\tau,t)$ в (4) називається імпульсним перехідним полем або імпульсною реакцією в точці $\bar{y}\in R^3$ в момент часу t на збурення у вигляді δ-імпульсу, яке виникло в момент часу $\tau<t$ в точці $\bar{x}\in R^3$. Випадкове поле $\eta(\bar{x},\tau)$ називається породжуючим.

Будемо тепер вважати, що, крім лінійності, магнітосфера є однорідним полем (в просторі) і стаціонарним (в часі), тобто імпульсна реакція $\varphi(\bar{x},\bar{y};\tau,t)=\varphi(\bar{y}-\bar{x};t-\tau)$. В цьому випадку модель магнітних бур набуває вигляду

$$\bar{\xi}(\bar{y},t)=\int_R\int_V\varphi(\bar{y}-\bar{x};t-\tau)d\eta(\bar{x},\tau). \tag{5}$$

Врахування в моделі магнітних збурень їх добової стохастичної періодичності. Зупинимося тепер на питанні, яким чином в моделі (5) врахувати стохастичну періодичність магнітних збурень, пов’язану з періодом обертання Землі навколо своєї осі. Як відомо [1-3], магнітосфера Землі є несферичною. Вона сильно витягується в бік, протилежний до Сонця. З денного боку потік плазми сонячного вітру стискає геомагнітне поле, спотворюючи його дипольний характер, на нічному боці силові лінії магнітного поля витягуються в протяжний магнітний хвіст.

Ґрунтуючись на цьому факті, можна стверджувати, що в фіксований момент часу τ сонячний вітер в різних точках магнітосфери Землі має різну інтенсивність, тобто є неоднорідним. Оскільки цю неоднорідність кожна із фіксованих точок $\bar{y}$, що фігурує в моделі (5) і в якій може бути розміщений магнітометр, перетинає періодично з періодом $T=24$ год., то це дає підставу вважати випадкове поле $\eta(\tau;\bar{x})$ в (5) полем з незалежними періодичними (з цим же періодом $T=24$ год.) приростами по аргументу τ. Згідно з [14], це означає, що періодичною по τ є функція розподілу приростів $\Delta_\Pi\eta(\bar{x},\tau)$ цього поля, тобто

$$F_\Pi(A;\bar{x},\tau)=\mathrm{P}\{\Delta_\Pi\eta(\bar{x},\tau)\in A\}=\mathrm{P}\{\Delta_\Pi\eta(\bar{x},\tau+T)\in A\}=F_\Pi(A;\bar{x},\tau). \tag{6}$$

В останньому виразі Π - напіввідкритий прямокутник:

$$\Pi=\{\bar{a}<x\le\bar{b},\tau_1<\tau\le\tau_2\}=\{x,y,z,\tau:a_1<x\le b_1,a_2<x\le b_2,a_3<x\le b_3,\tau_1<\tau\le\tau_2\};$$

прирости поля $\Delta_\Pi\eta(\bar{x},\tau)=\Delta_{(a_1,b_1)}\Delta_{(a_2,b_2)}\Delta_{(a_3,b_3)}\Delta_{(\tau_1,\tau_2)}\eta(\bar{x},\tau)$, де різницевий оператор $\Delta_{(\tau_1,\tau_2)}\eta(\bar{x},\tau)=\Delta_{(\tau_1,\tau_2)}\eta(x,y,z,\tau)=\eta(x,y,z,\tau_2)-\eta(x,y,z,\tau_1)$, різницеві оператори $\Delta_{(a_1,b_1)}$, $\Delta_{(a_2,b_2)}$, $\Delta_{(a_3,b_3)}$ визначаються аналогічно і діють послідовно один за одним, A - борелівська подія.

Повертаючись до випадкового поля (5) як моделі магнітних бур, сформулюємо теорему, яка має місце при виконанні умови (6).

Теорема. Якщо для лінійного випадкового поля

$$\bar{\xi}(\bar{y},t)=\int_R\int_V\varphi(\bar{y}-\bar{x};t-\tau)d\eta(\bar{x},\tau) \tag{5}$$

його породжуюче поле $\eta(\bar{x},\tau)$ є полем з незалежними періодичними приростами по аргументу τ з періодом T, то лінійне поле буде періодичним по аргументу t з цим же періодом, тобто періодичною буде його багатовимірна функція розподілу.

Доведення теореми не наводиться.

Інформація, що фіксується магнетометрами, досить різноманітна і об‘ємна. Однак, як вже зазначалося, в прикладних дослідженнях для характеристики магнітних збурень найбільш часто використовують бали, які визначаються як відхилення магнітного поля від норми. Повертаючись до моделі (5), це означає, що розглядається абсолютне значення поля, тобто $\left|\xi(\bar{y},t)\right|$. Крім того, в моделі (5) точку $\bar{y}$, в якій розміщений магнітометр і ведеться спостереження за магнітним полем, будемо вважати фіксованою. Приймаючи до уваги ці зауваження, можемо стверджувати, що моделлю магнітної бурі в фіксованій точці її спостереження є періодичний випадковий процес

$$\xi(t)=\left|\xi(\bar{y},t)\right|_{\bar{y}-фіксов.}=\left|\int_R\int_V\varphi(\bar{y}-\bar{x};t-\tau)\,d\eta(\bar{x},\tau)\right|. \qquad (7)$$

Розглянемо тепер результати статистичного аналізу магнітних збурень, модель яких обґрунтована у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу (7). Нагадаємо, що на даний час розроблено[10,11,13,14] ряд методів статистичного аналізу періодичних процесів, які, зокрема, включають знаходження оцінок їх періодичних ймовірнісних характеристик. Найбільш інформативними і зручними в прикладних дослідженнях є оцінки періодичного математичного сподівання і періодичної дисперсії.

На рисунку 2 наведена оцінка математичного сподівання магнітних збурень за січень, лютий та березень 2001 року, але при цьому період зміни ймовірнісних характеристик був взятий в два рази більшим, тобто $T=48$ годин. Легко бачити періодичність оцінки з періодом $T=24$ год., що підтверджує адекватність моделі стохастично періодичних магнітних збурень, один із періодів якої рівний періоду обертання Землі навколо своєї осі.

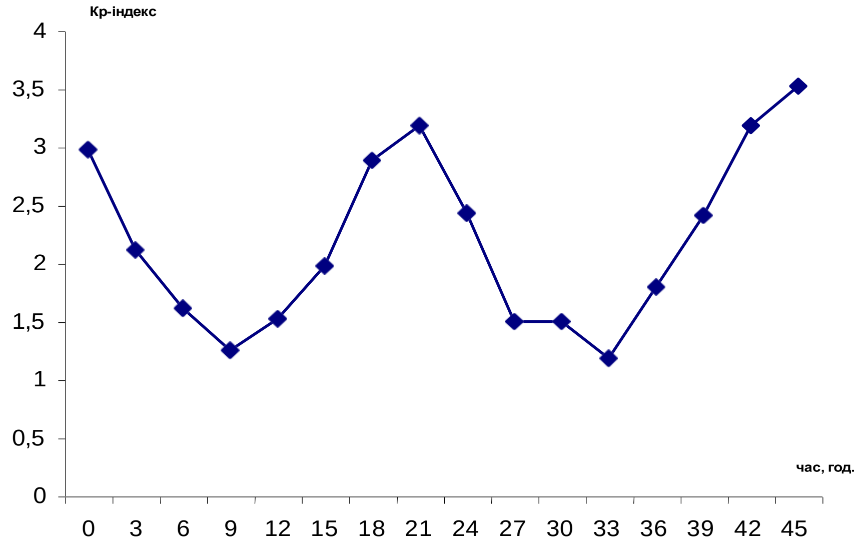

Рис. 2. Оцінка математичного сподівання магнітних збурень за січень, лютий та березень 2001 року при умові, що період $T=48$ год.

На рисунку 3 наведені оцінки математичного сподівання магнітних збурень (з кроком дискретизації $\Delta t=3$ год.) за декілька місяців 2001 року: січень (графік 1), лютий (графік 2) і березень (графік 3). На рисунку 4 показані оцінки середньоквадратичного відхилення магнітних збурень за ці ж місяці. Аналіз результатів обробки показує, що для різних місяців оцінки математичного сподівання магнітних збурень мають приблизно однаковий характер поведінки. Мінімальні значення магнітні збурення приймають зранку (від 6-ї до 12-ї год.). В вечірні і особливо в нічні години інтенсивність магнітних збурень зростає. Оцінки середньоквадратичного відхилення магнітних збурень для різних місяців теж сильно не відрізняються: менші значення теж приймають в ранішні години і дещо збільшується в вечірні і нічні години.

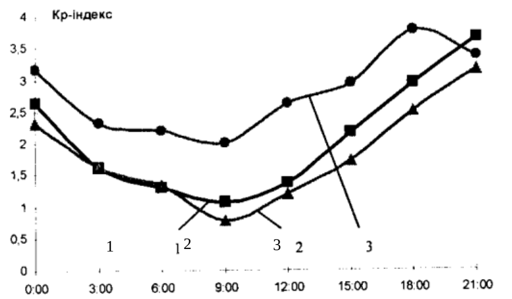

Рис. 3. Оцінка математичного сподівання магнітних збурень за січень, лютий та березень 2001 року

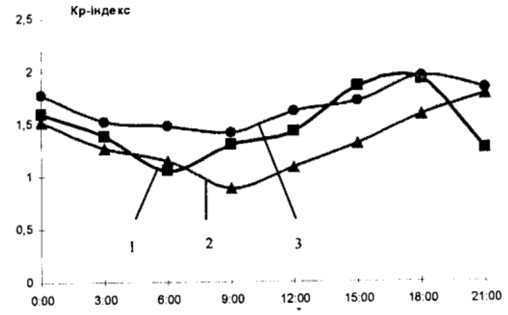

Рис. 4. Оцінка середньоквадратичного відхилення магнітних збурень за січень, лютий та березень 2001 року.

На рисунках 5 і 6 наведені оцінки математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення магнітних збурень для одного і того ж місяця зими – січня, але для різних років: графік 1 - для 2000 року; графік 2 – для 2001 року і графік 3 – для 2002 року. Аналіз результатів обробки показує, що оцінки математичного сподівання магнітних збурень для різних років січня між собою суттєво не відрізняються. Мінімальні значення магнітні збурення приймають зранку (6-12 год.); в денні, вечірні і особливо в нічні години інтенсивність магнітних збурень збільшується. Характерно також, що оцінка математичного сподівання магнітних збурень для кожної години доби в січні 2000 року перевищує аналогічні показники за 2001 і 2002 роки. Середньоквадратичне відхилення для магнітних збурень протягом всієї доби для цих же періодів часу (рис. 5) приблизно однакове.

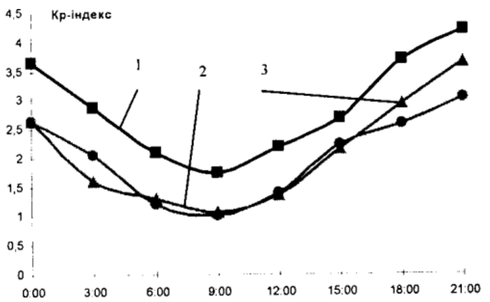

Рис. 5. Оцінка математичного сподівання магнітних збурень за січень 2001, 2002, 2003 років

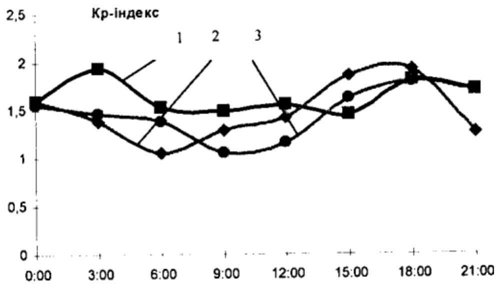

Рис. 6. Оцінка середньоквадратичного відхилення магнітних збурень за січень 2001, 2002, 2003 років

Висновки. В роботі показано, що характерною особливістю магнітних збурень є добова стохастична періодичність. Обґрунтована математична модель магнітних збурень у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу, який враховує цю періодичність, а також причини її виникнення. Наведено результати статистичного аналізу магнітних бур, які підтверджують адекватність моделі та показують характер зміни в часі їх математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення, що є важливим для багатьох областей науки і техніки, зокрема для біомедицини.

Valid mathematic model of magnetic disturbance which allows its stochastic periodicity caused by daily Earth's revolution on its axis and physics of the periodicity initiation. Adduced assessment of results of periodic mathematical expectation and root-mean-square deviation of magnetic disturbance that confirms its stochastic periodicity and adequacy of the model.

Література

1. Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. 2-я часть. М.: Мир, 1975. – 512 с.
2. Физический энциклопедический словарь. - М.: Сов. энциклопедия, 1984. - 944 с.
3. Касьяненко Л.Г., Пушков А.Н. Магнитное поле, океан и мы. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 190 с.
4. Амиантов А.С., Зайцев А.Н., Одинцов В.И. Вариации магнитного поля Земли: База цифровых данных магнитных обсерваторий России за период 1984-2000 гг. – М.: СтройАрт, 2001. – 52 с.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1967. - 757 с.
6. Войчишин К.С., Драган Я.П., Куксенко В.И., Михайловский В.Н. Информационные связи био-гелиогеофизических явлений и элементы их прогноза. К.: Наукова думка, 1974. – 208 с.
7. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. - М.: Наука, 1960. - 292 с.
8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. - К.: Наукова думка, 1983. - 367 с.
9. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. - 1957. - 44, №8. - С. 175-183.
10. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. - К.: Наукова думка, 1980. - 384 с.
11. Мыслович М.В., Приймак Н.В., Щербак Л.Н. Периодически коррелированные случайные процессы в задачах обработки акустической информации. - К.: Об-во ’’Знание’’ УССР, 1980. - 28 с.
12. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложение в радиотехнике. - К.: Наукова думка, 1973. - 191 с.
13. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. - Київ: ІЕД НАН України, 1999. - Вип. 1. - С.129-153.
14. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. - 34 с.
15. Райс С.С. Теория флуктуационных шумов. - В кн.: Теория электрических сигналов. Сб.-к переводов под ред. Н.А.Железнова - М.: ИЛ, 1953. - 288 с.

Одержано 30.05.2003 р.