УДК 621.391.822

М.Приймак, докт.техн.наук; М.Савчук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ПЕРІОДИЧНИХ БІЛИХ ШУМІВ З ДИСКРЕТНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Наведено означення нових класів дискретних періодичних шумів з дискретними розподілами: виродженого, геометричного, Пойя, логарифмічного та Бореля-Танера періодичних шумів. Показано періодичність їх характеристичних та моментних функцій. Ці та розглянуті раніше періодичні білі шуми є моделями реальних шумових сигналів, тому можуть бути використані для вивчення їх аналітичними і статистичними методами; для побудови та дослідження моделей стохастично періодичних послідовностей у вигляді ковзного середнього чи авторегресії; лежать в основі методів імітаційного моделювання стохастично періодичних сигналів, об'єктів, систем масового обслуговування, що функціонують в режимі стохастичної періодичності.

Вступ. Подібно до того, як в теорії рядів Фур'є важливим є питання вибору деякої ортогональної системи функцій, по якій проводиться розклад в ряд детермінованих функцій, аналогічні задачі мають місце в теорії випадкових процесів і послідовностей. Згідно із [1,2], для випадкових процесів широко використовуються інтегральні (іноді дискретні у вигляді рядів) зображення, в яких аналогом системи ортогональних функцій для рядів Фур'є теж є детерміновані функції, але аналогом коефіцієнтів розкладу – випадкова (стохастична) міра. В залежності від вигляду детермінованих функцій і способу їх одержання та властивостей випадкової міри розрізняють зображення Карунена, Лоева, Крамера, Карунена-Лоева, Райса та ін. Якщо стохастична міра породжується процесом з незалежними приростами, отримуємо клас лінійних випадкових процесів [3].

Для випадкових послідовностей переважно використовуються зображення у вигляді ковзного середнього чи авторегресії [4]. На даний час ці послідовності добре вивчені для випадку, коли білий шум, по якому проводиться розклад, є стаціонарним. При цьому самі послідовності ковзного середнього і авторегресії теж будуть стаціонарними.

Протягом останніх 20-30 років все більшу увагу спеціалістів привертають питання вивчення дискретних стохастично періодичних сигналів (явища, системи). Тому важливим є питання представлення цих сигналів у вигляді конструктивних моделей: послідовностей ковзного середнього і авторегресії. Але оскільки стохастичну періодичність цих послідовностей можна враховувати з допомогою періодичного білого шуму, який входить в їх зображення, то з цієї точки зору ***актуальними*** є задачі виділення класів періодичних білих шумів, кожний з яких характеризується конкретним розподілом. Такий підхід відкриває широкі можливості як для дослідження самих шумів, так і вказаних послідовностей аналітичними та статистичними методами.

В певній мірі подібні питання розв'язані для періодичних випадкових процесів [5,6]. При цьому було суттєво використано поняття періодичного білого шуму з неперервним аргументом як узагальненої похідної від процесу з незалежними періодичними приростами [7]. Щодо дискретних періодичних шумів, то раніше вже були введені такі шуми з дискретними [8] та з неперервними [9,10] розподілами. В [11,12] розглядалися питання їх імітаційного моделювання.

Мета роботи: ввести нові класи дискретних періодичних шумів з дискретними розподілами, розглянути деякі їх властивості та вказати області їх прикладного застосування.

Нагадаємо [13], що дискретним білим шумом називається послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_j,\ j\in Z\}$, де $Z=\{\dots,-1,0,1,\dots\}$ - множина цілих чисел.

Означення. Дискретний білий шум

$$\{\xi_j,\ j\in Z\} \tag{1}$$

називається *періодичним дискретним шумом*, якщо існує таке число $L>1$, що його функція розподілу є періодичною з періодом L, тобто

$$F(x;j)=P\{\xi_j<x\}=F(x;j+L). \tag{2}$$

Часто цей шум зручно називати L - періодичним дискретним білим шумом, іноді просто періодичним шумом. Наведене означення періодичного шуму є найбільш загальним, оскільки в ньому не конкретизується функція розподілу. Тому наведемо означення нових класів дискретних періодичних шумів, для кожного з яких враховується відповідний розподіл, а саме один із дискретних розподілів: вироджений, геометричний, логарифмічний, Пойя, Бореля-Таннера та розглянемо деякі їх властивості.

Вироджений періодичний шум. Дискретний шум (1) є виродженим періодичним шумом, якщо для його функції розподілу

$$F(x;j)=\begin{cases}0, & x\le a_j,\\ 1, & x>a_j,\end{cases}$$

послідовність чисел $\{a_j,\ j\in Z\}$ є періодичною з періодом L:

$$a_j=a_{j+L},\ j\in Z.$$

Для виродженого періодичного шуму характеристична функція

$$\varphi(u,j)=Me^{iu\xi_j}=e^{iua_j}=e^{iua_{j+L}}=\varphi(u,j+L),$$

тобто також є періодичною.

Початкові моментні функції виродженого білого шуму є періодичними:

$$M\xi_j^k=a_j^k=a_{j+L}^k=M\xi_{j+L}^k.$$

Дисперсія цього шуму рівна нулю: $D\xi_i=0,\ i\in Z$.

Відзначимо [13], що вироджений розподіл описує невипадкові величини. Справедливе і зворотне твердження: якщо випадкові величини ξ_j періодичного виродженого шуму мають скінчене математичне сподівання і нульову дисперсію, то функція розподілу

$$F(x;j)=\begin{cases}0, & x\le a_j,\\ 1, & x>a_j.\end{cases}$$

Геометричний періодичний шум. Дискретний білий шум (1) називається геометричним періодичним шумом, якщо його випадкові величини $\xi_j,\ j\in Z$, мають геометричний розподіл

$$P\{\xi_j=k\}=p_j(1-p_j)^k,$$

параметр якого p_j є періодичним:

$$p_j = p_{j+L}\,. \tag{3}$$

Враховуючи (3), для геометричного періодичного шуму його характеристична функція

$$\varphi(u;j) = \frac{p_j}{1-\left(1-p_j\right)e^{iu}} = \frac{p_{j+L}}{1-\left(1-p_{j+L}\right)e^{iu}} = \varphi(u;j+L),$$

тобто також є періодичною.

Геометричний розподіл описує число випробувань в схемі Бернуллі, які проводяться до тих пір, поки не наступить дана випадкова подія. Тому геометричний періодичний шум може бути ймовірнісною моделлю такої схеми випробувань, коли властивості її кожної j-ї серії, яка визначаються ймовірністю $p = p_j$, змінюються періодично.

Важливість геометричного розподілу пояснюється властивістю, яка називається *відсутністю наслідків* [13]: для будь-яких $m,n \ge 0$

$$P\left\{\xi \ge m+n/\xi_j \ge m\right\} = P\left\{\xi_j \ge n\right\},$$

тобто умовна ймовірність того, що випадкова величина ξ_j прийме значення $\ge m+n$ при умові, що її вже зарання гарантовано значення $\ge m$, рівна безумовній ймовірності того, що ця випадкова величина прийме значення $\ge n$. Останнє зауваження дає підставу стверджувати про наявність зв'язку між геометричним періодичним шумом і періодичними ланцюгами Маркова.

Логарифмічний періодичний шум. Білий шум (1) назвемо логарифмічним періодичним білим шумом, якщо для розподілу його випадкових величин η_j, $j \in Z$, який визначається ймовірністю

$$P\left\{\xi_j = k\right\} = -\frac{\left(1-p_j\right)^k}{k\ln p_j},\; k = 1,2,...,$$

параметр p_j є періодичним з періодом L:

$$p_j = p_{j+L}\,. \tag{4}$$

Очевидно, що характеристична функція логарифмічного періодичного шуму також є періодичною з цим же періодом L . Дійсно, враховуючи (4) та вираз характеристичної функції цього розподілу [13], маємо

$$\varphi(u;j) = \frac{1}{\ln p_j}\ln\left[1-\left(1-p_j\right)e^{iu}\right] = \frac{1}{\ln p_{j+L}}\ln\left[1-\left(1-p_{j+L}\right)e^{iu}\right] = \varphi(u;j+L).$$

Пойя періодичний шум. Білий шум (1) називається Пойя періодичним шумом, якщо параметри $\left(N_j, p_j, n_j, s_j\right)$ його розподілу

$$P\left\{\xi_j = k\right\} = C_{n_j}^k \frac{b_j\left(b_j+s_j\right)\cdots\left[b_j+\left(k_j-1\right)s_j\right]c_j\left(c_j+s_j\right)\cdots\left[c_j+\left(n_j-k-1\right)s_j\right]}{N_j\left(N_j+s_j\right)\cdots\left[N_j+\left(n_j-1\right)s_j\right]}, \tag{5}$$

де $b_j = N_j p_j, c_j = N_j\left(1-p_j\right)$, змінюються періодично з одним і тим же періодом L, тобто

$$N_j = N_{j+L},\; p_j = p_{j+l},\; n_j = n_{j+L},\; s_j = s_{j+L}\,. \tag{6}$$

Легко бачити, що при виконанні умови (6) розподіл Пойя змінюється періодично з цим же періодом L. Періодичними будуть також перші дві моментні функції Пойя періодичного шуму:

$$M\xi_j = n_j p_j = n_{j+L} p_{j+L} = M\xi_{j+L},$$

$$M\xi_j^2 = n_j p_j \frac{n_j + p_j + 1 + s_j/N_j}{1 + s_j/N_j} = n_{j+L} p_{j+L} \frac{n_{j+L} + p_{j+L} + 1 + s_{j+L}/N_{j+L}}{1 + s_{j+L}/N_{j+L}} = M\xi_{j+L}^2,$$

$$D\xi_j = n_j p_j (1 - p_j) \frac{1 + n_j s_j/N_j}{1 + s_j/N_j} = n_{j+L} p_{j+L} (1 - p_{j+L}) \frac{1 + n_{j+l} s_{j+L}/N_{j+L}}{1 + s_{j+L}/N_{j+L}} = D\xi_{j+L}.$$

Якщо в (5) n_j малі в порівнянні з N_j, то

$$P\{\xi = k\} \approx c_{n_j}^k p_j^k (1 - p_j)^{n_j - k},$$

тобто частинним випадком періодичного шуму Пойя є біноміальний періодичний шум.

Як відзначається в [13], розподіл Пойя використовують для опису різних процесів, які (принаймі до певного моменту) розвиваються за принципом ланцюгової реакції. Зокрема, його застосовують при дослідженні числа захворювань при інфекційних захворюваннях, епідеміях, коли при захворюванні однієї людини ймовірність нових випадків захворювання збільшується.

Очевидно, що при цих зауваженнях Пойя періодичний шум може бути вибраний як ймовірнісна модель інфекційних захворювань, які мають стохастично періодичний характер з певним періодом, наприклад, рівним одному рокові, що часто спостерігається в медичній практиці. Це, в свою чергу, дає підставу використовувати Пойя періодичний шум для вивчення процесів, подібних до інфекційних, аналітичними методами, методами математичної статистики та імітаційного моделювання.

Бореля-Таннера періодичний шум. Білий шум (1) називається Бореля- Таннера періодичним шумом , якщо випадкові величини ξ_j мають розподіл

$$P\{\xi_j = k\} = \frac{r_j}{(k - r_j)!} k^{k - r_j - 1} e^{-\alpha_j k} \alpha_j^{k - r_j},\ k = r_j, r_j + 1, \ldots, \tag{7}$$

параметри якого $(r_j, \alpha_j), (0 < \alpha_j < 1)$, змінюються періодично з періодом L:

$$r_j = r_{j+L},\ \alpha_j = \alpha_{j+L}.$$

Очевидно, що для Борелля-Таннера періодичного шуму його розподіл (7) змінюється періодично з цим же періодом L. Тому періодичними будуть і його перші дві моментні функції [13] - математичне сподівання і дисперсія:

$$M\xi_j = \frac{r_j}{r_j - \alpha_j} = \frac{r_{j+L}}{r_{j+L} - \alpha_{j+L}} = M\xi_{j+L},$$

$$D\xi_j = \frac{\alpha_j r_j}{(1 - \alpha_j)^3} = \frac{\alpha_{j+L} r_{j+L}}{(1 - \alpha_{j+L})^3} = D\xi_{j+L}.$$

Як зазначено в [13], в теорії масового обслуговування розподіл Бореля-Таннера визначається як розподіл числа вимог (заявок), які обслужені на інтервалі зайнятості в системі масового обслуговування з пуассонівським вихідним потоком з параметром α_j

і постійним часом обслуговування в цьому випадку, коли в початковий момент довжина черги рівна r_j.

Враховуючи стохастично періодичний характер роботи переважної більшості систем масового обслуговування, Бореля–Таннера періодичний шум може бути використаний як ймовірнісна модель вказаного вище числа вимог, коли роботу системи розглядати на інтервалах часу, співрозмірних із періодом стохастичної періодичності, в нашому випадку із періодом L. В реальних ситуаціях період стохастичної періодичності може бути рівним 24 годин, $7 \times 24 = 168$ годин, 1 рік.

Висновки та рекомендації. Введені в роботі періодичні шуми з дискретним розподілом є продовженням класифікації множини періодичних шумів. Ці шуми використовуються для розв'язку ряду задач теоретичного і прикладного характеру. На даний час вони знайшли застосування для опису реальних стохастично періодичних шумів (дробового шуму в електронних приладах, коли базовий струм змінюється періодично; вхідних потоків енергосистем; викликів на швидку допомогу; стрибків Баркгаузена при періодичній зміні зовнішнього магнітного поля), при обґрунтуванні моделі енергонавантажень у вигляді лінійного періодичного процесу, в медицині при описі та дослідженні електрокардіограм. Періодичні шуми знаходять використання в задачах перевірки адекватності моделей стохастично періодичних сигналів шляхом їх імітаційного моделювання у вигляді послідовностей ковзного середнього, на вхід якого поступає періодичний шум.

Перспективним є дослідження функцій розподілів ковзного середнього, авторегресії при врахуванні розподілу періодичного шуму. Поки що невирішеними залишаються питання знаходження спектральної функції періодичного шуму, залежність спектральної функції від конкретного розподілу періодичного шуму. Чекають свого подальшого дослідження і періодичні шумові поля, яскравим прикладом яких можуть бути стохастично періодичні збурення магнітного поля Землі, навколоземного простору.

Determination of new classes of discrete periodic noises with the discrete distributions: unborned, geometrical, Poyya, logarithmic and the Borelya-Tanera periodic noises is resulted. Periodicity of their characteristic functions or momentical functions is shown. These and the considered earlier periodic white noises are the models of the real noise signals, therefore can be used for the study by analytical and statistical methods; for construction and research of stochastic periodic sequences as sliding middle or autoregression models; lie in the basis of simulation techniques of stochastically periodic signals, objects, queuing systems, that function in the mode of stochastic periodicity.

Література

1. Пугачев В.С. Теория случайных функций, ее применение к задачам автоматического управления. - 1960. – 884 с.
2. Марченко Б.Г., Омельченко В.А. Вероятностные модели случайных сигналов и полей в прикладной статистической радиофизике. – Киев: УМКВО, 1988. – 176 с.
3. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложение в радиотехнике. – К.: Наукова думка, 1973. – 191 с.
4. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
5. Приймак М.В. Дослідження взаємозв'язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький технологічний університет Поділля. – 1999. – №2(8). – С. 167-169.
6. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.
7. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
8. Приймак М.В. Дискретні періодичні шуми з дискретними розподілами // Вимірювальна техніка та метрологія. - Львівська політехніка. – 1999. – №55. – С. 167-169.
9. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – С.15-19.
10. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами і можливості їх імітаційного моделювання // Відбір і обробка інформації. – 2003. – Вип. 18(94). – С. 17-21.

11. Приймак М.В., Яворський Б.І. Моделювання дискретних періодичних білих шумів з дискретними розподілами // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львівська політехніка. – 1999. – №56. – С. 78-80.
12. Приймак М.В., Бєдний М.С. Метод моделювання дискретних періодичних білих шумів з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки НАН України. Електротехніка. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – С. 186-190.
13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скороход, А.Ф.Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

Одержано 10.10.2003 р.