УДК 621.317.7

П.Євтух, докт. техн. наук; Г.Шадріна, канд. техн. наук;Т. Бобало
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

КРИТЕРІЙ АДАПТАЦІЇ АЛГОРИТМУ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЇЇ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ОБМЕЖЕНЬ

Розроблено критерій раціональної адаптації алгоритму дискретного перетворення Фур'є у схемі цифрової обробки сигналів інформаційно-вимірювальної системи із врахуванням її функціональних обмежень. У випадках, коли ці функціональні обмеження не дають змоги реалізувати потенційні можливості алгоритмів дискретного перетворення Фур'є за точністю перетворень, поданий критерій дає змогу мінімізувати їх спотворюючий вплив на точність ІВС.

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) – поширена процедура при цифровій обробці сигналів у сучасних вимірювальних засобах, а похибка від її реалізації у ряді випадків визначає клас точності інформаційно-вимірювальних систем (ІВС) в цілому. Однак похибки алгоритмів ДПФ досліджені, в основному, з точки зору оцінювання точності відповідних математичних перетворень, а не з точки зору точності здійснюваних у ІВС функціональних перетворень при конкретних обмеженнях вимірювальної процедури за швидкодією, шириною смуги частотного аналізу, взаємному впливі амплітуд відфільтрованих гармонічних складових та інших факторів. Функціональні обмеження ІВС часто не дають змоги використати у повній мірі високі потенційні можливості алгоритмів ДПФ за точністю перетворень. На практиці алгоритм ДПФ адаптують до обмежень конкретної ІВС експериментальним шляхом, забезпечуючи узгодження його можливостей із характеристиками похибок інших функціональних вузлів ІВС. Експериментальний підхід при відсутності чітких критеріїв оцінювання спотворюючого впливу ДПФ часто призводить до суттєвих спотворень кінцевого результату вимірювань і його неправильної інтерпретації. У зв'язку з цим актуальним є виявлення умов, при яких конкретний алгоритм ДПФ у різних варіантах його застосування реалізується без суттєвих спотворюючих впливів на результати вимірювання, а також розробки критеріїв, які забезпечують реалізацію цих умов. В даній статті приведено варіант вирішення цієї задачі.

При адаптації алгоритму ДПФ до обмежень конкретної ІВС існує можливість об'єктивного оцінювання спотворюючого впливу від цих обмежень шляхом застосування зворотного ДПФ для відтворення вхідного вимірювального сигналу – якщо вхідний та відтворений сигнали співпадають із допустимою похибкою, то можна стверджувати про коректність застосування алгоритму ДПФ. Для реалізації такого підходу необхідно знати умови узгодження процедур прямого і зворотного ДПФ при існуючих обмеженнях. Для виявлення цих умов можна скористатись частотно-часовою дуальністю Фур'є-перетворення, суть якої полягає у наступному.

Як відомо, пряме перетворення Фур'є при завжди існуючих обмеженнях на тривалість T його реалізації виражається формулою (1), а дискретний варіант цього перетворення виражається формулою (2) [1]:

$$F(\nu) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-j2\pi\nu t) dt, \tag{1}$$

$$F(k) = \frac{1}{MN_0} \sum_{n=0}^{MN_0 - 1} \overline{f}(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_0} kn\right), \tag{2}$$

де $F(\nu)$ і $F(k)$ - результати прямого перетворення Фур'є як функції частоти ν відповідно в аналоговому та дискретному варіантах. У дискретному варіанті частота подана як відносна частота перетворення k (кратність гармонічної складової), $k = 0, \ldots, N_0 - 1$;

N_0 - дискретний відносний період основної гармонічної складової;

M – число періодів основної гармонічної складової;

n - дискретний відносний час;

$f(t)$ - вхідний сигнал, а $\overline{f}(n)$ - його аналог після дискретизації.

Ядро перетворень $\ker(n)$ у формулі (2) подано у вигляді функції дискретного аргументу n.

$$\ker(n) = \exp \overline{f}(n) \exp\left(-j2\pi \frac{k}{N_0} n\right) = \exp\left(-j2\pi \frac{k}{N_0 T_S} T_S n\right), \text{ причому } \nu_k = \frac{k}{T_S N_0} = \frac{k}{T}, \tag{3}$$

де T_S - період дискретизації вхідного сигналу;

$T_S n$ - дискретний абсолютний час перетворення;

$N_0 T_S = T$ - абсолютне значення періоду основної гармонічної складової, виражене в періодах дискретизації.

Дискретизація ядра ДПФ, а також обмеження за тривалістю перетворення придає ДПФ нові властивості. Спектр ДПФ спотворюється – стає періодичним з періодом $N_0 T_S$, частотна смуга вихідного сигналу розширюється і появляються гармонічні складові, яких не було у вхідному сигналі, на частотах $1/T_S$ і $1/T$ та інших, їм кратним.

Зворотне перетворення Фур'є при обмеженому в реальних умовах спектрі частотою Ω подається виразом (4), а його дискретний варіант, згідно із працею [2], формулою (5):

$$f(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} f(\nu) \exp(j2\pi\nu t) d\nu, \tag{4}$$

$$\overline{f}(n) = \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k=0}^{MN_0 - 1} F(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N_0} nk\right), \tag{5}$$

де $n = 0, \ldots, N_0 - 1$.

У цьому перетворенні M_ν визначає відносну смугу часової фільтрації. Величина $N_{0\nu}$ - визначає основний період фільтрації ядра перетворення – збільшення $\Delta\nu$ при постійному Ω призводить до зменшення періоду частотної дискретизації $\Delta\nu$, що призводить до детальнішого представлення сигналу за часовою координатою.

Внаслідок обмеженості частотного діапазону значеннями (0, Ω) процедура часової фільтрації здійснюється не тільки в обмеженій смузі частот, а і в обмеженому часовому інтервалі $1/\Omega$. Вираз $1/\Omega$ надалі буде називатись основною смугою часової фільтрації. Зменшення часового інтервалу перетворення призводить до взаємного впливу значень відтвореного сигналу в часі, а кількісна оцінка такого впливу визначає похибку впливу δ_b, аналогічно похибці δ_ν, яку можна ввести для прямого ДПФ з метою оцінювання взаємного впливу гармонічних складових за частотою, як це було показано у праці [3]. Чим ближче розташовані моменти відліків значень відтворюваного сигналу, тим з більшою похибкою δ_b цей сигнал відтворюється. В кінцевому рахунку, внаслідок обмежень частотного діапазону частотою Ω, у відтвореному сигналі появляються значення функції $\overline{f}_n$ для малих проміжків часу за межами смуги часової фільтрації, а внаслідок частотної дискретизації $\Delta\nu$ появляються значення цієї функції для великих проміжків часу, теж за межами смуги часової фільтрації, що призводить до спотворень відтворюваного сигналу.

Для того, щоб підкреслити відмінність процесів, які відбуваються при прямому і зворотному ДПФ при змінах параметрів їх перетворень, в подальшому аналізі ці параметри для прямого ДПФ подаються із індексом T (тобто n_T, k_T, N_{0T}, M_T), а для зворотного – із індексом ν (тобто $n_\nu, k_\nu, N_{0\nu}, M_\nu$). Індекси T і ν - це номери циклів перетворень відповідно до прямого і зворотного ДПФ. Враховуючи ці зауваження, формули (2) і (5) слід подати у наступному вигляді:

$$F(k_T) = \frac{1}{M_T N_{0T}} \sum_{n_T=0}^{M_T N_{0T}-1} \overline{f}(n_T) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N_{0T}} k_T n_T\right); \tag{6}$$

$$\overline{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k_\nu=0}^{M_\nu N_{0\nu}-1} F(k_\nu) \exp\left(j\frac{2\pi}{N_{0\nu}} n_\nu k_\nu\right). \tag{7}$$

Для вирішення поставленої задачі необхідно проаналізувати властивості ядра сумісного прямого і зворотного ДПФ, а це ядро можна визначити із формул (6) і (7) шляхом визначення відтворюваної функції $\overline{f}(n)$. При цьому слід врахувати, що номери циклів перетворень T і ν у функції $F(k)$ при аналізі і відтворенні сигналу співпадають, а тому замість $F(k_\nu)$ у виразі (7) можна вважати $F(k_T)$ і підставити замість нього вираз (6), тобто:

$$\overline{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k_\nu=0}^{M_\nu N_{0\nu}-1} \sum_{n_T=0}^{M_T N_{0T}-1} \overline{f}(n_T) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N_{0T}} n_T k_T\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{N_{0\nu}} n_\nu k_\nu\right). \tag{8}$$

Вираз (8) надалі зручніше подати у вигляді:

$$\overline{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_T N_{0T}} \sum_{n_T=0}^{M_T N_{0T}-1} \overline{f}(n_T) \cdot \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k_\nu=0}^{M_\nu N_{0\nu}-1} \exp\left[-j2\pi\left(\frac{k_T n_T}{N_{0T}} - \frac{k_\nu n_\nu}{N_{0\nu}}\right)\right] \tag{9}$$

або

$$\overline{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_T N_{0T}} \sum_{n_T=0}^{M_T N_{0T}-1} \overline{f}(n_T) H(n_T, n_\nu), \tag{10}$$

де $H(n_T, n_\nu) = \dfrac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum\limits_{k_\nu=0}^{M_\nu N_{0\nu}-1} \exp\left[j \dfrac{2\pi n_\nu k_\nu}{N_{0\nu}} \left(1 - \dfrac{k_T n_T N_{0\nu}}{k_\nu n_\nu N_{0T}} \right) \right].$ (11)

Вираз (11) – це ядро сумісного прямого і зворотного ДПФ.

Випадок, коли параметри ДПФ вибираються так, що ядро $H(n_T, n_\nu)$ стає функцією Кронекера, є умовою узгодження процедури прямого і зворотного ДПФ. Дотримання цієї умови означає, що відтворена функція співпадає із вхідним сигналом. З метою визначення зручного критерію для практичного дотримання цієї умови доцільно ввести наступні відносні величини: $\gamma_1 = N_{0\nu}/N_{0T}$, $\gamma_2 = M_\nu/M_T$, $\gamma_3 = k_\nu/k_T$. Підстановка цих відносних величин у формулу (9) дає співвідношення

$$\bar{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_T N_{0T}} \sum_{n_T=0}^{\frac{1}{\gamma_1\gamma_2} M_T N_{0T}-1} \bar{f}(n_T) \cdot \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k_\nu=0}^{M_\nu N_{0\nu}-1} \exp\left[j2\pi \frac{k_\nu}{N_{0\nu}} \left(n_\nu - \frac{\gamma_1}{\gamma_3} n_T \right) \right]$$

або

$$\bar{f}(n_\nu) = \frac{1}{M_T N_{0T}} \sum_{n_T=0}^{M_T N_{0T}-1} \bar{f}(n_T) H(n_T, n_\nu),$$

де $H(n_T, n_\nu) = \dfrac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum\limits_{k_\nu=0}^{\gamma_1\gamma_2 M_\nu N_{0\nu}-1} \exp\left[j2\pi \dfrac{k_\nu}{N_{0\nu}} \left(n_\nu - \dfrac{\gamma_1}{\gamma_3} n_T \right) \right].$

Якщо позначити $\gamma_1\gamma_2 = \alpha_1$, $\gamma_1/\gamma_3 = \alpha_2$, то вираз для $H(n_T, n_\nu)$ набуде такого остаточного вигляду:

$$H(n_T, n_\nu) = \frac{1}{M_\nu N_{0\nu}} \sum_{k_\nu=0}^{\alpha_1 M_\nu N_{0\nu}-1} \exp\left[j2\pi \frac{k_\nu}{N_{0\nu}} (n_\nu - \alpha_2 n_T) \right]. \qquad (12)$$

Аналіз виразу (12) показує, що функція $H(n_T, n_\nu)$ набуває властивостей функції Кронера при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Таким чином, відтворена внаслідок застосування зворотного ДПФ функція співпадає із вхідним сигналом при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, де α_1 - коефіцієнт відношення відносних інтервалів представлення вхідного і відтвореного сигналів, а α_2 - коефіцієнт відношення відносних смуг аналізу при прямому ДПФ і відтворення при зворотному ДПФ.

Умова $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ - це критерій узгодженості прямого і зворотного ДПФ.

Відхилення коефіцієнтів α_1 і α_2 від одиниці пов'язане із величиною похибки відтвореної функції, а відтак – і з рівнем спотворень, який вносить застосування ДПФ у результат вимірювання. Величина відповідної похибки оцінюється шляхом використання формули (12).

За допомогою приведеного критерію зручно оцінювати рівень спотворень у вимірюваному сигналі у процесі експериментальної адаптації алгоритму ДПФ до функціональних обмежень конкретної ІВС, що демонструється наступним прикладом.

Нехай ядро $H(n_T, n_\nu)$ задається параметрами $M_T = 1$, $N_{0T} = 16$, $M_\nu = 1$, $N_{0\nu} = 16$, $\gamma_1 = 1$ і ставиться умова узгодженого відтворення вхідного сигналу, тобто справедливості критерію $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Однак, обмеження настроюваної ІВС такі, що реально можна забезпечити $M_T = 1$, $N_{0T} = 16$, $M_\nu = 1$, $N_{0\nu} = 15$, $\gamma_1 = 0{,}9375$, $\gamma_2 = 1$,

$\gamma_3 = 1$, (тобто $\alpha_1 = 0{,}9775$ і $\alpha_2 = 0{,}9375$ згідно з наведеними раніше формулами і позначеннями). На рис. 1, а подане узгоджене відтворення для моментів n_T =2, 4, 8, 12 і для цих же моментів на рис. 1, б подане спотворене відтворення сигналу кривими 1 – 4. Розрахунок кривих здійснювався за формулою (12). Для розрахунку взяті сигнали з амплітудами, які дорівнюють одиниці. Відхилення амплітуд кривих 1 – 4 від одиниці дають кількісні значення похибок спотворень, яку вносить алгоритм БПФ внаслідок існування функціональних обмежень конкретної ІВС.

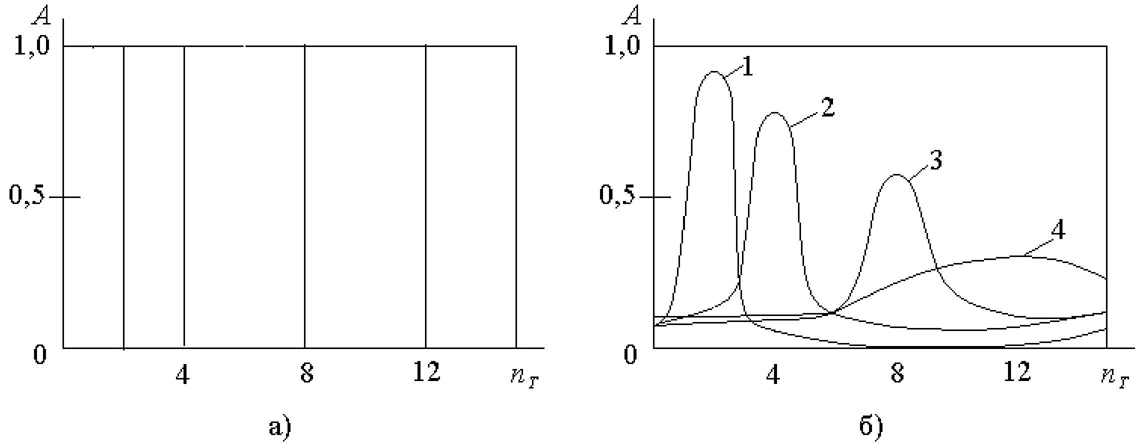

Рис. 1. Узгоджене (а) та неузгоджене (б) відтворення сигналу

Висновки

Розроблений критерій дає змогу існуючі, фактично, інтуїтивні дії з експериментального узгодження обчислювальної та вимірювальної процедур в умовах обмежень конкретної ІВС перевести на твердий грунт чітких числових співвідношень. Даний критерій в поєднанні із виразом (12) вказує шлях до виявлення резервів підвищення точності за рахунок більш раціональної адаптації алгоритму ДПФ в процедурі цифрової обробки сигналів до умов, визначених функціональними обмеженнями конкретної ІВС.

The criterion of discrete Fourier transform algorithm rational adaptation in the digital signal-processing scheme of the information – measuring system taking into account its functional restriction is worked up. When these functional restrictions don’t secure the potential possibilities of discrete Fourier transform realization taking into account transform precision, given criterion allows minimizing their distortion influence on information measuring system precision.

Література

1. Макс М. Методы и техника обработки сигналов при технических измерениях. –М.: Мир, 1983. –Т. 1. – 312 с.
2. Зеленков А.В. Оценка тренда аргумента спектральной функции при вычислении комплексного кепстра. // Радиотехника и электроника. 1981. –Т. 24. -№ 4. –С. 752 – 761.
3. Я. Драган, П. Євтух, Г. Шадріна. Спосіб врахування взаємного впливу амплітуд гармонічних складових сигналу при його аналізі на ЕОМ // Комп’ютерні технології друкарства. Збірник наукових праць, 2000, № 5. –С. 238 – 343.

Одержано 05.06.2003 р.