

УДК. 539.3

**В. Габрусєв<sup>1</sup>; І. Габрусєва<sup>1</sup>; Н. Твардовська<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя,

<sup>2</sup>Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

## **ДВІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З КРУГОВИМИ ЛІНІЯМИ РОЗДІЛУ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ**

*Розроблено алгоритм дослідження напруженого стану, що виникає в трансверсально ізотропному шарі в результаті теплообміну за законом Ньютона між шаром та зовнішніми середовищами при наявності ліній розділу граничних умов третього роду для температури, як на одній, так і на обох граничних площинах шару.*

**Вступ.** В сучасній техніці багато споруд, деталей машин та вузлів приладів працюють в умовах значних теплових навантажень. Виникаючі при цьому температурні напруження можуть набувати критичних значень і відігравати вирішальну роль при розрахунках на міцність. В зв'язку з цим задачі термопружності, які набули особливого розвитку в середині минулого століття [1,2], не втрачають актуальності і в наші дні. Метою запропонованої роботи і є розробка алгоритму дослідження напруженого стану в задачах термопружності при наявності ліній розділу граничних умов третього роду для температури на граничних площинах трансверсально ізотропного шару.

**Постановка задач.** Розглянемо плоскопаралельний, трансверсально ізотропний шар скінченної товщини  $2h$ . Будемо вважати, що граничні площини шару паралельні до площин ізотропії і вільні від зовнішніх навантажень. Між точками граничних площин шару і зовнішніми середовищами здійснюється теплообмін за законом

Ньютона. При цьому: у випадку а) на верхній граничній площині шару є три лінії розділу граничних умов третього роду для температури, у вигляді концентричних кіл, у випадку б) по дві таких лінії на обох граничних площинах. Температури зовнішніх середовищ, що відповідають різним областям граничних площин, відокремлених лініями розділу, різні, коефіцієнти теплообміну між точками шару і зовнішніми середовищами також різні.

Зафіксуємо циліндричну систему координат  $(O, r, \varphi, z)$  так, щоб координатна площина  $z=0$  співпадала з серединною площиною шару. Вісь  $OZ$  направимо перпендикулярно до граничних площин, рівняння яких відносно вибраної системи матимуть вид  $z=h$  та  $z=-h$ . Граничні умови задач для температури у випадках а) та б) матимуть вигляд:

$$\begin{cases}
 \text{а) } \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial z} = -k(T(r, z) - T^{(i)}) & z = h \\ \frac{\partial T}{\partial z} = k(T(r, z) - T^{(5)}) & z = -h \\ 0 \leq r < \infty. \end{cases} \\
 \text{б) } \begin{cases} \frac{dT}{dz} = -k(T - T^{(i)}), & z = h; \\ \frac{dT}{dz} = k(T - T^{(j)}), & z = -h; \end{cases}
 \end{cases}
 \quad (1)$$

$i = 1, 2, 3; \quad r^{(1)} = 0, \quad r^{(1)}_{j-1} = a, \quad r^{(1)}_j = b, \quad r^{(1)} = \infty.$   
 $j = 4, 5, 6; \quad r^{(2)}_{j-1} \leq r < r^{(2)}_j; \quad r^{(2)} = 0, \quad r^{(2)} = c, \quad r^{(2)} = d, \quad r^{(2)} = \infty.$

Граничні ж умови для напружень для обох випадків запишуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz}(r, z) &= 0, \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r < \infty, \\
 \sigma_{zz}(r, z) &= 0, \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r < \infty.
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

Тут  $T = T(r, z)$  є функцією розподілу температури в шарі;  $T_0^{(i)}, T_0^{(j)}$  – температури зовнішніх середовищ відносно областей граничних площин, відокремлених лініями розділу граничних умов;  $k_i, k_j$  – коефіцієнти теплообміну.

Виходячи з граничних умов задач, потрібно визначити розподіл температури, а також функції, які описують компоненти тензора напружень в шарі. Для цього використаємо співвідношення термопружності для трансверсально ізотропного тіла, запропоновані В. Новацьким в його роботі [3]. В результаті застосування до них інтегрального перетворення Ханкеля [4], будемо мати:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz}(r, z) &= \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{(e^{-\frac{d}{z}} - d^* \alpha^2)^{-}}{dz dz^2} \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(\alpha r) d\alpha, \\
 \sigma_{zz}(r, z) &= -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \frac{(e^{-\frac{d}{z}} - d^* \alpha^2)^{-}}{dz^2} \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(\alpha r) d\alpha, \\
 T(r, z) &= B \int_0^\infty \alpha^5 [C(\alpha) sh \mu z \alpha + D(\alpha) ch \mu z \alpha] J(\alpha r) d\alpha,
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

де  $B = A_{33} A_{44} (\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2),$

$\bar{\psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} [C_j(\alpha) sh \beta_j z \alpha + D_j(\alpha) ch \beta_j z \alpha]$  – трансформанта термопружного потенціалу,

$C_j(\alpha), D_j(\alpha)$  – довільні функції, що визначаються з граничних умов задачі.

**Температурна частина.** Вимагаючи виконання граничних умов задач для температури (1), одержимо системи інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій  $C_5(\alpha), D_5(\alpha).$

$$\begin{cases}
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C(\alpha)Q(\alpha) + D(\alpha)R(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k T_{(i)}, & r \leq r < r, \quad i = \underline{1,4}; \\
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C(\alpha)Q(\alpha) - D(\alpha)R(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = -k T^{(5)}, & 0 \leq r < +\infty,
 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases}
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C(\alpha)Q(\alpha) + D(\alpha)R(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = k T^{(i)}, \quad (i=1,2,3), & r \leq r < r; \\
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C(\alpha)Q(\alpha) - D(\alpha)R(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = -k T^{(j)}, \quad (j=4,5,6), & r \leq r < r.
 \end{cases} \quad (4)$$

де

$$Q_s(\alpha) = \mu_s \alpha \operatorname{ch} \mu_s h \alpha + k_s \operatorname{sh} \mu_s h \alpha,$$

$$R_s(\alpha) = \mu_s \alpha \operatorname{sh} \mu_s h \alpha + k_s \operatorname{ch} \mu_s h \alpha, \quad s = \overline{1,5}.$$

Продовжимо співвідношення (4), визначені на нескінченних проміжках на весь інтервал  $0 \leq r < +\infty$ , вводячи при цьому невідомі функції а)  $x(r)$ , б)  $x(r)$  та  $y(r)$ .

$$\begin{cases}
 B \int_0^\infty \alpha^5 [C(\alpha)Q(\alpha) + D(\alpha)R(\alpha)] J_0(r\alpha) d\alpha = \\
 \int_0^\infty \alpha^5 [C(\alpha)Q(\alpha) + D(\alpha)R(\alpha)] J_0(r\alpha) d\alpha = \\
 a) \int_0^\infty \alpha^5 [C(\alpha)Q(\alpha) + D(\alpha)R(\alpha)] J_0(r\alpha) d\alpha = \\
 = k T^{(4)} [u(r-b) + x(r)u(b-r)], \quad 0 \leq r < +\infty,
 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases}
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha)Q_3(\alpha) + D_5(\alpha)R_3(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = \\
 = k_3 T_0^{(3)} [u(r-b) + x(r)u(b-r)], \quad 0 \leq r < \infty, \\
 B \int_0^\infty \alpha^5 (C^5(\alpha)Q^6(\alpha) - D^5(\alpha)R^6(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = \\
 = -k T^{(6)} [u(r-d) + y(r)u(d-r)], \quad 0 \leq r < \infty,
 \end{cases} \quad (5)$$

тут  $u(x)$  – функція Хевісайда,

$$x(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{r}{b} \omega_n\right), \quad 0 \leq r < b;$$

$$y(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{r}{d} \omega_n\right), \quad 0 \leq r < d;$$

де  $\omega_n$  – додатні корені рівняння  $J_0(x) = 0$ ,  $a_n$  та  $b_n$  – невідомі коефіцієнти, що визначаються з вимоги виконання незадіяних ще співвідношень систем інтегральних рівнянь (4).

Застосовуючи до рівностей (5) формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, одержимо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими  $C_5(\alpha)$  та  $D_5(\alpha)$ . Розв'язавши яку і одержимо  $C_5(\alpha)$  та  $D_5(\alpha)$  у виразах через  $a_n$  та  $b_n$ , які будемо шукати вимагаючи виконання (4) при: а)  $i = 1, 2, 3$  або б)  $i = 1, 2, \quad j = 4, 5$ , що в кінцевому ітозі приведе до співвідношень:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \omega J_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{\left[ \begin{array}{c} \left\{ Q_1^*(\alpha) \right\} \left\{ R_1^*(\alpha) \right\} \\ \left\{ R_5^*(\alpha) \right\} \left\{ Q_2^*(\alpha) \right\} + Q_5^* \left\{ R_3^*(\alpha) \right\} \\ \left\{ Q_3^*(\alpha) \right\} \left\{ R_3^*(\alpha) \right\} \end{array} \right] J_0(b\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha =$$

$$\frac{\alpha^2 - \left( \frac{\omega_n}{b} \right)^2}{\Delta_0(\alpha)}$$

$$= - \frac{\left\{ \begin{array}{c} k T^{(1)} \\ k T^{(2)} \\ k T^{(3)} \\ k_3 T_0^{(4)} \end{array} \right\}}{k_4 T_0^{(4)}} + \frac{k T^{(5)} \left[ \begin{array}{c} 1 + \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array} \right\} - k_4 \left\{ \begin{array}{c} 1 + k_1 h \\ 1 + k_2 h \\ 1 + k_3 h \end{array} \right\} \end{array} \right]}{2hk \left\{ \begin{array}{c} k \\ k \\ k \end{array} \right\} + k_4 + k_5} +$$

$$+ \frac{\left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 1 + k_1 h \\ k_5 \left\{ \begin{array}{c} 1 + k_2 h \\ 1 + k_3 h \end{array} \right\} + (1 + k_5 h) \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array} \right\} \end{array} \right]}{2hk \left\{ \begin{array}{c} k \\ k \\ k \end{array} \right\} + k_4 + k_5}; \quad \left. \begin{array}{l} \left\{ 0 \leq r < a_1 \right\} \\ \left\{ a_1 \leq r < a^2 \right\} \\ \left\{ a \leq r < b \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

(6)

б)

$$k T^{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} a \omega J_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{1,2}^*(\alpha) \alpha J_0(b\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \alpha^2 - \left( \frac{\omega_n}{b} \right)^2} d\alpha +$$

$$+ k T^{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} b \omega J_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{2\mu \alpha^2 \left( \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array} \right\} - k_3 \right) e^{-2\mu_5 h \alpha} J_0(d\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \alpha^2 - \left( \frac{\omega_n}{d} \right)^2} d\alpha =$$

$$= - \left\{ \begin{array}{c} k T^{(1)} \\ k T^{(2)} \end{array} \right\} + \frac{k T^{(3)} \left[ \begin{array}{c} 2k h \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right\} + \left( k_6 + \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right\} \right) \end{array} \right]}{\left[ 2k k h + (k + k) \right]} + \frac{k_6 T_0^{(6)} \left[ \left\{ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right\} - k_3 \right]}{\left[ 2k k h + (k + k) \right]}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < a \\ a \leq r < b \end{array} \right\},$$

(6)

$$- k T^{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} a \omega J_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{2\mu \alpha^2 \left( k_6 - \left\{ \begin{array}{c} k_4 \\ k_5 \end{array} \right\} \right) e^{-2\mu_5 h \alpha} J_0(b\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \alpha^2 - \left( \frac{\omega_n}{b} \right)^2} d\alpha +$$

$$+ k T^{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} b \omega J_n(\omega) \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{4,5}^*(\alpha) \alpha J_0(d\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \alpha^2 - \left( \frac{\omega_n}{d} \right)^2} d\alpha =$$

$$= - \left\{ \begin{array}{c} k T^{(4)} \\ k T^{(5)} \end{array} \right\} - \frac{k_3 T_0^{(3)} \left( k_6 - \left\{ \begin{array}{c} k_4 \\ k_5 \end{array} \right\} \right)}{\left[ 2k k h + (k + k) \right]} + \frac{k T^{(6)} \left[ \begin{array}{c} 2k h \left\{ \begin{array}{c} k_4 \\ k_5 \end{array} \right\} + \left( k_3 + \left\{ \begin{array}{c} k_4 \\ k_5 \end{array} \right\} \right) \end{array} \right]}{\left[ 2k k h + (k + k) \right]}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < c \\ c \leq r < d \end{array} \right\}$$

Позначення використанні в останніх рівностях не наводяться.

Маючи вирази для  $C_5(\alpha)$  та  $D_5(\alpha)$  через  $a_n$  та  $b_n$ , можемо одержати функцію розподілу температури в шарі.

**Силова частина.** Вимагаючи виконання граничних умов задач, з врахуванням (3), одержимо:

$$\beta A_{33}A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} J_1(r\alpha) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$-\beta A_{33}A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} J_0(r\alpha) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

або

$$\frac{d}{dz} \left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} = 0,$$

$$\left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) \Big|_{z=\pm h} = 0,$$

що в розгорнутому вигляді приведе до системи чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими  $C_1(\alpha)$ ,  $D_1(\alpha)$ ,  $C_3(\alpha)$ ,  $D_3(\alpha)$ . Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$C_1(\alpha) = -C_5(\alpha) \frac{(e\mu_1^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}{(e\mu_5^2 - d^*) f(\mu_5, \mu_3, \alpha)}, \quad C_3(\alpha) = -C_5(\alpha) \frac{(e\mu_1^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}{(e\mu_5^2 - d^*) f(\mu_5, \mu_3, \alpha)},$$

$$D_1(\alpha) = -D_5(\alpha) \frac{(e\mu_1^2 - d^*) \varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)}{(e\mu_5^2 - d^*) \varphi(\mu_5, \mu_3, \alpha)}, \quad D_3(\alpha) = -D_5(\alpha) \frac{(e\mu_1^2 - d^*) \varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)}{(e\mu_5^2 - d^*) \varphi(\mu_5, \mu_3, \alpha)}.$$

Але тоді

$$\frac{d}{dz} \left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) = \alpha^2 \sum_{j=1,3} \left( \mu_j^2 - d^* \right) \left[ C_j(\alpha) sh_j z + D_j(\alpha) ch_j z \right] =$$

$$= -\alpha^2 (e\mu_5^2 - d^*) [C_5(\alpha) F_0(\alpha, z) + D_5(\alpha) \Phi_0(\alpha, z)],$$

$$\frac{d}{dz} \left( e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\Psi}(\alpha, z) = \alpha^3 \sum_{j=1,3} \mu_j \left( \mu_j^2 - d^* \right) \left[ C_j(\alpha) ch_j z + D_j(\alpha) sh_j z \right] =$$

$$= -\alpha^3 (e\mu_5^2 - d^*) [C_5(\alpha) F_1(\alpha, z) + D_5(\alpha) \Phi_1(\alpha, z)].$$

Тут

$$F_0(\alpha, z) = \frac{f(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} sh_1 z + \frac{f(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} sh_3 z - sh_5 z,$$

$$\Phi_0(\alpha, z) = \frac{\varphi(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} ch_1 z + \frac{\varphi(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} ch_3 z - ch_5 z,$$

$$F_1(\alpha, z) = \mu_1 \frac{f(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} ch_1 z + \mu_3 \frac{f(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} ch_3 z - \mu_5 \frac{ch_5 z}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)},$$

$$\Phi_1(\alpha, z) = \mu_1 \frac{\varphi(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} sh_1 z + \mu_3 \frac{\varphi(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} sh_3 z - \mu_5 \frac{sh_5 z}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)},$$

$$f(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \frac{\mu_i - \mu_j}{2} sh(\mu_i + \mu_j) h\alpha - \frac{\mu_i + \mu_j}{2} sh(\mu_i - \mu_j) h\alpha,$$

$$\varphi(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \frac{\mu_i - \mu_j}{2} sh(\mu_i + \mu_j) h\alpha + \frac{\mu_i + \mu_j}{2} sh(\mu_i - \mu_j) h\alpha.$$

Використовуючи вирази для  $C_5(\alpha)$  та  $D_5(\alpha)$  через  $a_n$  та  $b_n$ , одержимо формули для обчислення компонент тензора напружень на площадках з нормальми колінеарними до осі  $Oz$ :

a)

$$\sigma_{zz}(r, z) = - \frac{\beta(e\mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} \times k T_{40}^{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_0^{\infty} K_0(\alpha, z) \alpha J_0(b\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha; \\ \alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \frac{\beta(e\mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} \times k T_{40}^{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_1^{\infty} K_1(\alpha, z) \alpha J_0(b\alpha) J_1(r\alpha) d\alpha; \\ \alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2$$

б)

$$\sigma_{zz}(r, z) = - \frac{\beta(e\mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} \left\{ k T_{30}^{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_0^{\infty} K_0(\alpha, z) \alpha J_0(b\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha - \right. \\ \left. - k T_{60}^{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_0^{\infty} P(\alpha, z) \alpha J_0(d\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha \right\}; \\ \alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \frac{\beta(e\mu_5^2 - d^*)}{(\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2)} \left\{ k T_{30}^{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_0^{\infty} K_1(\alpha, z) \alpha J_0(b\alpha) J_1(r\alpha) d\alpha - \right. \\ \left. - k T_{60}^{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n J_n(\omega_n) \int_1^{\infty} P(\alpha, z) \alpha J_0(d\alpha) J_1(r\alpha) d\alpha \right\}. \\ \alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2$$

Тут

$$\begin{cases} \hat{a}) \left\{ \begin{aligned} K_i(\alpha, z) &= \frac{R_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} F_i(\alpha, z) + \frac{Q_5(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \Phi_i(\alpha, z), \\ P_i(\alpha, z) &= \frac{R_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} F_i(\alpha, z) - \frac{Q_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)} \Phi_i(\alpha, z), \end{aligned} \right. & \hat{a}') \left\{ \begin{aligned} K_i(\alpha, z) &= \frac{R_6(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} F_i(\alpha, z) + \frac{Q_6(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} \Phi_i(\alpha, z), \\ P_i(\alpha, z) &= \frac{R_3(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} F_i(\alpha, z) - \frac{Q_3(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} \Phi_i(\alpha, z), \end{aligned} \right. \end{cases}$$

(i = 0, 1)

При обчисленні невластних інтегралів у виразах для  $K_i(\alpha, z)$  та  $P_i(\alpha, z)$  доцільно перейти від гіперболічних функцій до експонент.

**Числові приклади.** Розглянемо конкретний приклад реалізації запропонованого алгоритму розв'язання задач при наступних значеннях параметрів:

$$\mu_1 = 1.388395, \mu_3 = 0.705194, \mu_5 = 1;$$

а)

$$T_1 = 0.8 \cdot T_0, \quad T_2 = T_0, \quad T_3 = 0.1 \cdot T_0, \quad T_4 = 0.8 \cdot T_0, \quad T_5 = 0.8 \cdot T_0,$$

$$k_1 h = 0.01, \quad k_2 h = 5, \quad k_3 h = 1, \quad k_4 h = 0.01, \quad k_5 h = 0.01.$$

$$a_1 = 0.4, \quad a_2 = 0.6, \quad b = 1,$$

б)

$$a = 0.6, \quad b = 1, \quad c = 0.3, \quad d = 0.8,$$

$$T_1 = T_0, \quad T_2 = 0.5 \cdot T_0, \quad T_3 = 0.1 \cdot T_0, \quad T_4 = 0.5 \cdot T_0, \quad T_5 = 0.1 \cdot T_0, \quad T_6 = 0.01 \cdot T_0$$

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0.01, \quad k_4 = 5, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = 0.01,$$

На проміжках: а)  $0 \leq r < b$  б)  $0 \leq r < b$  та  $0 \leq r < d$  виберемо по  $N$  точок: а)  $r_i = (i-1)\Delta r$  де  $\Delta r = \frac{b}{N}$ ; б)  $r_i^{(1)} = (i-1)\Delta r_1$  та  $r_i^{(2)} = (i-1)\Delta r_2$  відповідно, де  $\Delta r_1 = \frac{b}{N}$ ,

$\Delta r_2 = \frac{d}{N}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Вимагаючи виконання (6) в цих  $N$  точках, одержимо системи

лінійних рівнянь для визначення невідомих: а)  $a_n$ ; б)  $a_n$  та  $b_n$ . Виберемо  $N = 9$ .

Розв'язавши побудовану систему за допомогою програми складеної у Mathcad при заданих значеннях параметрів, одержимо конкретні числові значення коефіцієнтів  $a_n$ ,  $a_n$  та  $b_n$ . Підставляючи ці значення у вирази для  $\sigma_{zz}(r, z)$ , одержимо графіки розподілу

температурних напружень  $\sigma_{zz}^* = \frac{1}{\beta T_0} \sigma_{zz}$ , які зображені на рисунках 1 та 2.

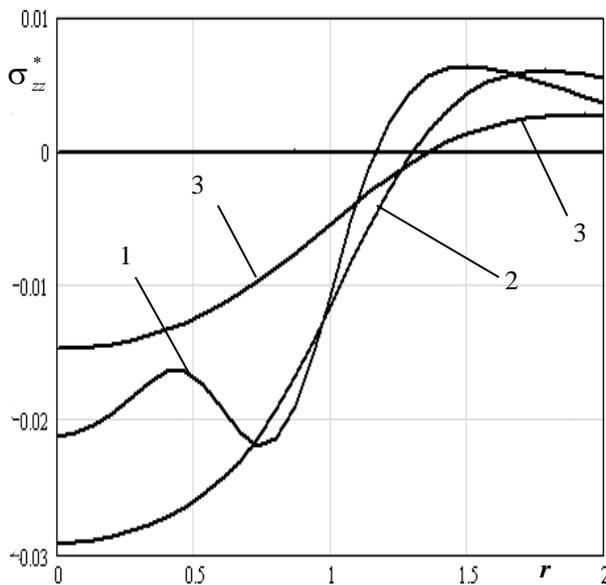


Рис. 1. Лінії 1, 2 та 3 відповідають значенням параметрів  $z=0.5h$ ,  $z=0$  та  $z=-0.5h$

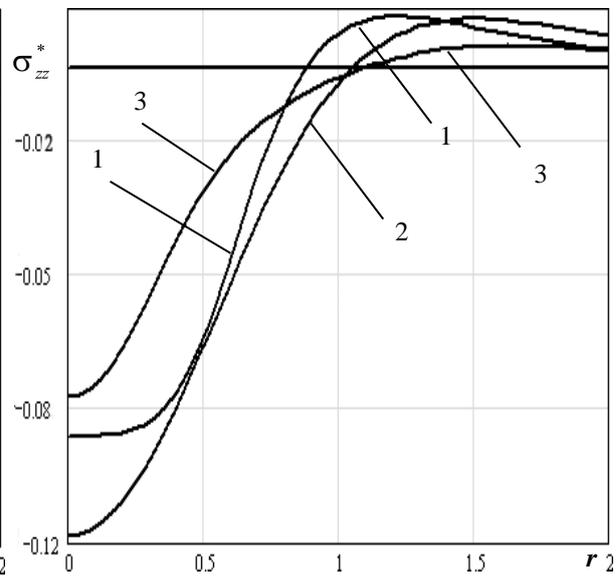


Рис. 2. Лінії 1, 2 та 3 відповідають значенням параметрів  $z=0.5h$ ,  $z=0$  та  $z=-0.5h$

**Висновки.** Враховуючи відносну простоту і можливість реалізації на ЕОМ запропонованої методики, вважаємо доцільним її використання при проведенні інженерних розрахунків.

*The algorithm of the investigation of stress state, which is caused by the heat-exchange according to the Newton's law in the transversal isotropic layer between it and outer medium, when the distribution lines of boundary conditions of the third level for the temperature are available, on both one and the other limiting planes of the layer, is developed.*

### **Література**

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Изд-во «Мир», 1962.
2. Гриліцький Д.В., Габрусєв В.Г., Піддубняк О.П. Деякі випадки осесиметричної задачі термопружності для трансверсально ізотропного шару. – Вісник ЛДУ, серія мех.-мат. В.6, 1971.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
4. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во ИЛ, 1955. – 668 с.

*Одержано 16.08.2004 р.*