

УДК 539.3

А. Сяський, докт.техн.наук; Ю. Батишкіна

Рівненський державний гуманітарний університет

ПЕРЕДАЧА СИЛ ДО КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ НЕСКІНЧЕННОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ СТРИЖНЯМИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Пропонується числовий розв'язок задачі про передачу сили (обертального моменту) від тонких ізотропних стрижнів змінної жорсткості до еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки. Подаючи компоненти деформації контуру отвору у вигляді інтегральних співвідношень, одержано систему двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта, для наближеного розв'язку якої використано метод граничної колокації. Досліджено вплив ортотропії матеріалу, геометричних та фізичних параметрів стрижнів на напружений стан пластинки.

Умовні позначення

$T_p, S_{\rho\lambda}, T_\lambda$	- зусилля (нормальні, дотичні та кільцеві) на контурі отвору;
V_λ	- поздовжня сила в підсилювальному стрижні;
ϵ_λ	- відносна осьова пружна деформація контура отвору;
V	- кут пружного повороту нормалі до контура отвору;
E_x, ν_x	- модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямі осі Ox ;
$E_0 F(s)$	- змінна жорсткість стрижня на розтяг або стиск;
s	- дуга на контурі отвору;
$\tilde{\rho}$	- радіус кривини контура отвору.

Контактні задачі для тіл з тонкими пружними підсиленнями належать до мішаних задач механіки деформівного твердого тіла. Такі задачі безпосередньо пов'язані з важливою для інженерної практики проблемою передачі сил від тонкостінних елементів до масивних деформівних тіл. Особливого значення вони набули в зв'язку з широким застосуванням в техніці композиційних матеріалів.

Часткове підсилення кругових або еліптичних отворів в ортотропних пластинках розглянуто в роботах [1, 2], де методом колокації досліджено вплив на напружений стан пластинки анізотропії матеріалу, геометрії та жорсткості підсилення.

Задачі про передачу сил або пар сил до ортотропної пластинки через тонкі розімкнені пружні елементи досліджені недостатньо. У випадку ізотропної пластинки з круговим отвором така задача розглянута в [3].

У даній статті пропонується розв'язок задачі про передачу сили (системи двох сил) до еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки через систему розімкнених пружних стрижнів змінної жорсткості.

1. Постановка і основні рівняння задачі

Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором, осі якого співпадають з осями прямокутної декартової системи координат Oxu і паралельні головним напрямкам ортотропії матеріалу пластинки. Систему полярних координат (r, δ) з полюсом в центрі отвору вибираємо так, щоб полярна вісь співпадала з віссю Ox (рис. 1).

Припустимо, що на ділянці $\Gamma_1 \equiv [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ (суцільна лінія) або на двох центральносиметричних ділянках $\Gamma_2 \equiv [\alpha_0^*; \beta_0^*] \cup [\pi + \alpha_0^*; \pi + \beta_0^*]$ (суцільна і штрихова лінії) контур отвору Γ підсилений одним або двома однаковими ізотропними стрижнями змінної жорсткості на розтяг або стиск. В центрі торця стрижня, що визначається полярним кутом $\delta = \alpha_0^*$, прикладено вздовж дотичної силу P_0 . Якщо контур Γ підсилений двома стрижнями, то до торців $\delta = \alpha_0^*$ і $\delta = \pi + \alpha_0^*$ прикладено дві паралельні сили, які утворюють пару сил. Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

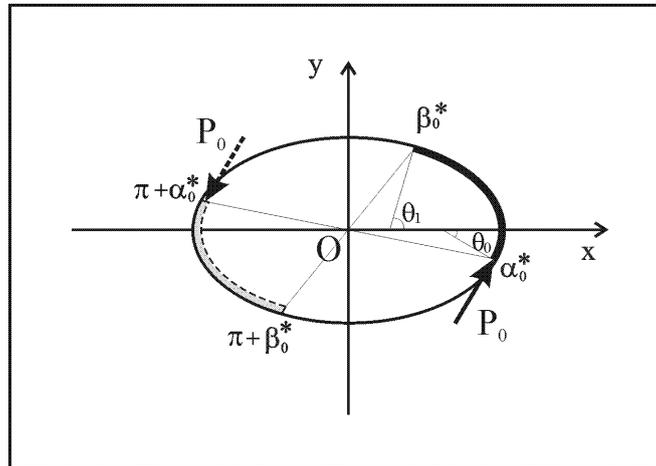


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язок задачі полягає у визначенні напруженого стану на контурі отвору в пластинці та підсилювальних стрижнях.

Розглянемо функцію [4]

$$\omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right), \quad (1)$$

яка реалізує конформне відображення нескінченної площини $\xi = \rho e^{i\lambda}$ з круговим отвором радіусом $\rho_0 = 1$ на область, яку займає пластинка.

Тут $R_0 = \frac{a+b}{2}$ – характерний розмір отвору; a, b – півосі еліпса; ε – його ексцентриситет; $i = \sqrt{-1}$. Не порушуючи загальності, приймаємо $R_0 = 1$.

Позначимо через $\gamma_1 \equiv [\alpha_0; \beta_0]$, $\gamma_2 \equiv [\alpha_0; \beta_0] \cup [\pi + \alpha_0; \pi + \beta_0]$ образи ділянок Γ_1, Γ_2 при відображенні (1).

Якщо умовно відділити підсилення від пластинки і замінити його дію контактними зусиллями T_ρ і $S_{\rho\lambda}$, то прийдемо до першої граничної задачі плоскої теорії пружності ортотропного тіла [4], загальний розв'язок якої наведено в [1].

Використовуючи [5], а також розв'язок задачі про часткове підсилення еліптичного отвору в ортотропній пластинці при її розтягу (стиску) “на нескінченності” [2], запишемо формулу для визначення відносного видовження контура Γ при заданому навантаженні

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2E_x h} \left\{ c_1 T_\rho(\lambda) + \frac{1}{|\omega'(\sigma)|^2} \left[\frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} R(\lambda, t) I(\lambda, t) dt + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} Q(\lambda, t) J(\lambda, t) dt + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}_\lambda + \beta(\lambda) \tilde{\nu} \right] \right\}, \quad (2)$$

де введено позначення

$$I(\lambda, t) = T_\rho(t) - S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{N(\lambda - t)}{2}; \quad J(\lambda, t) = S_{\rho\lambda}(t) + T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{N(\lambda - t)}{2};$$

$$R(\lambda, t) = c_2(\lambda)\alpha(\lambda)\alpha(t) + c_4(\lambda)\beta(\lambda)\beta(t) - c_3(\lambda)[\alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t)];$$

$$Q(\lambda, t) = c_4(\lambda)\beta(\lambda)\alpha(t) - c_2(\lambda)\alpha(\lambda)\beta(t) - c_3(\lambda)[\alpha(\lambda)\alpha(t) - \beta(\lambda)\beta(t)];$$

$$c_2(\lambda) = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}(\sin^2 \lambda + \beta_1\beta_2 \cos^2 \lambda); \quad c_1(\lambda) = \beta_1\beta_2 - \nu_x;$$

$$c_3(\lambda) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}(1 - \beta_1\beta_2)\sin \lambda \cos \lambda; \quad c_4(\lambda) = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}(\cos^2 \lambda + \beta_1\beta_2 \sin^2 \lambda);$$

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda + i\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} \left\{ [\beta_1\beta_2(1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x]X_0 + i[(\beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2) - \nu_x]Y_0 \right\} \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma = e^{i\lambda};$$

$$X_0 + iY_0 = (2 - N)iP_0 e^{i\theta_0}; \quad e^{i\theta_0} = e^{i\alpha_0} \frac{\omega'(\sigma_0)}{|\omega'(\sigma_0)|}; \quad \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \omega'(\sigma); \quad \sigma_0 = e^{i\alpha_0}; \quad (3)$$

$N = \begin{cases} 1, & \text{підсилення одним стрижнем;} \\ 2, & \text{підсилення двома стрижнями;} \end{cases}$ β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [4]; X_0, Y_0 – компоненти головного вектора сил, прикладених до пластинки; E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі Ox .

Кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ та поздовжні зусилля V_λ в підсилювальних стрижнях на підставі [2, 5] визначаються за формулами

$$T_\lambda = -\frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_1 l_2 + (a + b)l_4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda)R_1 + ((a + b)l_1 - l_2 l_4) \sin \lambda \cos \lambda R_2 \right] -$$

$$-\frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_4(b - a) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda - l_1 l_3) \tilde{R}_3 + (l_4 l_3 + (b - a)l_1) \sin \lambda \cos \lambda \tilde{R}_4 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda}{\Delta_1\Delta_2} \left[(\beta_1\beta_2(1 + \beta_1 + \beta_2) - \nu_x) b \cos \lambda X_0 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2 - \nu_x) a \sin \lambda Y_0 \right];$$

$$V_\lambda = \frac{|\omega'(\sigma)|^3}{1 - \varepsilon^2} T_\rho,$$

де

$$R_1 + iR_2 = -2(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) dt + \frac{iN}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) ctg \frac{N(\lambda - t)}{2} dt;$$

$$R_3 + iR_4 = 4(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) - (R_1 - iR_2); \quad \tilde{R}_3 = R_3 \cos 2\lambda + R_4 \sin 2\lambda; \quad \tilde{R}_4 = R_4 \cos 2\lambda - R_3 \sin 2\lambda;$$

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \Delta_j = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \beta_j^2 \cos^2 \lambda; \quad (j = 1, 2); \quad (5)$$

$$l_1 = a^2 \sin^2 \lambda - b^2 \beta_1 \beta_2 \cos^2 \lambda; \quad l_2 = a \sin^2 \lambda - b \cos^2 \lambda; \quad l_3 = a \sin^2 \lambda + b \cos^2 \lambda; \quad l_4 = ab(\beta_1 + \beta_2).$$

У співвідношеннях (2) – (5) здійснено граничний перехід від ортотропного до ізотропного матеріалів. Покладаючи в них $\beta_1 = \beta_2 = 1$, одержимо відповідні залежності для ізотропної пластинки з еліптичним отвором [2].

Граничні умови задачі на ділянці підсилення γ_N при відсутності у стрижнів жорсткості на згин вибираємо у вигляді [2]

$$T_\rho = \frac{E_0 F(s)(1 - \varepsilon^2)}{|\omega'(\sigma)|^3} \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{|\omega'(\sigma)|^2}{1 - \varepsilon^2} \frac{\partial T_\rho}{\partial \lambda} - \frac{6T_\rho \beta(\lambda)}{1 - \varepsilon^2}; \quad \lambda \in \gamma_N. \quad (6)$$

Тут $E_0 F(s)$ – змінна жорсткість стрижня на розтяг (стиск); s – дуга на Γ . Виходячи з умов центральної симетрії задачі, граничні умови (6) будуть однаковими на кожній з ділянок підсилення. Крім співвідношень (6), повинні виконуватись умови рівноваги підсилювального стрижня [2]

$$\int_{s_0}^{s_1} (T_p + iS_{p\lambda}) e^{i\theta} ds = -iP_0 e^{i\theta_0}, \quad (7)$$

які з урахуванням (6) можна перетворити до вигляду

$$T_p(\alpha_0) = -P_0 \frac{1-\varepsilon^2}{|\omega'(\sigma_0)|^3}; \quad T_p(\beta_0) = 0. \quad (8)$$

Підставляючи (2), (3) в граничні умови (6), приходимо до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення зусиль T_p , $S_{p\lambda}$ в зоні підсилення

$$T_p - \frac{(1-\varepsilon^2)\Delta}{|\omega'(\sigma)|^5} \left[c_1 |\omega'(\sigma)|^2 + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} R(\lambda, t) I(\lambda, t) dt + \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} Q(\lambda, t) J(\lambda, t) dt \right] = \frac{(1-\varepsilon^2)\Delta}{|\omega'(\sigma)|^5} [\alpha(\lambda)\tilde{\varepsilon}_\lambda + \beta(\lambda)\tilde{V}];$$

$$S_{p\lambda}(\lambda) + \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{1-\varepsilon^2} \frac{\partial T_p(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{6T_p\beta(\lambda)}{1-\varepsilon^2} = 0; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (9)$$

де $\Delta = \frac{E_0 F(\lambda)}{2E_x h}$ – відносна змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск).

Якщо величини T_p і $S_{p\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору і поздовжні зусилля V_λ в стрижнях визначимо за формулами (4), (5).

Розглянемо окремі випадки задачі (8), (9). При $\beta_1 = \beta_2 = 1$ одержимо систему рівнянь, яка визначає розв'язок задачі для нескінченної ізотропної пластинки з еліптичним отвором. Якщо в (8), (9) покласти $\varepsilon = 0$, то приходимо до задачі про передачу сили (пари сил) від підсилювального стрижня (системи двох стрижнів) до кругового отвору ортотропної пластинки.

2. Наближений розв'язок задачі

Точне розв'язання системи (8), (9) пов'язане з великими математичними труднощами. Для її числового наближеного розв'язку використаємо методом колокації [6], успішно апробований в роботах [2, 3, 5].

Заміною змінних

$$tg \frac{Nt}{2} = a_0 S + b_0; \quad tg \frac{N\lambda}{2} = a_0 x + b_0, \quad (10)$$

де

$$a_0 = \frac{tg \frac{N\beta_0}{2} - tg \frac{N\alpha_0}{2}}{2}; \quad b_0 = \frac{tg \frac{N\alpha_0}{2} + tg \frac{N\beta_0}{2}}{2},$$

проміжок інтегрування $[\alpha_0; \beta_0]$ зведемо до стандартного $[-1; 1]$. При цьому система (8), (9) приймає вигляд

$$T_p(x) - \frac{(1-\varepsilon^2)\Delta}{|\omega'(\sigma)|^5} \left[c_1 |\omega'(\sigma)|^2 + \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^1 R(\lambda, S) I(\lambda, S) \frac{dS}{1+(a_0 S + b_0)^2} + \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^1 Q(\lambda, S) J(\lambda, S) \frac{dS}{1+(a_0 S + b_0)^2} \right] = \frac{(1-\varepsilon^2)\Delta}{|\omega'(\sigma)|^5} [\alpha(\lambda)\tilde{\varepsilon}_\lambda + \beta(\lambda)\tilde{V}]; \quad (11)$$

$$S_{p\lambda}(x) + \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{1+(a_0 x + b_0)^2}{2a_0} N \frac{\partial T_p(x)}{\partial x} + \frac{6T_p(x)\beta(\lambda)}{1-\varepsilon^2} = 0; \quad x \in [-1; 1]; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$T_p(-1) = -\frac{P_0(1-\varepsilon^2)}{|\omega'(\sigma_0)|^3}; \quad T_p(1) = 0. \quad (12)$$

Враховуючи (12), наближений розв'язок системи (11) вибираємо у вигляді [3]

$$T_p(x) = -\frac{P_0(1-\varepsilon^2)}{|\omega'(\sigma_0)|^3} \frac{1-x}{2} + \sqrt{1-x^2} \Phi_1(x); S_{\rho\lambda}(x) = \frac{\Phi_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}; x \in [-1; 1], \quad (13)$$

де $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ – обмежені на $[-1; 1]$ функції.

Ліва частина системи (11) має таку ж структуру, як і ліва частина відповідної системи для ортотропної пластинки при її двосторонньому розтягу (стиску) [2], тому метод локалізації визначення наближеного розв'язку задачі переноситься без змін.

Для ортотропної пластинки з круговим отвором, підсиленім одним або двома пружними стрижнями сталого поперечного перерізу з параметрами $\frac{h_0}{h} = 1$; $\frac{b_0}{\rho_0} = 0.05$;

$\frac{E_0}{\sqrt{E_y E_x}} = 1$, досліджено вплив на напружений стан пластинки анізотропії матеріалу і способу розміщення підсилювальних стрижнів.

Результати числового розрахунку T_λ/P_0 у випадку підсилення одним стрижнем для матеріалу „скло - епоксид” ($\beta_1 = 2.2712$, $\beta_2 = 0.7626$, $\nu_x = 0.25$, $E_x/E_y = 3$), ізотропного матеріалу ($\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\nu_x = 0.3$, $E_x/E_y = 1$) та матеріалу „епоксид - скло” ($\beta_1 = 0.440$, $\beta_2 = 1.310$, $\nu_x = 0.083$, $E_x/E_y = 1/3$) при $\alpha_0 = -45^\circ$, $\beta_0 = 45^\circ$ наведено на рис. 2, а при $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta_0 = 85^\circ$ на рис. 3.

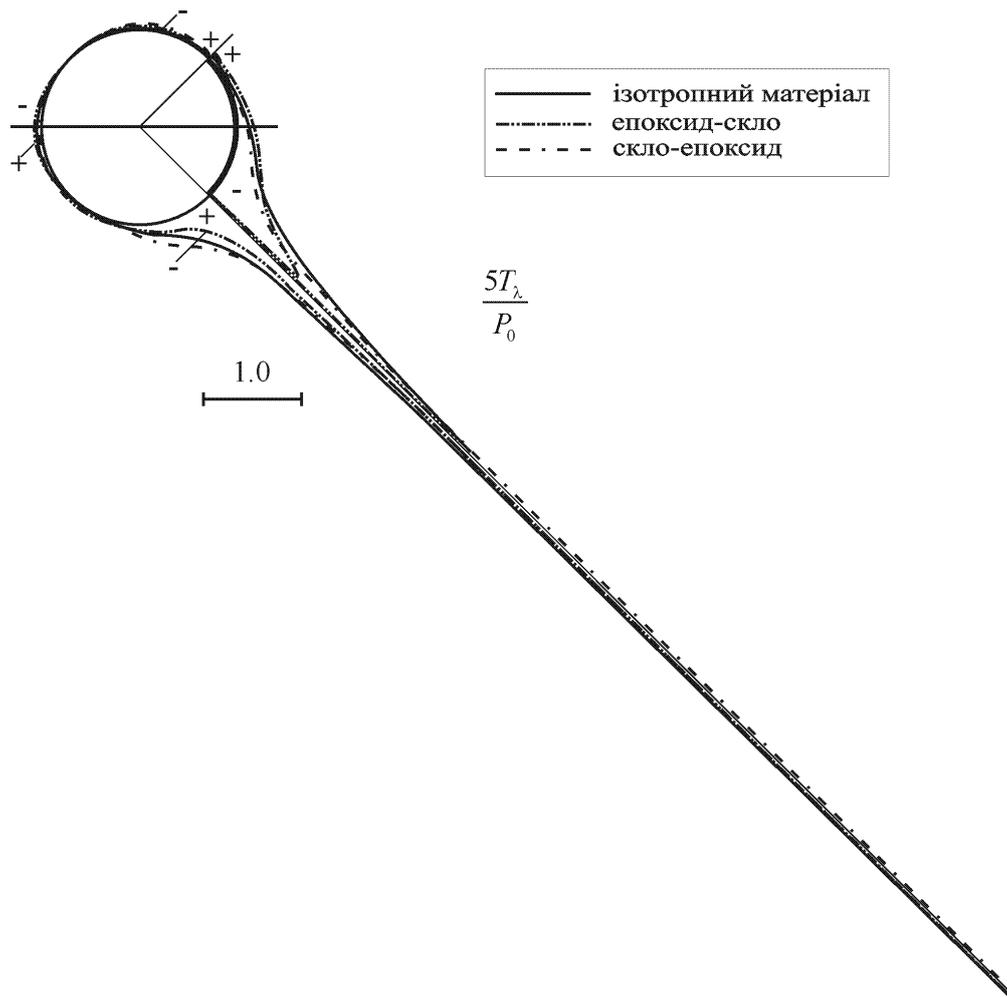


Рис. 2. Розподіл кільцевих зусиль T_λ/P_0 на контурі кругового отвору у випадку підсилення одним стрижнем

Аналогічні результати для T_λ/P_0 , $S_{\rho\lambda}/P_0$ у випадку підсилення двома стрижнями для матеріалів графіт - епоксид ($\beta_1 = 6.9992$, $\beta_2 = 0.7144$, $\nu_x = 0.25$, $E_x/E_y = 25$), епоксид – графіт ($\beta_1 = 0.1430$, $\beta_2 = 1.4010$, $\nu_x = 0.01$, $E_x/E_y = 1/25$) та ізотропного матеріалу при $\alpha_0 = -45^\circ$, $\beta_0 = 45^\circ$ ілюструються на рис. 4, а при $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta_0 = 85^\circ$ – на рис. 5.

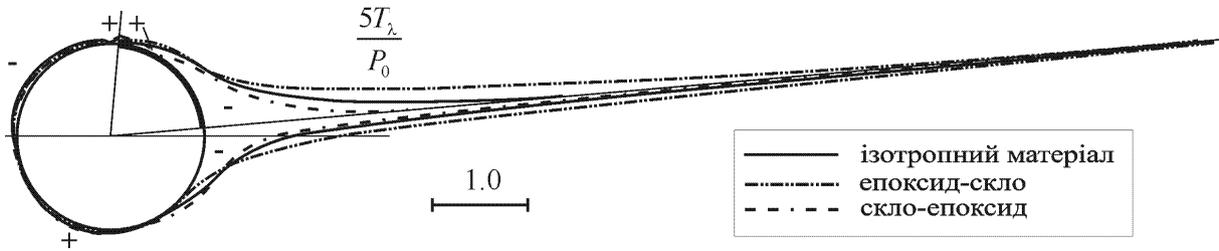


Рис. 3. Розподіл кільцевих зусиль T_λ/P_0 на контурі кругового отвору у випадку підсилення одним стрижнем

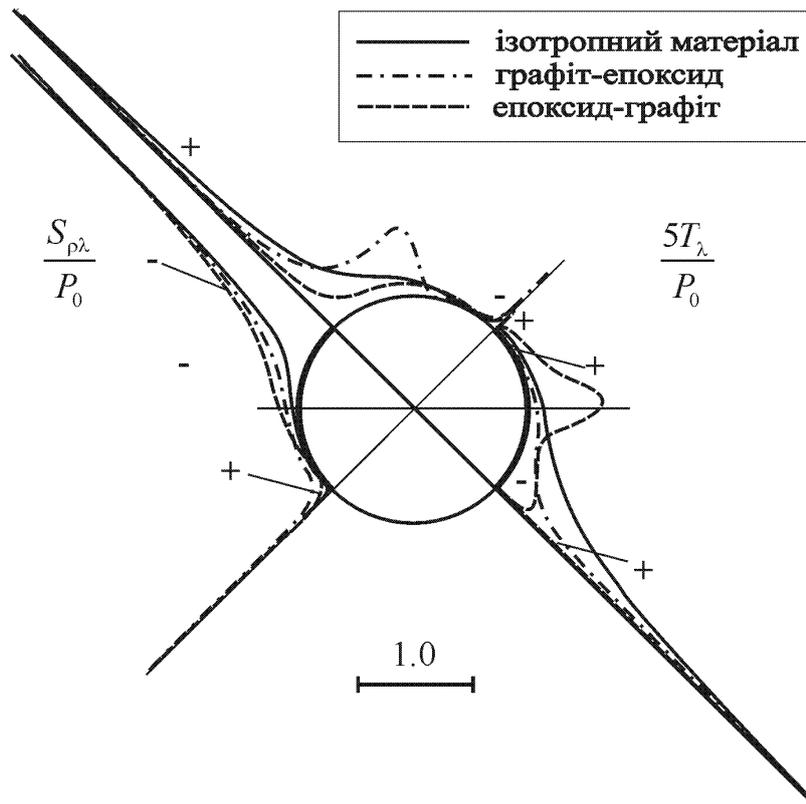


Рис. 4. Розподіл кільцевих T_λ/P_0 та дотичних $S_{\rho\lambda}/P_0$ зусиль на контурі кругового отвору у випадку підсилення двома стрижнями

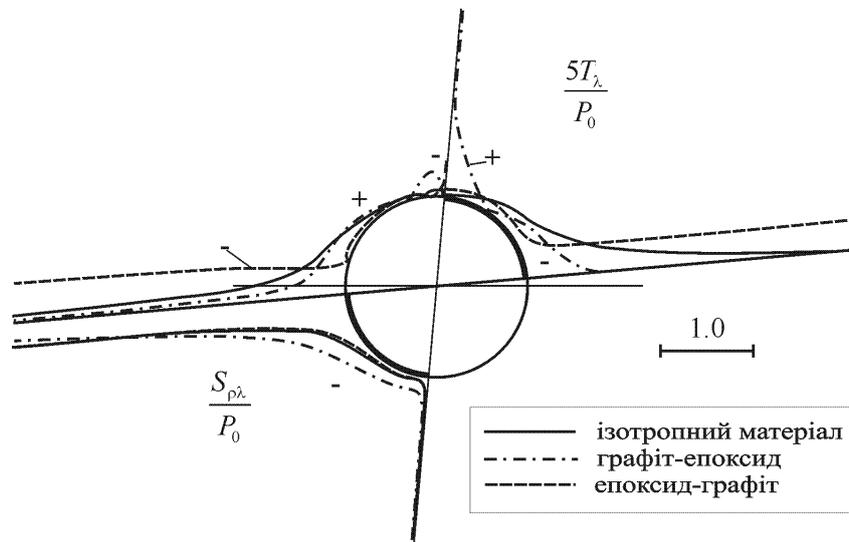


Рис. 5. Розподіл кільцевих T_λ/P_0 та дотичних $S_{\rho\lambda}/P_0$ зусиль на контурі кругового отвору у випадку підсилення двома стрижнями

Висновки

За результатами числового розрахунку встановлено:

- анізотропія матеріалу пластинки і спосіб розміщення підсилювальних стрижнів на контурі отвору суттєво впливають на характер розподілу зусиль;
- збільшення модуля Юнга в напрямку осі Ox приводить до зростання кільцевих зусиль в зоні прикладання зосередженої сили до одного стрижня і до зменшення цих зусиль у випадку прикладання пари сил до двох центральносиметричних стрижнів;
- якщо ділянка підсилення містить точку $\delta=0$, то спостерігається незначна концентрація кільцевих зусиль поблизу цієї точки та зміна знаку в околі торця прикладання сили для матеріалів, у яких $\beta_1 < 1$;
- при віддаленні від торців стрижня, до яких прикладені зовнішні сили, спостерігається швидке затухання величин T_ρ/P_0 , $S_{\rho\lambda}/P_0$ і необмежене їх зростання поблизу вільних від зусиль торців, що дає змогу замість стрижнів сталого перерізу використовувати стрижні змінної жорсткості, які мають меншу металомісткість.

The numerical solution of a problem about transmission of force (angular momentum) from thin isotropic rods of a variable rigidity to an elliptic orifice of an infinite orthotropic plate is offered. Introducing components of a strain of a contour of an orifice by the way of integrated relations the system of two singular integrally - differential equations with cores of Hilbert for an approximate solution by which one is obtained the method of a boundary collocation is used. The influence of an orthotropic material, geometrical and physical properties of rods on a state of stress of a plate is explored.

Література

1. Мартинович Т.Л., Сяський А.А., Демчик С.П. Контактные задачи для анизотропных сред с эллиптическими границами. – Ровно, 1989. – 16 с. – Деп. в Укр НИИНТИ 12.03.1990, №463 – Ук 90.
2. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Контактна взаємодія розіркнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки // Вісник ТДТУ. – Т. 9, № 3. – 2004. – С. 17-24.
3. Сяський А., Комбель С. Теоретичні основи уточненого розрахунку шліцьових з'єднань // машинознавство. – 2003. – №4 (70). – С. 27-33.
4. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
5. Сяський А.О. Тиск жорсткого диска на еліптичний отвір ортотропної полімерної пластинки // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – Вип. 7. – 1999. – С. 46-50.
6. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304с.

Одержано 17.09.2004 р.