УДК 517.443

М.Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М.Шинкарик[2], канд. фіз.-мат. наук
[1]*Тернопільський держаний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2]*Тернопільська академія народного господарства*

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) 1-ГО РОДУ - ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ – ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ

2-

3-

Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя та одного диференціального рівняння Лежандра методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено сім'ю поліпараметричних невласних інтегралів від звичайних і спеціальних функцій Бесселя та спеціальних приєднаних функцій Лежандра.

Вступ

У сучасній довідниковій математичній літературі знаходимо формули обчислення невласних інтегралів за спектральними елементами одного диференціального оператора (Фур'є, Бесселя, Лежандра тощо) [1,2]. У зв'язку з широким впровадженням композиційних матеріалів виникає потреба в обчисленні поліпараметричних невласних інтегралів за спектральними елементами гібридних диференціальних операторів. Один із методів обчислення таких інтегралів - метод гібридних інтегральних перетворень [3]. При цьому запровадження нового типу гібридного інтегрального перетворення дає можливість обчислити нову сім'ю невласних інтегралів. В даній роботі обчислено сім'ю невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича -Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду – Ганкеля 2-го роду.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині

$$I_{12} = \{ r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty \}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя і Лежандра для модифікованих функцій

$$\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (0, R_1)$$
$$\left(\Lambda_{\mu} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2) \qquad (1)$$
$$\left(B_{\nu,\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma} u_1(r)\right] = 0, \qquad (\alpha_{22}^3 \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^3)u_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \qquad (2)$$

і умовами спряження

$$(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)u_k(r) - (\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)u_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j,k = 1,2. \qquad (3)$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\alpha} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$ [4] і $B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ [5] та диференціальний оператор Лежандра [6] $\Lambda_{\mu} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \mu^2 (sh^2 r)^{-1}$; $\quad 2\alpha+1 > 0, \nu \geq \alpha \geq -1/2, \ \lambda \in (0,\infty), \ \mu \geq 0.$

Ми припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0$, $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $j,k = 1,2$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\alpha} - q^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [4], а для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} - q^2)v = 0$ - модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $K_{\nu,\alpha}(qr)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Delta_{\mu} - q^2)v = 0$ утворюють приєднані модифіковані функції Лежандра $P^{\mu}_{-1/2+q}(chr)$ та $L^{\mu}_{-1/2+q}(chr)$ [6].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [7,8]:

$$u_1(r) = A_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + \int_0^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 P^{\mu}_{-1/2+q_2}(chr) + B_2 L^{\mu}_{-1/2+q_2}(chr) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) sh\rho \, d\rho \qquad (4)$$
$$u_3(r) = A_3 I_{\nu,\alpha_2}(q_3 r) + B_3 K_{\nu,\alpha_2}(q_3 r) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2 + 1} d\rho.$$

Тут $E_j(r,\rho)$ - функції Коші [7,8]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \quad j = \overline{1,3}$$
$$\frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = -\varphi_j(\rho) \qquad (5)$$

$$\varphi_1(r) = r^{-(2\alpha_1 - 1)}, \ \varphi_2(r) = [sh(r)]^{-2}, \ \varphi_3(r) = r^{-(2\alpha_2 + 1)}.$$

Визначимо функції:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(xR_m) = (\alpha^m_{jk}\frac{\nu - \alpha}{R_m} + \beta^m_{jk})I_{\nu,\alpha}(xR_m) + x^2 R_m \alpha^m_{jk} I_{\nu+1,\alpha+1}(xR_m),$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(xR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)K_{\nu,\alpha}(xR_m)-\alpha^m_{jk}x^2R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(xR_m),$$

$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;jk}(xR_m,xr)=U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(xR_m)K_{\nu,\alpha}(xr)-U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(xR_m)I_{\nu,\alpha}(xr);$$

$$Z^{\mu,m1}_{\nu_2;jk}(chR_m)=\alpha^m_{jk}\,shR_m\,P^{\mu\prime}_{\nu_2}(chR_m)+\beta^m_{jk}P^{\mu}_{\nu_2}(chR_m),\ \nu_2=-1/2+q_2;$$

$$Z^{\mu,m2}_{\nu_2;jk}(chR_m)=\alpha^m_{jk}\,shR_m\,L^{\mu\prime}_{\nu_2}(chR_m)+\beta^m_{jk}L^{\mu}_{\nu_2}(chR_m),$$

$$F^{\mu,m}_{\nu_2;jk}(chR_m,chr)=Z^{\mu,m1}_{\nu_2;jk}(chR_m)L^{\mu}_{\nu_2}(chR_m)-Z^{\mu,m2}_{\nu_2;jk}(chR_m)P^{\mu}_{\nu_2}(chr);$$

$$B_\mu(q_2)=\pi/2\,\Gamma(1/2+q_2-\mu)[\Gamma(1/2+q_2+\mu)]^{-1},$$

$\Gamma(x)$ - “гамма – функція” Ейлера [1].

Безпосередньо перевіряється, що

$$E_1(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)}\begin{cases}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho), & 0<r<\rho<R_1\\ I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r), & 0<\rho<r<R_1\end{cases},\tag{6}$$

$$E_2(r,\rho)=\frac{B_\mu(q_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu_2;11}(chR_1,chR_2)}\begin{cases}F^{\mu,1}_{\nu_2,12}(chR_1,chr)F^{\mu,2}_{\nu_2,11}(chR_2,ch\rho), & R_1<r<\rho<R_2\\ F^{\mu,1}_{\nu_2,12}(chR_1,ch\rho)F^{\mu,2}_{\nu_2,11}(chR_2,chr), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}\tag{7}$$

$$E_3(r,\rho)=\frac{q_3^{2\alpha_2}}{\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\begin{cases}\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3r)\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2,22}(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3\\ \Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3\rho)\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2,22}(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}\tag{8}$$

У рівностях (7), (8) прийняті позначення:

$$\Delta^{\mu}_{\nu_2;jk}(chR_1,chR_2)=Z^{\mu,11}_{\nu_2,j2}(chR_1)Z^{\mu,22}_{\nu_2;k1}(chR_2)-Z^{\mu,12}_{\nu_2;j2}(chR_1)Z^{\mu,21}_{\nu_2;k1}(chR_2),$$

$$\Delta^{\mu}_{\nu,\alpha_2;j2}(q_3R_2,q_3R_3)=U^{21}_{\nu,\alpha_2,j2}(q_3R_2)U^{32}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3)-U^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(q_3R_2)U^{31}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3).$$

Умови спряження (3) і крайова умова в точці $r=R_3$ для визначення величин A_1,A_2,A_3 та B_2,B_3 дають алгебраїчну систему з п’яти рівнянь:

$$U^{11}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1)A_1-Z^{\mu,11}_{\nu_2,j2}(chR_1)A_2-Z^{\mu,12}_{\nu_2;j2}(chR_1)B_2=\delta_{j1}\omega_{11}+\delta_{j2}(\omega_{21}+G_{12}),\quad j=1,2$$

$$Z^{\mu,21}_{\nu_2;j1}(chR_2)A_2+Z^{\mu,22}_{\nu_2;j1}(chR_2)B_2-U^{21}_{\nu,\alpha_2,j2}(b_3R_2)A_3-U^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3=$$

$$=\delta_{j1}\omega_{12}+\delta_{j2}(\omega_{22}+G_{23}),$$

$$U^{31}_{\nu,\alpha_2,22}(b_3R_3)A_3+U^{32}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_3)B_3=g_R.$$

У системі (9) беруть участь символ Кронекера δ_{jk} та функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)}{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho-\frac{c_{21}}{shR_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F^{\mu,2}_{\nu_2,11}(chR_2,ch\rho)}{\Delta^{\mu}_{\nu_2;11}(chR_1,chR_2)}g_2(\rho)sh\rho d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{shR_2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F^{\mu,1}_{\nu_2,12}(chR_1,ch\rho)}{\Delta^{\mu}_{\nu_2;11}(chR_1,chR_2)}g_2(\rho)sh\rho d\rho-$$

$$-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho .$$

Визначимо функції:

$$A^{\mu}_{\nu,\alpha_2;j}(q)=\Delta_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta^{\mu}_{\nu_2;j1}(chR_1,chR_2)-$$
$$-\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta^{\mu}_{\nu_2;j2}(chR_1,chR_2),\quad j=1,2$$

$$B_{\alpha_1,\mu;j}(q)=U^{11}_{q_1,\alpha_1,11}(\lambda R_1)\Delta^{\mu}_{\nu_2;2j}(chR_1,chR_2)-U^{11}_{q_1,\alpha_1,21}(\lambda R_1)\Delta^{\mu}_{\nu_2;1j}(chR_1,chR_2),$$

$$\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q)=U^{11}_{q_1,\alpha_1,11}(\lambda R_1)F^{\mu,1}_{\nu_2;22}(chR_1,chr)-U^{11}_{q_1,\alpha_1,21}(\lambda R_1)F^{\mu,1}_{\nu_2;12}(chR_1,chr),$$

$$\Theta^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(r,q)=\Delta_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3R_3)F^{\mu,2}_{\nu_2;11}(chR_2,chr)-\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)F^{\mu,2}_{\nu_2;21}(chR_2,chr).$$

Алгебраїчна система (9) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)&\equiv U^{11}_{q_1,\alpha_1,11}(\lambda R_1)A^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(q)-U^{11}_{q_1,\alpha_1,21}(\lambda R_1)A^{\mu}_{\nu,\alpha_2;1}(q)=\\&=\Delta_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3R_3)B_{\alpha_1,\mu;1}(q)-\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)B_{\alpha_1,\mu;2}(q)\neq 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Визначимо:

1) *породжені крайовою умовою в точці* $r=R_3$ *функції Гріна*

$$W^{\mu}_{\nu,(\alpha);31}(r,q)=\frac{c_{21}}{B_{\mu}(q_2)shR_1}\cdot\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),$$

$$W^{\mu}_{\nu,(\alpha);32}(r,q)=\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q),\tag{11}$$

$$W^{\mu}_{\nu,(\alpha);33}(r,q)=\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Big[B_{\alpha_1,\mu;1}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3r)-$$
$$-B_{\alpha_1,\mu;2}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3r)\Big];$$

2) *породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна*

$$R^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{A^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),\quad R^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{A^{\mu}_{\nu,\alpha_2;1}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),$$

$$R^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}}{B_{\mu}(q_2)shR_1}\frac{\Delta_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),$$

$$R^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{c_{21}}{B_{\mu}(q_2)shR_1}\frac{\Delta_{\nu,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),$$

$$R^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=-\frac{U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(r,q),\quad R^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=\frac{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(r,q),$$

$$R^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{\Delta_{\nu,\alpha_2;22}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q),\quad R^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{\Delta_{\nu,\alpha_2;12}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q),$$

$$R^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = -\frac{c_{12}}{B_\mu(q_2)shR_2}\cdot\frac{U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r), \tag{12}$$

$$R^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = \frac{c_{12}}{B_\mu(q_2)shR_2}\cdot\frac{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r),$$

$$R^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);12}(r,q) = -\frac{B_{\alpha_1,\mu;2}(q)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r),$$

$$R^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);22}(r,q) = \frac{B_{\alpha_1,\mu;1}(q)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);1}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases} I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)[A^\mu_{\nu,\alpha_2;2}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho) - \\ \quad - A^\mu_{\nu,\alpha_2;1}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda\rho)], \quad 0<r<\rho<R_1 \\ I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)[A^\mu_{\nu,\alpha_2;2}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r) - \\ \quad - A^\mu_{\nu,\alpha_2;1}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda r)], \quad 0<\rho<r<R_1 \end{cases},$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{shR_1}\frac{1}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)\Theta^\mu_{\nu,\alpha_2;2}(\rho,q),$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{B_\mu(q_2)shR_1}\cdot\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3\rho),$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)\Theta^\mu_{\nu,\alpha_2;2}(r,q), \tag{13}$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{B_\mu(q_2)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q)\Theta^\mu_{\nu,\alpha_2,2}(\rho,q), \; R_1<r<\rho<R_2 \\ \Theta_{\alpha_1,\mu;1}(\rho,q)\Theta^\mu_{\nu,\alpha_2,2}(r,q), \; R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);23}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(r,q)\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3\rho),$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{c_{12}}{B_\mu(q_2)shR_2}\cdot\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r),$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{shR_2}\frac{1}{\Delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1,\mu;1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r),$$

$$H^\mu_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q) = q_3^{2\alpha_2+1}\begin{cases}\Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3\rho)W^\mu_{\nu,(\alpha);33}(r,q), \; R_2<r<\rho<R_3 \\ \Psi^{3*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_3R_3, q_3r)W^\mu_{\nu,(\alpha);33}(\rho,q), \; R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9), підстановки обчислених значень $A_j(j=\overline{1,3})$ та $B_k(k=2,3)$ у формули (4) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W^{\mu}_{\nu,(\alpha);3j}(r,q)g_R + \sum_{i,k=1}^{2} R^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);ik}(r,q)\omega_{ik} + \int_0^{R_1} H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)sh\rho d\rho + \int_{R_2}^{R_3} H^{\mu}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \tag{14}$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_{12} гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M^{\mu}_{\nu,(\alpha)} = \Theta(r)\Theta(R_1-r)B_{\alpha_1} + \Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)\Lambda_{\mu} + \Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)B_{\nu,\alpha_2}. \tag{15}$$

ГДО $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=0$. Тому його спектр дійсний і неперервний: $\beta \in (0,\infty)$. Спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{i=1}\Theta(r-R_{j-1})\Theta(R_j-r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta), \quad R_0=0.$$

При цьому функції $V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}
&(B_{\alpha_1}+b_1^2)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0, \quad r\in(0,R_1), \quad b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2},\\
&(\Lambda_{\mu}+b_2^2)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0, \quad r\in(R_1,R_2), \quad k_j^2\ge 0,\ j=\overline{1,3}\\
&(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0, \quad r\in(R_2,R_3)
\end{aligned} \tag{16}$$

крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)]=0, \quad \left(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22}\right)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \tag{17}$$

і умова спряження

$$\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}=0, \quad j,k=1,2. \tag{18}$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\alpha_1}+b_1^2)v=0$ утворюють функції $C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ і $D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ [4], а для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha}+b^2)v=0$ - функції $I_{\nu,\alpha}(br)$ і $N_{\nu,\alpha}(br)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_{\mu}+b^2)v=0$ утворюють дві дійсні приєднані функції $A^{\mu}_{-1/2+ib}(chr)$ та $B^{\mu}_{-1/2+ib}(chr)$ [6].

Визначимо функції:

$$X^{m1}_{\alpha;jk}(\lambda R_m,b)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\beta^m_{jk}\right)C_{\alpha}(\lambda r,b)\Big|_{r=R_m},$$

$$X^{m2}_{\alpha;jk}(\lambda R_m,b)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\beta^m_{jk}\right)D_{\alpha}(\lambda r,b)\Big|_{r=R_m},$$

$$u^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)J_{\nu,\alpha}(bR_m)-\alpha^m_{jk}b^2R_m J_{\nu+1,\alpha+1}(bR_m),$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)N_{\nu,\alpha}(bR_m)-\alpha^m_{jk}b^2R_m N_{\nu+1,\alpha+1}(bR_m),$$

$$\Psi^{m}_{\nu,\alpha;\,jk}(bR_m, br) = u^{m1}_{\nu,\alpha;\,jk}(bR_m)N_{\nu,\alpha}(br) - u^{m2}_{\nu,\alpha;\,jk}(bR_m)J_{\nu,\alpha}(br),$$

$$Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_m) = \alpha^m_{jk}\, shR_m A^{\mu\,\prime}_{-1/2+ib_2}(chR_m) + \beta^m_{jk} A^{\mu}_{-1/2+ib_2}(chR_m),$$

$$Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_m) = \alpha^m_{jk}\, shR_m B^{\mu\,\prime}_{-1/2+ib_2}(chR_m) + \beta^m_{jk} B^{\mu}_{-1/2+ib_2}(chR_m),$$

$$f^{\mu,m}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_m, chr) = Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_m)B^{\mu}_{-1/2+ib_2}(chr) - Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_m)A^{\mu}_{-1/2+ib_2}(chr)\,.$$

Безпосередньо перевіряється, що

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = \omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) - \omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\,,$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = \frac{c_{11} sh\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\Big[\delta_{\nu,\alpha_2;12}(b_3R_2, b_3R_3) f^{\mu,2}_{-1/2+ib_2;21}(chR_2, chr) -$$
$$- \delta_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_2, b_3R_3) f^{\mu,2}_{-1/2+ib_2;11}(chR_2, chr)\Big],$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \frac{c_{11} sh\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{2}{\pi^2}c_{12}\cdot\frac{ch\pi b_2}{shR_2}\left|\Gamma(1/2+\mu+ib_2)\right|^2\cdot\Psi^{3}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_3, b_3r)\,. \quad (19)$$

У рівностях (19) прийняті позначення:

$$\delta_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2, b_3R_3) = u^{21}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)u^{32}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_3) - u^{22}_{\nu,\alpha_2;\,j2}(b_3R_2)u^{31}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_3)\,;$$

$$a^{\mu}_{\nu,\alpha_2;\,j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha_2;12}(b_3R_2, b_3R_3)\delta^{\mu}_{-1/2+ib_2;\,j2}(chR_1, chR_2) -$$
$$- \delta_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_2, b_3R_3)\delta^{\mu}_{-1/2+ib_2;\,j1}(chR_1, chR_2)\,,$$

$$\delta^{\mu}_{-1/2+ib_2;\,jk}(chR_1, chR_2) = Y^{\mu,11}_{-1/2+ib_2;\,j2}(chR_1)Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_2;k1}(chR_2) -$$
$$- Y^{\mu,12}_{-1/2+ib_2;\,j2}(chR_1)Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_2;k1}(chR_2)\,;$$

$$\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);\,j}(\beta) = a^{\mu}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)X^{1j}_{\alpha_1;11}(\lambda R_1, b_1) - a^{\mu}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)X^{1j}_{\alpha_1;21}(\lambda R_1, b_1)\,.$$

Візьмемо числа

$$\sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{shR_1},\quad \sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{shR_2}{shR_1}\cdot\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\,.$$

Наявність спектральної вектор-функції $V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції

$$\sigma(r) = \sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\Theta(r)\Theta(R_1-r) + \sigma_2 shr\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r) + \sigma_3 r^{2\alpha_2+1}\Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)$$

і спектральної густини

$$\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta) = 2\beta\lambda^{2\alpha_1}(sh\pi b_1)^{-1}\Big([\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2\Big)^{-1}$$

дозволяє запровадити інтегральне перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду – Ганкеля 2-го роду, породженого на множині I_{12} ГДО $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (15) [9]:

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta) \quad (20)$$

$$H^{-\mu}_{\nu,(\alpha);2}[\tilde{g}(\beta)] = \int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \tag{21}$$

$$H_{\nu,(\alpha);2}[M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) + \sigma_3(\alpha^3_{22})^{-1}R_3^{2\alpha_3+1}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta) + \sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \tag{22}$$

У рівностях (20) – (22) прийняті позначення:

$$\tilde{g}(\beta) = \sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_i(\beta), \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr; \quad j.k = 1,2,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 shr\, dr, \quad \tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr;$$

$$d_1 = R_1^{2\alpha_1+1}\cdot c_{11}^{-1}, \quad d_2 = \sigma_2 shR_2\cdot c_{12}^{-1}; \quad Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);j2}(\beta) = (\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2})V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}.$$

Запишемо систему в матричній формі

$$\begin{bmatrix}(B_{\alpha_1} - q_1^2)u_1(r)\\ (\Lambda_{\mu} - q_2^2)u_2(r)\\ (B_{\nu,\alpha_2} - q_3^2)u_3(r)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \tag{23}$$

Інтегральний оператор $H^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}$, згідно з правилом (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}[...] =$$

$$= \left[\int_0^{R_1}...V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2}...V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 shrdr \quad \int_{R_2}^{R_3}...V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr\right].$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\} = q_1^2 \geq 0$. Покладемо всюди $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2 \geq 0,\ j = \overline{1,3}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (24) до системи (23). Внаслідок основної тотожності (22) одержуємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta^2 + q_1^2)\tilde{u}(\beta) = \tilde{g}(\beta) + \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}(\alpha^3_{22})^{-1}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R +$$

$$+\sum_{k=1} d_k[Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}].$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}(\beta) = \frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2} + \frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha^3_{22}(\beta^2 + q_1^2)}\cdot\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\omega_{2k} - \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}\omega_{1k}\right]. \tag{25}$$

Інтегральний оператор $H^{-\mu}_{\nu,(\alpha);2}$ згідно з правилом (21), як обернений до (24) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-\mu}_{\nu,(\alpha);2} = \begin{bmatrix} \int\limits_0^\infty \ldots V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \int\limits_0^\infty \ldots V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \int\limits_0^\infty \ldots V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (26), за правилом множення матриць, до матриці-елемента $[u^{\sim}(\beta)]$, де функція $u^{\sim}(\beta)$ визначена формулою (25). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned} u_j(r) &= \int\limits_0^\infty \tilde{u}(\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta = \\ &= \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}\int\limits_0^\infty \frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha^3_{22}(\beta^2+q_1^2)} V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot g_R + \\ &+ \int\limits_0^{R_1}\left(\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\cdot\right)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}\sigma_1 d\rho + \\ &+ \int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\cdot\right)g_2(\rho)sh\rho\sigma_2 d\rho + \\ &+ \int\limits_{R_2}^{R_3}\left(\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\cdot\right)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}\sigma_3 d\rho + \\ &+ \sum_{k=1} d_k\left[\int\limits_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot\omega_{2k} - \right. \\ &\left. - \int\limits_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot\omega_{1k}\right], \quad j=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{27}$$

Порівнюючи розв'язки (14) і (27) в силу єдиності, одержуємо наступні формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів від власних елементів ГДО $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$:

$$\int\limits_0^\infty \frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha^3_{22}(\beta^2+q_1^2)}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot = \frac{1}{\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3j}(r,q) \quad j=\overline{1,3} \tag{28}$$

$$\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta}{(\beta^2+q_1^2)}\cdot = \frac{1}{\sigma_k}H^{\mu}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q); \quad j,k=\overline{1,3} \tag{29}$$

$$\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q_1^2} V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot=\frac{1}{d_k}R^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);2k}(r,q);\quad j=\overline{1,3},\ k=1,2 \tag{30}$$

$$\int_0^\infty \frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q_1^2} V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot=-\frac{1}{d_k}R^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);1k}(r,q);\quad k=1,2. \tag{31}$$

У рівностях (28)-(31) функції Гріна $W_{\nu,(\alpha);3j}(r,q)$ визначені формулами (11), функції Гріна $R^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);ik}(r,q)$ - формулами (12), а функції впливу $H^{\mu}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ - формулами (13). Оскільки вони не залежать від нерівностей $(q_1^2-q_j^2)\ge 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q^2>0$.

Підсумком викладеного вище є твердження [3].

Теорема: Якщо вектор-функція $g(r)$ належить області визначення ГДО $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$, мають місце крайові умови (2), умови спряження (3) і виконується умова (10) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (28)-(31) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів від власних елементів ГДО $M^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (15).

Зауваження: Праві та ліві частини рівностей (28)-(31) неперервно залежать від даних і параметрів крайової задачі (1)-(3). Це дозволяє виділити із загальних структур безпосередньо будь-який частковий випадок (в межах даної моделі).

Висновки:

Результати роботи поповнюють математичну довідкову літературу і можуть бути використані для обчислення невласних інтегралів, які виникають в результаті дослідження фізико-технічних процесів, що описують стаціонарний режим композитних елементів конструкцій, які знаходяться під дією стрибкоподібного навантаження.

Comparing the solutions, build on the segment with two coupling points for the separate system of the Bessel differential equations and one Legendre equation by the Cauchy function method and the method of the hybrid integral transformation, the family of polyparametric non-personal integrals from the general and special Bessel functions and specially joint Legendre functions, was calculated.

Література

1. Градштейн И.С. , Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.- 1108 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798 с.
3. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том IV. – Чернівці: Прут, 2003. – 312 с.
4. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
5. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989.- 60с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т прикладных проблем механики и математики; 89.0).
7. Степанов В.В. Курс дифференциальних уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. –328 с.
9. Ленюк М.П., Янчишин М.Л. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва)-Лежандра.- Чернівці: Прут, 2002. – 76 с. - (Препринт / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.02).

Одержано 02.07.2004 р.