УДК 519.21

Н.Марченко

Інститут електродинаміки НАН України

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

У статті розглядається використання нової моделі випадкових сигналів – субгауссівських процесів в задачах оцінювання характеристик точності інформаційно-вимірювальних систем.

Умовні позначення

ξ – випадкова величина;
$f(u)$ – характеристична функція;
$F(x)$ – функція розподілу;
$\tau(\xi)$ – субгауссів стандарт;
$Sub(\Omega)$ – клас субгауссових величин;
$L_2(\Omega)$ – клас гільбертових випадкових величин;
S – коефіцієнт субгауссовості.

Вступ

При розв'язуванні багатьох конкретних задач у різноманітних галузях техніки вимірювань часто зустрічаються випадки, коли аналітичний розв`язок задачі через значні математичні труднощі практично неможливий, а проведення експериментальних досліджень і натурних випробувань потребує дуже великих затрат часу і засобів. Одним з ефективних заходів з подолання цих труднощів є застосування в дослідженнях методів моделювання досліджуваних явищ за допомогою сучасних швидкодіючих ЕОМ. Задача моделювання різних інформаційно-вимірювальних систем (ІВС) та зокрема діагностичних систем формулюється як задача розробки алгоритмів. Ці алгоритми за відомими характеристиками систем, наприклад, операторами або динамічними характеристиками нелінійностей окремих ланок, дозволяють точно чи з припустимою похибкою перетворювати та обробляти на ЕОМ реалізації відповідних випадкових вхідних інформаційних сигналів в системах, що досліджуються. Такі алгоритми називаються *цифровими моделями сигналів і систем*. В роботі використовується одна з таких нових математичних моделей, яка отримала назву субгауссових процесів [1].

Існує багато робіт, присвячених моделюванню реалізацій випадкових величин та процесів і послідовностей з незалежними значеннями. Часто ця задача є первісною, а потім з такої послідовності будуються процеси з залежними значеннями.

Виходячи з того, що вищезгадана нова математична модель ще не достатньо вивчена та мало відома в прикладному плані, дана робота присвячена більш глибокому дослідженню точнісних характеристик та особливостей моделювання з використанням субгауссових випадкових періодичних процесів.

Головна мета даної роботи полягає у розробці методів моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу (наприклад, φ – серій [2] у випадку настаціонарних процесів), що базується на класі субгауссових процесів, які в прикладних аспектах стосовно аналізу роботи ІВС ще повністю не вивчені. Очевидно, що для того, щоб виконати моделювання, треба мати певні початкові дані. За умови використання ЕОМ ми маємо справу із скінченними послідовностями. Скінченні послідовності випадкових величин задаються скінченновимірними функціями розподілу. Отже, повна постановка задачі моделювання вимагає, щоб була принаймні задана послідовність n -вимірних функцій розподілу процесу, що моделюється.

Нас в даній роботі буде цікавити моделювання інформаційних сигналів, а це накладає певні обмеження на вибір функцій розподілу і на повноту їх опису. Як відомо, часто треба моделювати сигнали, коли ми не маємо в повному обсязі функцій розподілу вимірюваних сигналів (наприклад, невідомі деякі багатовимірні функції модельованого процесу). Тоді доводиться мати справу з процесами, для яких відомі лише якісь окремі характеристики. В такому випадку в першу чергу можуть бути використані конструктивні моделі процесів, наприклад, лінійні процеси або моментні функції, які можна отримати шляхом математичної формалізації опису структурної схеми роботи тієї чи іншої ІВС.

При оцінці точності моделювання випадкових величин та процесів методом довірчих інтервалів, а також при розв'язуванні різних задач, пов'язаних з перевіркою шляхом моделюванням та перевіркою статистичних гіпотез, часто виникає задача оцінки величини ймовірності $p=\mathbf{P}\left\{|\xi-\mathbf{M}\xi|<\varepsilon\right\}$, де ε – довжина довірчого інтервалу [3], а ξ – значення моделюючого процесу, які ще можуть залежати і від часу t або значень результатів вимірювання.

Щоб оперувати з наведеним вище виразом, в ідеальному випадку треба мати функцію розподілу значень величини ξ і величину ε . На практиці використовують різного виду нерівності для оцінки величини p . При цьому найчастіше використовується нерівність Чебишева, яка дає оцінку знизу для величини p . В методі довірчих інтервалів величина ε – називається довжиною довірчого інтервалу, а p – коефіцієнтом довіри.

Виходячи з того, що для використання нерівності Чебишева майже не накладаються ніякі апріорні обмеження на клас розподілів випадкової величини ξ, виникає ідея розглянути задачу оцінки точності моделювання, ввівши деякі неістотні, з практичної точки зору, обмеження, які б дали змогу уточнити оцінку, що отримана на базі нерівності Чебишева, зокрема, дослідити цю задачу в класі періодичних субгауссових процесів. Саме це досліджується в даній роботі.

Короткі відомості стосовно моделі субгауссових лінійних процесів

Наведемо деякі позначення, які співпадають з [1].

Трійка $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathbf{P}\}$, де Ω – простір елементарних подій, F – деяка алгебра підмножин Ω, $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(A),\ A \in \mathrm{F}\}$ задає деяку ймовірнісну модель, яку будемо надалі називати ймовірнісним простором [4].

Позначимо через $f(u)$ характеристичну функцію випадкової величини ξ

$$f(u) = \mathbf{M} exp(iu\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(iux) dF(x),\ u \in \mathbf{R},$$

де $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ.

Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини ξ

$$g(y) = ln \mathbf{M}\, e^{y\xi} = ln\, f(-yi),\ y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Нагадаємо, що випадкову величину ξ називають *субгауссовою*, якщо знайдеться таке дійсне число $\alpha \geq 0$, що для всіх $y \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, \qquad (2)$$

де $g(y)$ визначається згідно з (1).

Характеристика субгауссової випадкової велечини

$$\tau(\xi) = inf \left\{ \alpha \geq 0 : \mathbf{M} e^{y\xi} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, y \in \mathbf{R} \right\} \qquad (3)$$

називається *субгауссовим стандартом випадкової величини* ξ.

Клас субгауссових величин позначається $Sub(\Omega)$ [1].

Можна показати, що якщо ξ – обмежена центрована випадкова величина та $|\xi| \leq c$ майже напевно, то $\xi \in Sub\,(\Omega)$ та $\tau(\xi) \leq c$, де $c > 0$.

Якщо випадкова величина необмежена або не центрована, то це не значить, що вона не є субгауссовою.

Простір $Sub(\Omega)$ є повний лінійний нормований простір, тобто є *банаховим простором,* а $\tau(\xi)$ – є нормою в цьому просторі.

Випадковий процес $\{\xi(t), t \in T\}$ називається субгауссовим, якщо при всіх $t \in T$ $\xi(t) \in Sub(\Omega)$ та $sup_{t \in T} \tau(\xi(t)) < \infty$ [1].

Субгауссова випадкова величина ξ називається строго субгауссовою, якщо $\tau^2(\xi) = \mathbf{D}\xi^2$, тобто при всіх $y \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$\exp g(y) \leq \exp \frac{y^2 \sigma^2}{2},$$

де $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi^2$.

Згідно з лемами 1, 2 [1] при $\xi \in Sub(\Omega)$ випливає, що $\mathbf{M}\xi = 0$ і виконується нерівність $\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi)$, тобто $\mathbf{D}\xi \leq \tau^2(\xi)$. Тому можна ввести наступний коефіцієнт:

$$S = \frac{\tau^2(\xi)}{\mathbf{D}\xi}, \tag{4}$$

який будемо називати *коефіцієнтом субгауссовості*. Очевидно, що коли випадкова величина строго субгауссова, то її коефіцієнт субгауссовості дорівнює 1.

Коефіцієнт субгауссовості, як буде показано нижче, є ефективним інструментом при покращенні точнісних характеристик випадкових процесів, отриманих шляхом моделювання. Він дозволяє проводити порівняльний аналіз інтервальних оцінок точнісних характеристик, наприклад в порівнянні з нерівністю Чебишева. Зупинимося більш детально на розгляді цього питання.

Для субгауссової величини коефіцієнт субгауссовості $S \geq 1$. Отже, його не можна задавати довільно. В загальному випадку, коли $\tau^2(\xi) < \mathbf{D}\xi$, коефіцієнт субгауссовості невизначений. Коефіцієнт субгауссовості довільної випадкової величини ξ є не що інше, як квадрат відношення норми величини ξ в банаховому до її норми в гільбертовому просторах.

Деякі осбливості перевірки процесу на субгауссовість при відомій твірній функції

Основна задача на практиці при моделювані в аналізі ІВС полягає у встановленні субгауссовості процесу, при цьому її розгляд можна розбити на такі етапи:

- спочатку за заданою одновимірною функцією розподілу процесу знаходимо характеристичну функцію деякого досліджуваного значення цього процесу;
- переходимо від характеристичної функції до твірної функції згідно (1);
- скориставшись лемою 1 [1], знаходимо субгауссів стандарт (цей пункт можна виконувати як аналітично, так і графічно);
- в разі існування субгауссового стандарту робимо аналітичні дослідження його залежності від параметрів заданого закону розподілу.
- Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження на субгауссовість.

Приклади

1. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-a, a]$, $a > 0$, її характеристичну функцію отримуємо у вигляді

$$f(u) = \frac{\sin(au)}{au}, \qquad u \in R.$$

Замінюючи $u = -iy$, отримаємо твірну функцію $g(y)$. Крім того, її можна знайти згідно з (1).

$$g(y) = \mathbf{M}\, e^{y\xi} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{yx}dx = \frac{sh(ya)}{ya}.$$

Її можна подати у вигляді

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ya)^{2k}}{(2k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ya)^{2k}}{6^k\, k!} = e^{\frac{(ya)^2}{6}} = e^{\frac{y^2}{2}\cdot\frac{a^2}{3}}.$$

Отже, рівномірно і симетрично розподілена випадкова величина ξ_a є субгауссова і згідно з лемою 1 [1], $\tau^2(\xi) = \mathbf{M}\,\xi^2 = \frac{a^2}{3}$, звідки субгауссів стандарт $\tau(\xi) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Проілюструємо аналітичний розв'язок графічно. Розглянемо функцію $g(y)=\frac{sh(y\alpha)}{y\alpha}$. Скориставшись лемою 1 [1], позначимо через $u_1(y,\alpha)=\sqrt{\frac{2}{y^2}\ln(g(y))}$.

Обмежуюча крива $c_1(y,\alpha)=\alpha$ випливає із (3), якщо під α розуміють якусь додатню величину, яка не менша за субгауссів стандарт, якщо він існує.

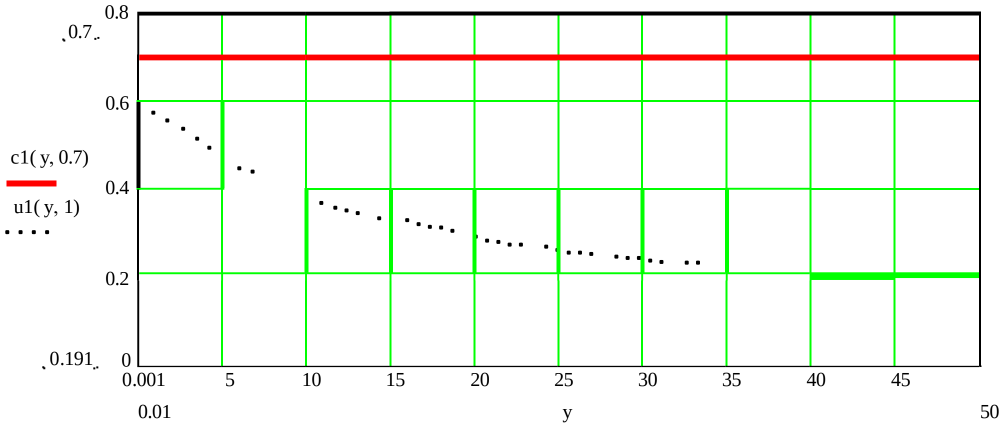

Рис.1. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість рівномірного розподілу

На рисунку 1 наведено графіки $u_1(y,1)$ та $c_1(y;0{,}7)$ звідки видно, що найбільше значення $u_1(y,1)$ приймає в точці $y=0$, причому $\lim\limits_{y\to 0+} u_1(y,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тепер замість $\alpha=0{,}7$ траба взяти $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Випадкова величина ξ має розподіл арксинуса, $\xi=a\sin\varphi$, де φ –рівномірно розподілена на інтервалі $|x|\le\pi$. В цьому випадку твірна функція, згідно з (1), задається

$$g(y)=\mathbf{M}e^{y\xi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ya\sin x}dx .$$

Її можна подати у вигляді

$$g(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ya)^{2k}}{2^{2k}\,k!k!}\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ya)^{2k}}{2^{2k}\,k!}=e^{\frac{y^2}{2}\frac{a^2}{2}} .$$

Тобто ξ – субгауссова випадкова величина і, виходячи з останьої нерівності, згідно з лемою 1 [1], маємо $\tau^2(\xi)=\mathbf{M}\,\xi^2=\frac{a^2}{2}$, звідки субгауссів стандарт випадкової величини ξ, розподіленої за законом арксинуса $\tau(\xi)=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Цей випадок аналогічний до попереднього, $g(y)=I_0(y,\alpha)$ (функція Бесселя нульового порядку). $u_2(y,\alpha)$ та $c_2(y,\alpha)$ знаходимо аналогічно до попереднього.

Графіки відповідних кривих $u_2(y,1)$ та $c_2(y;0{,}8)$ наведені на рисунку 2, звідки видно, що найбільше значення $u_2(y,1)$ приймає в точці $y=0$, причому $\lim\limits_{y\to 0+} u_2(y,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

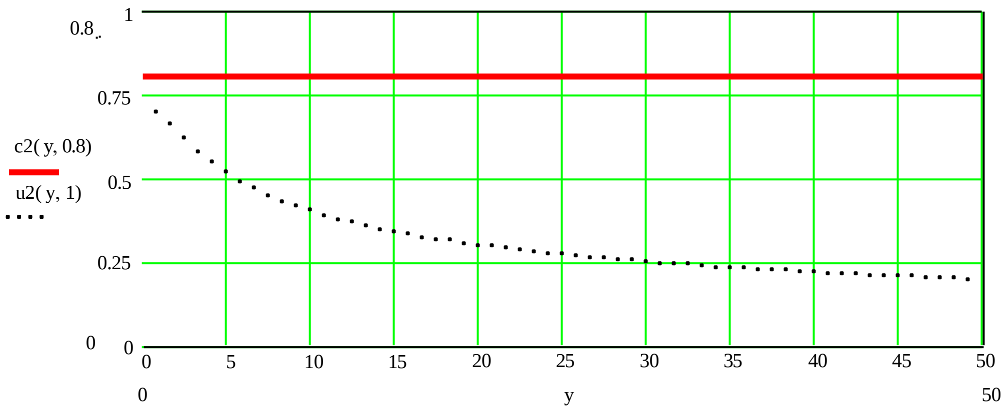

Рис.2. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу арксинуса

Вище були розглянуті приклади випадкових величин ξ, що мали розподіли рівномірний та арксинуса, при цьому початкові моменти були нульовими. Тепер перейдемо до розгляду прикладів випадкових величин, які не є центрованими, але після центровки можна встановити їх субгауссовість.

3. Випадкова величина ξ має розподіл Бернуллі. В цьому випадку твірна функція визначається виразом $g(y) = 1 - p + pe^{y}$. Але в цьому випадку, використовуючи лему 1 [1], необхідно від $\ln g(y)$ відняти перший момент (математичне сподівання), помножений на y, тобто

$$u_3(y,p) = \sqrt{\frac{2}{y^2}\left(\ln(g(y)) - y \cdot p\right)}\ .$$

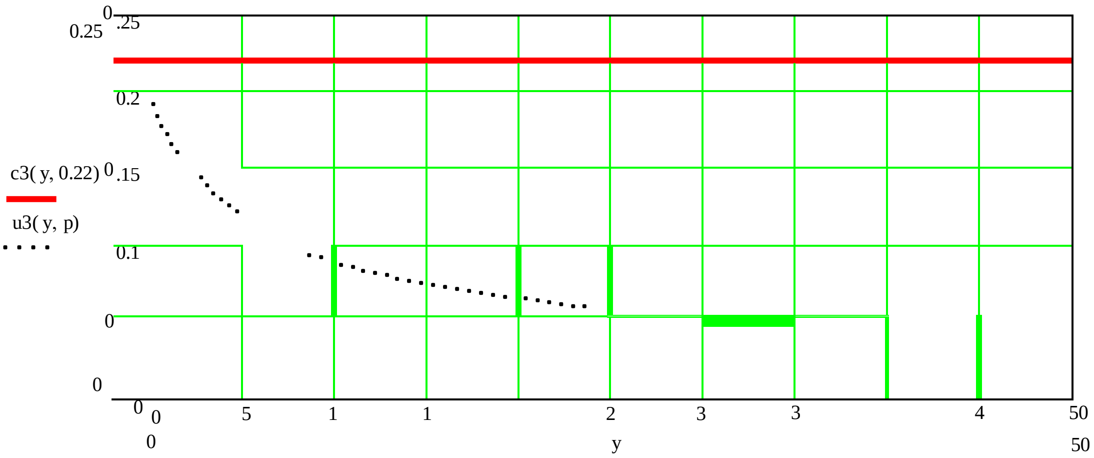

Рис.3. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу Бернуллі

Задаємо конкретне значення $p = 0.96$.

На рисунку 3 наведено графіки $u_3(y,p)$ та $c_3(y;0{,}22)$, з яких видно, що ξ – субгауссова випадкова величина. $u_3(y,0.96)$ найбільше значення приймає в точці $y = 0$, причому $\lim\limits_{y \to 0+} u_3(y,0.96) = 0.196$.

Аналогічно графічним методом можна дослідити й інші випадкові величини на субгауссовість, якщо відома їх характеристична функція.

Короткий аналіз особливостей використання субгауссових випадкових процесів

Будемо розглядати два простори: $L_2(\Omega)$ і $Sub(\Omega)$ та відповідні їм випадкові величини і процеси. Під L_2 -моделями будемо розуміти стохастичні величини та процеси, які належать лінійним просторам, зокрема, гільбертовим просторам випадкових величин і процесів. Як було сказано раніше, під $Sub(\Omega)$ будемо розуміти банахові простори випадкових величин.

Згідно з означенням гільбертового простору випадкових величин чи процесів, норма у них породжується скалярним добутком, в той час як в субгауссовому просторі $Sub(\Omega)$ норма породжується субгауссовим стандартом, а скалярний добуток там не обов'язково вводиться. Хоча найчастіше при моделюванні вимагають, щоб розроблювані моделі мали скінченну дисперсію, щоб дослідити в L_2 збіжність відповідних послідовностей та рядів, проте часто при розв'язуванні певних задач моделювання досить знати субгауссівський стандарт, щоб забезпечити відповідну збіжність рядів, за допомогою яких моделюються випадкові процеси. Крім того, навіть у тому випадку, коли простір є одночасно гільбертовим та банаховим, використання субгауссового стандарту дає можливість отримати більш достовірні в ймовірнісному розумінні оцінки точності розроблюваних моделей.

З вищесказаного видно, що при використанні та аналізі субгауссових моделей треба виходити із взаємного розташування всіх вказаних вище функціональних просторів. Для наочності в цьому випадку може бути корисним наступний рисунок.

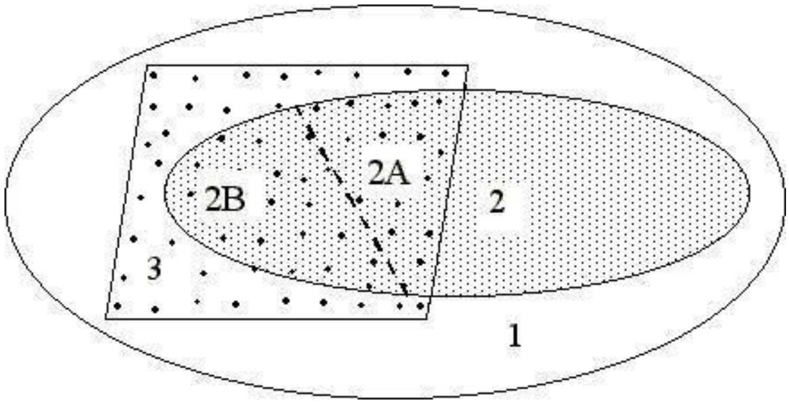

Рис.4. Ілюстрація взаємного розташування функціональних просторів, де 1 – банахів простір, 2 – субгауссів простір $Sub(\Omega)$, 3 – гільбертів простір $L_2(\Omega)$.

Перетин просторів 2 та 3 розбитий на дві підмножини, з яких 2A – множина субгауссових величин, для яких $S = 1$, тобто строго субгауссових; а 2B – множина субгауссових величин, для яких $S > 1$.

Для підтвердження вищесказаного можна скористатися хоча б аналізом використання відомої нерівності Чебишева [5].

Наведемо різновид однієї з форм нерівності Чебишева. Якою б не була випадкова величина ξ , яка має скінченне математичне сподівання і скінченну дисперсію, і якою б не була додатня стала величина x , завжди має місце нерівність

$$\mathbf{P}\left\{ |\xi - \mathbf{M}\xi| < x \right\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}. \quad (7)$$

При використанні нерівності Чебишева найчастіше мають на увазі нерівність (7), яка досить широко вживається в теорії вимірювань при оцінці точності і достовірності. В ній під x розуміють границю, симетричну відносно математичного сподівання довірчого інтервалу, а під $1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}$ – нижню границю ймовірностей того, що центрована випадкова величина ξ потрапить в довірчий інтервал. Нерівність Чебишева отримана при досить широких допущеннях відносно розподілу величин і процесів, які моделюються та оцінюються. Зрозуміло, що для різних частинних випадків її можна покращити.

Методика використання субгауссового стандарту детально викладена в роботі [5], і тому тут не приводиться. В цій роботі було детально розглянуто числовий приклад, в якому показано, що при дисперсії, рівній одиниці, і $x = 3$ при гауссовому розподілі ймовірність відхилення окремого значення моделюючого процесу від теоретичного не більше 0,3%. При використанні нерівності (7) був отриманий значно ширший інтервал 11%, в той час, як використання (3) для субгауссових величин дає значно ближчий результат 2%.

Висновки:

Таким чином, в даній роботі вперше проведено глибокий аналіз практичного дослідження відліків випадкових процесів з заданими одновимірними функціями розподілу на субгауссовість, що дає можливість в порівнянні з використанням нерівності Чебишева, більш глибоко оцінити якість моделювання або точність вимірювання для того ж обсягу вибірки.

Вперше введений в роботі і детально досліджений коефіцієнт субгауссовості дозволяє більш оперативно і наочно вирішувати питання про доцільність використання субгауссового стандарту для реалізації вказаних уточнень оцінок і наочно оцінити співвідношення класів з просторів $Sub(\Omega)$ та $L_2(\Omega)$.

In this paper a problem of using of the new model of random processes, which are named as subgaussian processes, is considered. These processes are used for modulation of various classes of informational signals for needs of electroenergetic.

Література

1. Марченко Н.Б. Використання моделей субгауссівських процесів при моделюванні інформаційних сигналів // Технічна електродинаміка, тематичний випуск. Проблеми сучасної електротехніки. - Частина 5. – Київ, 2004. - С.117-120.
2. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем. Праці Інституту електродигнаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – Москва: Радио и связь, 1982. - 624 с.
4. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. - 352 с.
5. Марченко Н.Б. Про другий наслідок з нерівності Чебишева та його використання при оцінці точності вимірювань, Інформаційно-діагностичні системи // Матеріали V міжнародної науково-технічної конференції “АВІА-2003”. - Т.1. - Київ, 2003; - С.11.101-11.104.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982. - 296 с.

Одержано 23.09.2004 р.