

УДК 519.711.3:574

М. Стрілецький, аспірант

(Західноукраїнський національний університет (ЗУНУ), Тернопіль, Україна)

МОДЕЛЬ ЛОТКА-ВОЛЬТЕРРА ОЦІНКИ ЗАБРУДНЕНЬ В ЗОНІ ФУНКЦІОНУВАННЯ МАЛОГО МАШИНОБУДІВНОГО ПІДПРИЄМСТВА

UDC 519.711.3:574

M. Striletskyi, PhD. student

LOTKA-VOLTERRA MODEL FOR ASSESSING POLLUTION IN THE OPERATIONAL ZONE OF A SMALL MACHINE-BUILDING ENTERPRISE

Характер моделі Лотка-Вольтерра. Модель Лотка-Вольтерра активно використовується в різних областях діяльності людини. Отримання математичної моделі Лотка - Вольтерра в рамках даного дослідження – оцінка забруднення в результаті діяльності малого підприємства машинобудівного спрямування - не є чимось новим; однак дослідження моделі загалом, в такому прикладному варіанті, має ряд особливостей, а значить володіє новиною. Тут значно більше уваги приділяється аналізу відомої системи рівнянь; увагу зосереджено на вузлових опорних точках і їх вплив на загальний характер стану екосистеми, що включає мале машинобудівне підприємство. Всі вказані фактори вказують на актуальність досліджуваної тематики.

Рівняння Лотка-Вольтерра (рівняння хижак – жертва, дихотомія) – система двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка описує кінетику чисельності популяції з одним типом хижаків і одним типом жертв (тут класичний варіант: один на один). Система рівнянь включає хижаків, жертв і чотири параметри; причому коефіцієнти моделі є сталими в просторі і не змінюються з плином часу. Алгоритм побудови математичної моделі Лотка-Вольтерра перенесено на нові фізичні процеси, а саме на характер забруднення навколишнього середовища.

Модель Лотка-Вольтерра в екологічному підході. Взаємодію забруднювачів (викидів виробництва малим машинобудівним підприємством) з природним середовищем (природою) можна трактувати як частковий випадок моделі Лотка-Вольтерра, а саме математичної системи «хижак – жертва»; тут природа, довкілля (environment, E) виступає як жертва, а забруднювач – хижаком pollution, P). Головне припущення, що закладено в основу моделі, полягає в тому, що навколишнє середовище (природа, довкілля) абсорбує і переробляє забруднення аж до певної межі. В подальшому аналізі все, що стосується моделі Лотка-Вольтерра варто розглядати з позиції екологічної ситуації на малому машинобудівному підприємстві.

Аналіз математичної моделі. Особливість рівнянь Лотка-Вольтерра є те, що розв'язком є автоколивання (прерогатива механічних коливань). Система рівнянь має дві стаціонарні точки (в матаналізі: стаціонарна точка – аргумент функції при якому її похідна дорівнює нулю). Аналіз стійкості стаціонарних точок вказує на те, що одна з них сідлова (нульова; 0, 0 – відсутність забруднювачів); інша є фокусом. Показник Ляпунова для фокуса чисто уявний, тому з лінійного аналізу зробити висновок про стійкість/нестійкість системи неможливо. Однак, для рівнянь Лотка-Вольтерра існує інтеграл руху, який вказує на фазові траєкторії – замкнені криві, всередині яких знаходиться фокус. Інтеграл руху – функція змінних фізичної системи зберігається при її еволюції з часом. Існування руху призводить до того, що величини дихотомії визначаються початковими умовами. В даному випадку граничний цикл – атрактор (лат. attrahere – притягувати, приваблювати) для фазових траєкторій відсутній; цикли мають байдужу стійкість. Суттєвим орієнтиром для повноцінного дослідження є матриця групування – лінеаризація рівнянь Лотка-Вольтерра в стаціонарній точці. Дійсна частина власних чисел матриці групування вказує на стабільність у стаціонарній точці: наявність серед власних значень матриці чисел з додатною дійсною частиною – нестійкий стаціонарний стан; умова стійкості (стабільності) стаціонарного стану

– дійсна частина обох власних значень від'ємна. Критичний випадок – дійсна частина власного значення дорівнює нулю (нейтральна стійкість).

З якісних міркувань в системі природа – забруднювач можна виділити, як правило, три принципово різних сценарії взаємодії. Малі викиди забруднень: навколишнє середовище повністю переробляє викиди виробництва (стійка ситуація). Поміrkована кількість викидів забруднення: довкілля знаходиться в задовільному стані або існує тенденція до загибелі флори (бістабільна ситуація – рослинний покрив залишається тільки місцями). Катастрофічні викиди: повне вимирання природи.

Чисельне моделювання. Для повноти і порівняльної характеристики доцільно виконати і числове моделювання (звісно на комп'ютері). Використано мову програмування Python і модуль `matplotlib.pyplot`. Результат числового моделювання: на основі відібраних величин коефіцієнтів встановлено код фазового портрету, відтворено його візуалізація на заданому квадраті і в оточенні стаціонарної точки; отримані результати відповідають теоретичним прогнозам. Графіки розв'язків представлено у 2D і 3D форматі для випадків $E(0) > P(0)$ і $E(0) < P(0)$.

Відомо, що модель Лотки-Вольтерра яка враховує внутрішньовидову конкуренцію, також описується системою диференціальних рівнянь. Зауважимо, що для чисельного інтегрування системи рівнянь використано класичний метод Рунге-Кутта.

Висновок. Моделювання процесів поширення забруднювачів малого машинобудівного підприємства дозволяє оцінити вплив різних джерел забруднення на навколишнє середовище. Наприклад, модель формування і поширення парникових газів, або модель накопичення масляного туману навколо технологічного обладнання або... Це дозволяє розробляти заходи по зниженню забруднень і оцінити ризики для екосистеми в цілому, а основне – зберігати здоров'я персоналу.

Моделі екологічних процесів, в тому числі за допомогою рівнянь Лотка-Вольтерра і їх модифікацій, – це важливий інструмент для розуміння і управління складними процесами, що проходять в навколишньому середовищі і на малому машинобудівному підприємстві зокрема. Система рівнянь Лотка-Вольтерра дозволяє: дослідити та прогнозувати поведінку екологічної системи, приймати обґрунтовані рішення в подоланні забруднення і досягти стабільності та стійкості, а їх візуалізація тільки підсилює ефективність. Основні методи (детерміновані, стохастичні, просторове моделювання) забезпечують гнучкість і точність підходів до аналізу різних екологічних сценаріїв. Однак, модель Лотка-Вольтерра передбачає процеси, що відбуваються лише в просторово однорідних системах і нічого не вказує про можливий розвиток подій у випадках просторових неоднорідностей. Тому вона, хоч і дає до деякої міри адекватний розв'язок, але є наближеною, спрощеною і як наслідок, усереднене розуміння процесів.