

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ОПОРУ КРУГОВОЇ ПЛАСТИНИ

UDC 530:517.5

V. Kryven, Dr., Prof., V. Shapovalov

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRICAL RESISTANCE OF A CIRCULAR PLATE

Розглянемо задачу про електричний опір електропровідної кругової пластини (рис. 1, область D площини Oxy) із двома ідеально провідними контактами, діаметрально протилежно накладеними на її контур (рис. 1, область D площини Oxy), за умови, що опір такої ж квадратної пластини відносно таких же контактів, накладених на протилежні сторони квадрата, рівний R_0 .

Складність цієї задачі обумовлена тим, що лінії стуму в тілі пластини мають різні довжини і по різному чинять опір проходженню струму.

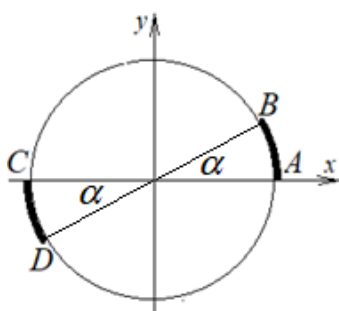


Рисунок 1. Схема задачі. Потовщені лінії – ідеальні електричні контакти

Ми скористаємося фактом гармонічності поля потенціалу напруг $\Delta\varphi = 0$, $(x, y) \in D$ і уведемо аналітичну функцію комплексного аргументу $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ $z = x + iy$, де $\psi(x, y)$ – функція, гармонічно спряжена із $\varphi(x, y)$ [1].

Можна переконатися, що аналітична в області D функція $\omega = f(z)$ конформно відображає область D площини z на прямолінійний прямокутник $A'B'C'D'$ площини ω , причому так, що величина $|B'C'|/|A'B'|$ рівна шуканому опору.

Для розв'язання появленої задачі слід побудувати конформне відображення круга ABCD на прямолінійний прямокутник $A'B'C'D'$. Для цього

відобразимо спочатку круг ABCD на верхню півплощину $\text{Im}t > 0$, довільно вибравши образи трьох точок границі кола: $t_A = 0, t_B = 1, t_C = 2$. Образ четвертої точки однозначно визначається з умови існування потрібного відображення. Його знайдемо із ангармонічного відношення трьох точок: $\frac{z-z_1}{z-z_2} \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{t-t_A}{t-t_B} \frac{t_C-t_B}{t_C-t_A}$, де $z_1 = 0, z_2 = e^{i\alpha}, z_3 = -1, z_4 = -e^{i\alpha}$. Координату точки D у площині t знайдемо розв'язавши останнє рівняння відносно t та поклавши в нього

$z_4 = -e^{i\alpha}$. Відобразимо тепер верхню півплощину $\text{Im}t > 0$ на прямокутник площини ω , скориставшись перетворенням Шварца-Крістоффеля $\omega = \int_0^t F(\vartheta) d\vartheta$, де $F(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)(\vartheta-t_D)}}$.

Розв'язок задачі знайдено

$$R = R_0 \frac{\int_1^2 |F(\vartheta)| d\vartheta}{\int_0^1 |F(\vartheta)| d\vartheta}.$$

Зміна величини опору зі збільшенням довжини контактів наведена на рис. 2.

Література

1. Кривень В.А., Валяшек В.Б., Ясній О.П. Теорія функцій комплексної змінної. Конспект лекцій для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. – Тернопіль : ТНТУ, 2015.– 87 с.

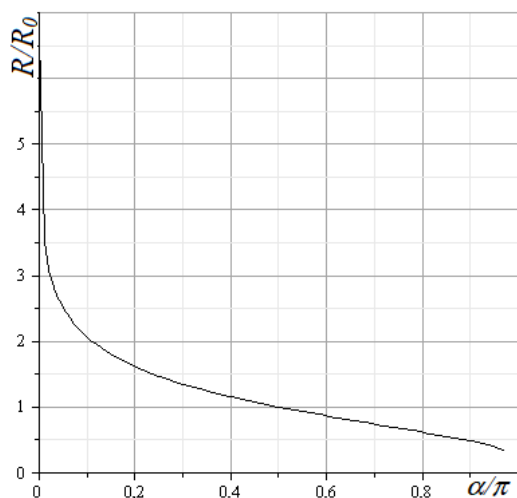


Рисунок 2. Залежність величини електричного опору кругової пластини від кутового розміру контакту