

література



Навчально-методична

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання лабораторних робіт
з дисципліни

ТЕОРІЯ СИСТЕМ ТА СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

для студентів спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Тернопіль
2024

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з курсу «Теорія систем та системний аналіз». Для студентів спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / укл. І. С. Дідич, А. Г. Микитишин. // ТНТУ. – 2024. – 74 с.

Укладачі: Ірина ДІДИЧ, доктор філософії, доц.
Андрій МИКИТИШИН, канд. техн. наук, доц.

Рецензент: Володимир САВКІВ, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
за випуск: Ірина ДІДИЧ, доктор філософії, доц.

Схвалено та рекомендовано до друку:

Протокол кафедри КТ №3 від 10.10.2024 р.

Протокол НМК факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії №3 від 07.11.2024 р.

Методичні вказівки призначені для проведення лабораторних робіт з дисципліни «Теорія систем та системний аналіз» для студентів, які навчаються за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Викладені матеріали приведені з урахуванням модульної системи навчання, рекомендацій до самостійної роботи і індивідуальних завдань, тем лабораторних занять, тестів, екзаменаційних питань, типової форми та вимог для комплексної перевірки знань з дисципліни.

ЗМІСТ

Лабораторна робота №1. Початкове знайомство з роботою програми MathCAD. Обчислення виразів.....	4
Лабораторна робота №2. Матричні операції у MathCAD.....	13
Лабораторна робота №3. Послідовність та її границя. Числові ряди	17
Лабораторна робота №4. Побудова графіків функцій.....	27
Лабораторна робота №5. Границя й неперервність функції.....	36
Лабораторна робота №6. Похідні та диференціали функції однієї змінної....	42
Лабораторна робота №7. Застосування похідних для дослідження функцій...	48
Лабораторна робота №8. Апроксимація експериментальних даних за допомогою методу найменших квадратів.	61
Лабораторна робота №9. Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини.....	68
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	73

Лабораторна робота № 1

Тема: ПОЧАТКОВЕ ЗНАЙОМСТВО З РОБОТОЮ ПРОГРАМИ MATHCAD. ОБЧИСЛЕННЯ ВИРАЗІВ

Мета роботи: Оволодіти початковими навичками роботи з програмою Mathcad.

Зміст роботи:

- 1) Запуск програми Mathcad. Знайомство з робочим вікном Mathcad: головне меню; полицки інструментів (стандартна, інструментів форматування та математична).
- 2) Побудова і обчислення виразів.
- 3) Редагування об'єктів Mathcad.
- 4) Знайомство з вбудованими функціями.
- 5) Числові константи і введення грецьких букв.
- 6) Введення тексту.
- 7) Знайомство з функціями користувача.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка індивідуальних завдань та результати їх виконання.

Теоретичні відомості

1⁰. Робоче вікно Mathcad. Для запуску програми Mathcad потрібно два рази клацнути лівою клавішею миші (ЛКМ) на іконці “Mathcad” (рис. 1), яка знаходиться на робочому столі Windows. В результаті такої дії на екрані з'явиться робоче вікно Mathcad (рис. 1) з головним меню і трьома полицками інструментів: “Стандартна” (Standard), “Форматування” (Formatting) і “Математична” (Math). При цьому автоматично завантажується файл “[Без назви: 1]” (Untitled: 1) – робочий документ Mathcad, який називається “Робочий лист” (Worksheet) і створений на основі шаблону Normal (Звичайний). Вигляд робочого вікна Mathcad після таких операцій показано на рис. 2.



Рис. 1

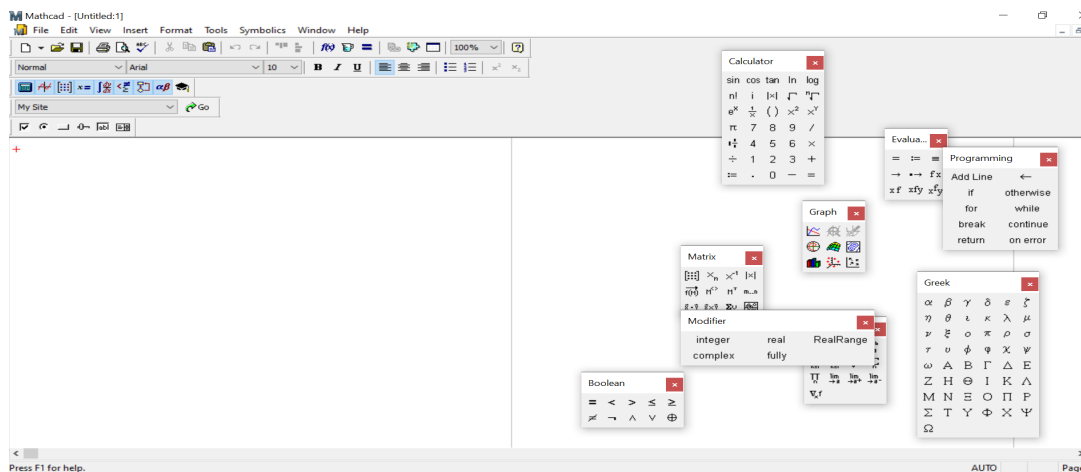


Рис. 2

2⁰. Головне меню. Головне меню Mathcad займає верхній рядок робочого вікна (рис. 3.)

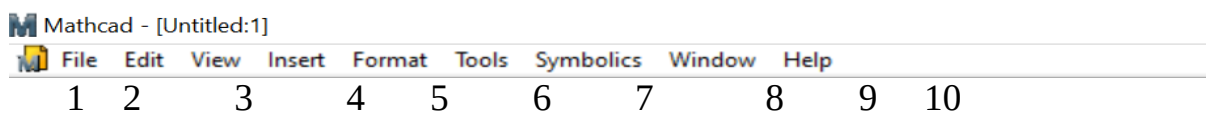


Рис. 3.

Використовуючи команди цього меню та елементи керування діалогових вікон, які при цьому відкриваються, можна виконати будь-які дії. Нижче перераховані пункти меню Mathcad. Номери пунктів відповідають рис. 3.

1. Кнопка розкриття системного меню робочого вікна Mathcad.
2. Файл (File) – команди, які використовуються для створення, відкриття, збереження, передачі, друку файлів та інше.
3. Редагування (Edit) – команди, які використовуються для редагування тексту (копіювання, вставка, вилучення фрагментів тексту і т.д.).
4. Вид (View) – команди, які керують зовнішнім виглядом документу в робочому вікні Mathcad, а також створення файлів анімації.
5. Вставка (Insert) – команди вставки різних об'єктів в документ.
6. Формат (Format) – команди форматування тексту, формул, графіків тощо.
7. Математика (Math) – команди керування обчислювальним процесом.
8. Символи (Symbolics) – команди символічних обчислень.
9. Вікно (Window) – команди розташування вікон з різними документами на екрані.
10. Допомога – команди виклику довідкової інформації і доступ до Центра документації.

Зауважимо, що при наведенні курсора миші на пункт меню на екрані появляється випадаюче меню з командами даного вікна, які викликаються шляхом натискування лівої клавіші миші.

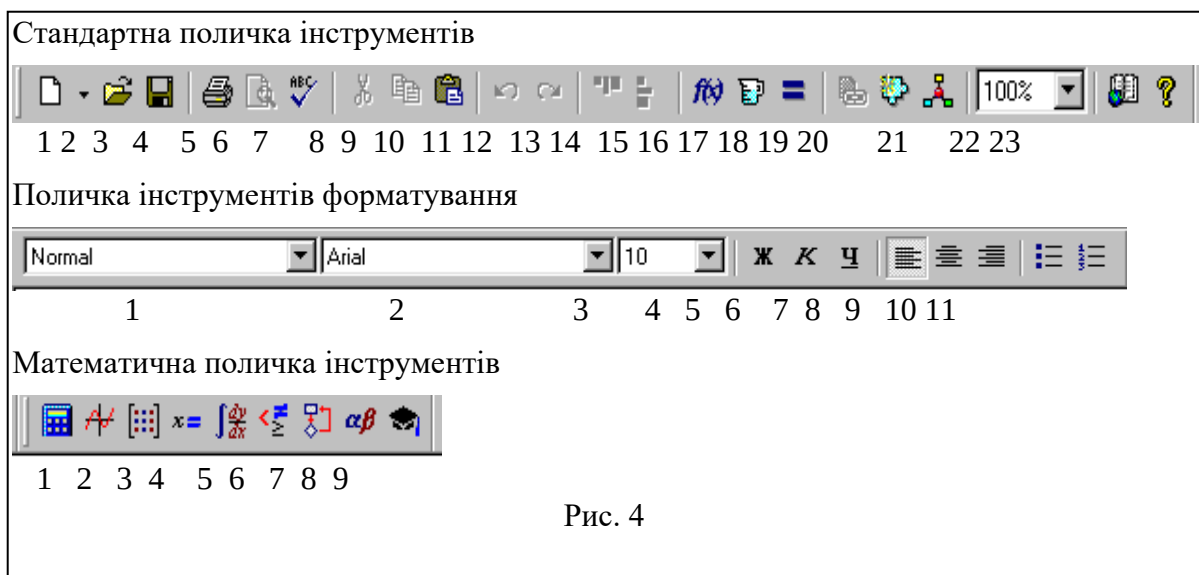
3⁰. Полички інструментів. Поличками інструментів зручно користуватись для швидкого виконання команд, які часто використовуються. В програмі Mathcad є три таких полички: стандартна, інструментів форматування та математична (рис. 4).

- Стандартна (Standart) – дії з файлами, редагування документів, вставка документів тощо.
- Форматування (Formatting) – форматування текстів і формул.
- Математична (Math) – вставка математичних символів і операторів в документи.

Зауважимо, що при наведенні курсора миші на будь-якій кнопці нижче появляється підказка – короткий текст, який пояснює призначення кнопки.

Стандартна поличка інструментів Mathcad містить перераховані нижче інструменти, номери яких відповідають рис. 4.

1. Новий (New) – створення нового документу на основі шаблону Normal (Обычный).
2. Відкриття списків пропонованих шаблонів.



3. Відкрити (Open) – відкрити файл.
4. Зберегти (Save) – зберегти файл.
5. Друкувати (Print) – друк файла.

6. (Print Preview) – перегляд підготовленого до друку документа.
7. (Check Spelling) – включення перевірки правопису (тільки для англomовного тексту).
8. (Cut) – вирізання об'єкту.
9. (Copy) – копіювання об'єкту.
10. (Paste) – вставка об'єкту.
11. (Undo) – відміна попередньої дії (тільки при введенні формул і тексту).
12. (Redo) – відновлення відміненої дії.
13. (Align Across) – вирівнювання виділеної групи об'єктів по горизонталі.
14. (Align Down) – вирівнювання виділеної групи об'єктів по вертикалі.
15. (Insert Function) – відкриття діалогового вікна із списком вбудованих функцій, для їх вибору і вставки.
16. (Insert unit) – відкриття діалогового вікна із списком доступних одиниць вимірювання, для їх вибору і вставки.
17. (Calculate) – перерахування об'єктів.
18. (Insert Hyperlink) – відкриття діалогового вікна для вставки гіперпосилання.
19. (Insert Component) – запуск майстра вставки в робочий документ вікна іншого програмного документу.
20. Mathconnex – зв'язок Mathcad з іншими додатками.
21. (Zoom) – список коефіцієнтів масштабування.
22. (Resource Center) – відкриття центра ресурсів.
23. (Help) – відкриття вікна довідкової системи Mathcad.

Полічка інструментів форматування системи Mathcad містить наступні інструменти, номери яких відповідають рис. 4.

1. (Style) – стиль для тексту і формул.
2. (Font) – шрифт для тексту і формул.
3. (Font Size) – розмір шрифту.
4. (Bold) – напівжирний шрифт.
5. (Italic) – нахилений шрифт.
6. (Underline) – підкреслений шрифт.
7. (Align Left) – вирівнювання тексту по лівому краю.
8. (Align Center) – вирівнювання тексту по центру.
9. (Align Right) – вирівнювання тексту по правому краю.
10. (Bullets) – вставка маркованого списку.
11. (Numbering) – вставка нумерованого списку.

Математична полицка інструментів. При клацанні лівою клавішею миші на кнопці полицки математичних інструментів системи Mathcad відкривається додаткова полицка інструментів. Клацання курсором миші на будь-якому з інструментів викликає вставку відповідного символу або шаблону відповідної математичної операції на місце курсору в робочому документі. Математичну полицку інструментів з відповідними додатковими полицками інструментів показано на рис. 1.8. Нижче перераховані назви полицок математичних інструментів, номери яких відповідають рис. 4 і 5.

1. (Calculator) – шаблони основних математичних операцій, цифр, знаків арифметичних операцій.

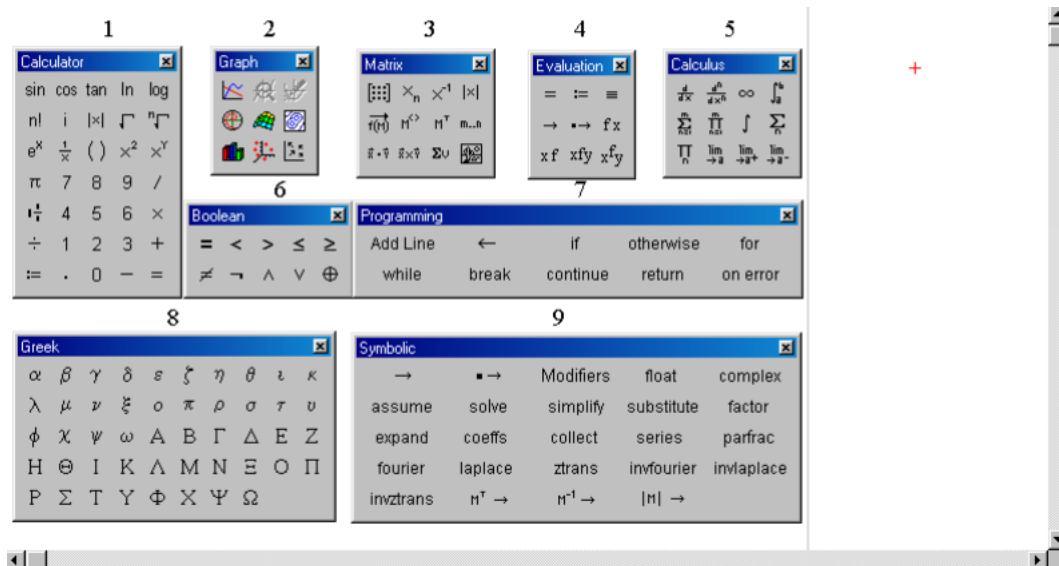


Рис. 5

2. (Graph) – шаблони графіків.
3. (Matrix) – шаблони матриць і матричних операцій.
4. (Evaluation) – оператори присвоювання значень виразів і виведення результатів обчислень.
5. (Calculus) – шаблони диференціювання, інтегрування, сумування, добутків, границь.
6. (Boolean) – знаки булевих операцій.
7. (Programming) – знаки операторів програмування та ін.
8. (Greek) – букви грецького алфавіту.
9. (Symbolic) – оператори символьних обчислень.

4⁰. Приклади виконання завдань

Приклад 1. Обчислити арифметичний вираз, записаний в лівому стовпці табл. 1.

Розв'язання. Один із варіантів запису і обчислення виразу в Mathcad подано в правому стовпці табл. 1, де неправильні дроби вводяться за допомогою відповідного шаблону з полицки Calculator. З цієї ж полицки вводиться операція ділення “÷”, що відповідає операції ділення, заданої символом “:” Особливу увагу потрібно звернути на використання клавіші пропуск.

Таблиця 1

Звичайний запис виразу	Запис і обчислення виразу в Mathcad
$\frac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{6}\right) : 5\frac{8}{15} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0.3 : 0.01}{70} + \frac{2}{7}}{\left(4\frac{2}{3} + 0.75\right) \cdot 3\frac{9}{13}}$	$\frac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{6}\right) \div 5\frac{8}{15} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0.3 \div 0.01}{70} + \frac{2}{7}}{\left(4\frac{2}{3} + 0.75\right) \cdot 3\frac{9}{13}} = 1.$

Завдання 1. Обчислити арифметичний вираз згідно з індивідуальним завданням. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.2.

Таблиця 2

1	$\frac{\left(4\frac{1}{4} - 1,75\right) \cdot 6,25 - \left(75,5 - 73\frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6}}{\left(4 - 2\frac{3}{4}\right) : \frac{4}{5} - \left(2 - \frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{3}{4}}$	9	$\frac{\left(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{16}\right) : 27,7 + 5\frac{1}{7} \cdot 3,85 - 14\frac{3}{20}}{4\frac{1}{40} + 1,75}$
2	$\frac{\left(3,75 + 2\frac{1}{2} - \frac{2\frac{3}{4} + 1,5}{2}\right) : \frac{10}{11}}{\left(2\frac{1}{3} - 1,875 - \frac{2,75 - 1\frac{1}{2}}{2}\right) : \frac{10}{11}}$	10	$\frac{\left(7\frac{8}{9} - 5\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}}{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 : 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$
3	$\frac{0,4 + 8\left(5 - 0,8 \cdot \frac{5}{8}\right) - 5 : 2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8} \cdot 8 - \left(8,9 - 2,6 : \frac{2}{3}\right)\right) \cdot 34\frac{2}{5}} \cdot 90$	11	$\frac{\left(17\frac{1}{3} : 19\frac{1}{2} + 1\frac{1}{12}\right) \cdot 3 - 3\frac{7}{12}}{\left(1,25 - 1\frac{1}{8}\right) \cdot 2\frac{1}{3}}$
4	$\frac{\left(3,75 + 2\frac{1}{2} - \frac{2\frac{3}{4} + 1,5}{2}\right) : \frac{10}{11}}{\left(2\frac{1}{2} - 1,875 - \frac{2,75 - 1\frac{1}{2}}{2}\right) : \frac{10}{11}}$	12	$\frac{\left(\left(27 : 1\frac{2}{7} + 1,2 : 0,04\right) : \frac{1}{70}\right)^{-1}}{\left(\left(3\frac{1}{5} : 4 + 1,5 \cdot 0,4\right) : 0,02\right)}$
5	$\frac{\left(5\frac{3}{5} - 8,8\right) \cdot 5\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^{-1}}{\left(4\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}\right) \cdot \left((-2)^{-1}\right)^{-3}}$	13	$\frac{2\frac{2}{3} \cdot \left(4,5 : \frac{3}{5} - 6,75\right)}{\left(3\frac{1}{3} \cdot 0,3 + 5\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) : \frac{2}{3}}$
6	$\frac{\left(7\frac{4}{15} - 6\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-3\frac{9}{13}\right)^{-1}}{\left(2\frac{2}{3} + 2,75\right) \cdot 6\frac{2}{7}} \cdot 34\frac{2}{7}$	14	$\frac{\left(78,54 : 25,5 - 0,1 : \frac{3}{38}\right) \cdot \frac{25}{68}}{2,4 : 0,8 - 2\frac{2}{3}}$

7	$\frac{3\frac{1}{3}:10+0.175:0.35}{1.75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}} - \frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1.4}{\left(0.5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}$	15	$\frac{0,625\cdot 15\cdot 0,8:\left(-\frac{3}{4}\right)}{(-21,35+19,75)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)}$
8	$\frac{0,1:\frac{3}{38}}{2\frac{109}{120}-5\frac{4}{7}:\frac{104}{7}} + \frac{\left(3,75+19\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{\left(2,3-\frac{1}{2}\right)\cdot (1,8)^{-1}}$	16	$\frac{\left(15\frac{7}{12}-18\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{36}{103}}{\left(21\frac{5}{9}-23\frac{1}{6}\right):29}$

Приклад 2. Обчислити ірраціональний вираз, записаний в лівому стовпці табл. 3.

Розв’язання. Запис і обчислення виразу в Mathcad подано в правому стовпці табл. 3.

Відмітимо, що одержаний розв’язок є наближеним. Точний розв’язок – $\sqrt{3}$. Якщо є потреба, то розв’язок можна дістати з більшою точністю. Це можна зробити виконавши команди головного меню: **Формат ► Результат...**, в результаті виконання яких появиться вікно “**Формат результату**”, де треба задати опцію “**Кількість десяткових**”. Стандартно значення цієї опції – 3 знаки, а максимально – 15. Якщо, наприклад, задати значення 6, то одержимо результат 1.73205.

Таблиця 3

Звичайний запис виразу	Запис і обчислення виразу в Mathcad
$\frac{\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{11-\sqrt{\frac{5}{9}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}$	$\frac{\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{\left(11-\sqrt{\frac{5}{9}}\right)}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}} = 1.7321$

Завдання 2. Обчислити ірраціональний вираз згідно з індивідуальним завданням. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл. 4

Таблиця 4

1	$\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$	9	$\frac{22}{7-\sqrt{5}}+\frac{35}{9-\sqrt{11}}-\frac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$
2	$\sqrt{(\sqrt{2}+2)^2-8\sqrt{2}}+\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2+8\sqrt{2}}$	10	$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}}$
3	$\frac{\sqrt{7}+1}{7\sqrt{7}+7+\sqrt{7}}:\frac{1}{\sqrt{7}-49}+7$	11	$\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{6}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$
4	$13\cdot\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$	12	$\frac{3\sqrt{24}}{\sqrt{90}-4\sqrt{6}}+5\sqrt{1,2}(\sqrt{30}+3\sqrt{2})$
5	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}-2\cdot\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}+2$	13	$3\cdot\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}-\frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}}\cdot\sqrt{2}$
6	$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}+\sqrt{2}$	14	$2\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$
7	$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+8}{\sqrt{3}+2}}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-8}{\sqrt{3}-2}}-2\sqrt{3}$	15	$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-9}$
8	$\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{11}{\sqrt{5}+4}$	16	$\sqrt[3]{3^{-1}}\cdot(\sqrt[3]{2}-1)\cdot(\sqrt[3]{2}+1)$

Приклад 3. Обчислити тригонометричні вирази, записані в лівому стовпці табл. 5.

Розв'язання. Для обчислення тригонометричних виразів використаємо вбудовані функції. Запис і обчислення виразів в Mathcad подано в правому стовпці табл. 5.

Звернемо увагу на те, що при обчисленні тригонометричних функцій, аргументи яких задано в градусах, потрібно після числа градусів набрати слово deg (від англ. слова degree – градуси). Вбудовані функції викликаємо із списку вбудованих функцій, який активізується шляхом натиснення кнопки $\boxed{f(x)}$, яка знаходиться на стандартній полиці інструментів. Константу π можна вставити за допомогою послідовності клавіш: $\boxed{p} \boxed{ctrl} \boxed{g}$.

Таблиця 5

Звичайний запис виразу	Запис і обчислення виразу в Mathcad
$\sin^2 \left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$	$\sin \left(\operatorname{atan}(3) - \operatorname{acot} \left(\frac{-1}{2} \right) \right)^2 = 0.5 \blacksquare$
$\frac{4 \sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ}{2 \cos^2 25^\circ - 1}$	$\frac{4 \cdot \sin(20 \cdot \deg) \cdot \sin(70 \cdot \deg)}{2 \cdot \cos(25 \cdot \deg)^2 - 1} = 2 \blacksquare$
$\sin \left(\frac{\pi}{5} \right) + \sin \left(\frac{13\pi}{15} \right) + \sin \left(\frac{23\pi}{15} \right)$	$\sin \left(\frac{\pi}{5} \right) + \sin \left(\frac{13\pi}{15} \right) + \sin \left(\frac{23\pi}{15} \right) = 0 \blacksquare$

Завдання 3. Обчислити тригонометричні вирази з використанням вбудованих функцій. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.6.

Таблиця 6

1	$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} \right)$	$7 \cos 120^\circ - 5 \sin 150^\circ$	$2\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{6} \sin \frac{\pi}{12}$
2	$2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} \right)$	$3 \operatorname{tg} 135^\circ + 5 \operatorname{ctg} 225^\circ$	$\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{16} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{8}$
3	$2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin 0,6 \right)$	$6 \sin 210^\circ + 8 \cos 240^\circ$	$\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{10}$
4	$2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} \right)$	$\operatorname{ctg} 405^\circ + 2 \cos 660^\circ$	$\left(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \frac{\pi}{3}$
5	$\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{12} \right)$	$4 \sin 1050^\circ + \operatorname{tg} 495^\circ$	$\left(\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
6	$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{9}{11} \right)$	$\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ \cdot 2 \operatorname{tg} 60^\circ$	$8 \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}$
7	$\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13} \right)$	$\cos 68^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ$	$\sin \left(\frac{\pi}{10} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{10} \right)$
8	$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} \right)$	$\cos^2 30^\circ + \frac{1}{2} \sin 30^\circ + 2 \operatorname{tg}^2 60^\circ$	$\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{5} \right)$
9	$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \right)$	$0,75 \operatorname{ctg}^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \cos 60^\circ$	$\sin^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - \cos^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right)$

10	$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$	$\operatorname{tg}^2 120^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + 2\sin 60^\circ$	$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)$
11	$\cos\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$	$\sin 128^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 158^\circ \cdot \cos 52^\circ$	$\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
12	$\cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$	$\sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$	$4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
13	$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$	$\frac{10\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}{1 - 2\sin^2 5^\circ}$	$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$
14	$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$	$\frac{\operatorname{tg} 23^\circ - \operatorname{tg} 68^\circ}{1 + \operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 68^\circ} + 5$	$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$
15	$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$	$\frac{\sin 56^\circ + \sin 34^\circ}{\sin 56^\circ - \sin 34^\circ} - \operatorname{tg} 79^\circ$	$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Приклад 4. Обчислити вираз, записаний в лівому стовпці табл. 7 із використанням функцій користувача та вбудованої функції.

Розв’язання. Оскільки в Mathcad використовуються логарифми двох типів – десяткові і натуральні, то можна ввести такі функції користувача:

$$\log_{10}(x, a) := \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{або} \quad \ln(x, a) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

які базуються на формулі переходу від логарифмів за основою a до логарифмів за іншою основою b : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

В системі Mathcad можна скористатись вбудованою функцією вигляду $\log(\blacksquare, [\blacksquare])$, де перший чорний квадратик – місце для введення виразу, від якого треба обчислити логарифм, а другий квадратик – місце для введення основи логарифма. Якщо основа логарифма 10, то задавати її не обов’язково (про це свідчить наявність квадратних дужок).

Запис і обчислення виразів в Mathcad, із використанням введених функцій користувача і вбудованої функції, подано в правому стовпці табл. 7.

Таблиця 7

Звичайний запис виразу	Запис і обчислення виразу в Mathcad
$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$	$81^{\frac{1}{\log_{10}(3,5)}} + 27^{\log_{10}(36,9)} + 3^{\frac{4}{\log_{10}(9,7)}} = 890 \blacksquare$
	$81^{\frac{1}{\ln(3,5)}} + 27^{\ln(36,9)} + 3^{\frac{4}{\ln(9,7)}} = 890 \blacksquare$
	$81^{\frac{1}{\log(3,5)}} + 27^{\log(36,9)} + 3^{\frac{4}{\log(9,7)}} = 890 \blacksquare$

Завдання 4. Обчислити вирази із використанням функцій користувача:

$$\log_{10}(x, a) := \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{або} \quad \ln(x, a) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

та вбудованою функцією $\log(\blacksquare, [\blacksquare])$. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.8.

Таблиця 8

1	$\log_5 \frac{1}{25} + \log_2 64$	6	$2 \log_4 \frac{1}{128} + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7}$	11	$5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2 \log_{25} 2}$
2	$2 \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \log_3 27$	7	$2 \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$	12	$\log_5 \frac{1}{125} - 2 \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$
3	$\log_2 \log_5 625$	8	$2 \log_4 32 - 4 \log_{16} 8$	13	$\log_{49} 7 + \log_9 243$
4	$\log_7 3 \cdot \log_7 7 \cdot \log_9 17$	9	$4 \log_{16} 128 + 2 \log_9 243$	14	$\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$
5	$\log_{21} 25 \cdot \log_{13} 21 \cdot \log_5 13$	10	$\frac{2}{5} (\log_3 81 + 16^{\log_2 3})^{\log_{85} 25}$	15	$2^{\log_4 (\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9 (\sqrt{3}+2)^2}$

Контрольні запитання:

1. Яке призначення програми Mathcad і для чого її застосовують у технічних розрахунках?
2. Які основні елементи містить робоче вікно Mathcad (головне меню, стандартна, форматовувальна та математична панелі інструментів)?
3. Як у Mathcad створюється новий документ і в якому форматі він зберігається?
4. Які типи математичних об'єктів можна вводити в робочий аркуш (числові, текстові, графічні, символні)?
5. Яким чином у Mathcad виконуються арифметичні операції та вставляються математичні символи?
6. Як у середовищі Mathcad виконати виклик вбудованої функції і де вона знаходиться?
7. Як можна ввести грецькі символи та інші спеціальні позначення у формули?
8. У чому полягає різниця між числовими та символними обчисленнями в Mathcad?
9. Які основні інструменти редагування об'єктів передбачено в середовищі Mathcad?
10. Як використовуються функції користувача та вбудовані функції $\log()$ і $\ln()$ при обчисленні логарифмічних виразів?

Лабораторна робота № 2
Тема: МАТРИЧНІ ОПЕРАЦІЇ У МАТНСАД

Мета: оволодіти навичками матричних обчислень у пакеті Mathcad.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Виконати елементарні матричні операції відповідно до Mathcad-документів, що зображені на рис 2.1 та рис. 2.2.

2. Розробити Mathcad-документ, в якому задаються квадратні матриці M та R розмірністю N , елементи яких обчислюються згідно з табл. 2.1, причому i позначає номер рядка, j – номер стовпчика. Для заданих матриць M та R необхідно виконати наступні розрахунки:

$$M^T; R^T; (M + R)^{-1}; M \cdot R^{-1}; M^T + 2R^{-1}; M - R M^T + R. \quad (2.1)$$

Таблиця 2.1

№ варіанта	Розмірність матриць N	Вихідні дані	
		Елементи матриці	
		M	R
1	4	$M_{i,j} = 4i + j$	$R_{i,j} = 0,1j - 2i$
2	5	$M_{i,j} = \frac{8}{i} - 2 + j$	$R_{i,j} = \sin(j) - i$
3	3	$M_{i,j} = \sin(\pi \cdot i) \cdot j$	$R_{i,j} = \cos(\pi \cdot j) + 3i$
4	6	$M_{i,j} = 0,1j - 2^{0,1i}$	$R_{i,j} = 2j - i$
5	7	$M_{i,j} = \operatorname{tg}(\pi \cdot i) + 2$	$R_{i,j} = \ln(2j - i + 10)$
6	3	$M_{i,j} = 2i + 4j - 9$	$R_{i,j} = 4,5i - 2j + 9$
7	4	$M_{i,j} = \sin i - j$	$R_{i,j} = j^2 - 3i$
8	5	$M_{i,j} = 3i - 2j + ij$	$R_{i,j} = ij - 2i + 1$
9	6	$M_{i,j} = 8i - 2j$	$R_{i,j} = \cos^2 i + j$
10	7	$M_{i,j} = 2i - j + 10$	$R_{i,j} = 8\sin i + j^2$
11	4	$M_{i,j} = 100j - 2^i$	$R_{i,j} = \sqrt{i + j}$
12	5	$M_{i,j} = \sqrt{i - 2j}$	$R_{i,j} = i + 2j$
13	6	$M_{i,j} = i + 4j - 8$	$R_{i,j} = i + j - 8j^2$
14	3	$M_{i,j} = \operatorname{ctg}(\pi \cdot i - 2) + 2$	$R_{i,j} = i - 3j + \pi$
15	5	$M_{i,j} = \frac{6}{j+1} + 1$	$R_{i,j} = 6j - i^2$

Лабораторна робота №2

Матричні операції у Mathcad

Виконав:

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{- вектор} \quad V_0 = 1 \quad V_3 = 7 \quad \text{- елементи вектора}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця} \quad M_{0,0} = 1 \quad M_{1,0} = 3 \quad \text{- елементи матриці}$$

$$a := 1 \quad b := 3 \quad M1 := \begin{bmatrix} a+1 & b+2 & a \\ \sin(2a) & 2 & b \end{bmatrix} \quad \text{- матриця з елементами-функціями}$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.909 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N_{0,0} := 10 \quad N_{1,0} := 14 \quad \text{- поелементне задавання матриці}$$

$$N_{0,1} := 12 \quad N_{1,1} := 16 \quad N = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Виділення з матриці стовпчика та рядка:} \quad N^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \widehat{N} = [14 \ 16]$$

Обчислення векторів значень функцій:

$$X := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.467 \end{bmatrix} \quad \sin(X) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.296 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

Задавання матриці за допомогою ранжованих змінних:

$$i := 0..3 \quad j := 0..3 \quad S_{i,j} := 4 \cdot i + j \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

Додавання скаляра до матриці:

$$2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad 5 + S = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Множення матриці на скаляр:

$$10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} \quad 32 \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 32 & 64 & 96 \\ 128 & 160 & 192 & 224 \\ 256 & 288 & 320 & 352 \\ 384 & 416 & 448 & 480 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.1 – Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad

Додавання та віднімання матриць:

$$N1 := \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix} \quad N2 := \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \quad N1 + N2 = \begin{bmatrix} 16 & 40 \\ 47 & 49 \end{bmatrix}$$

$$N3 := N1 - N2 \quad N3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$$

Матричне множення:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 2 & 0.2 \\ 3 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1.4 \\ 32 & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$Q := N1 \cdot N2 \quad Q = \begin{bmatrix} 239 & 440 \\ 511 & 1.1 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Транспонування матриць:

$$N1 = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix} \quad N1^T = \begin{bmatrix} 13 & 37 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = [1 \ 2 \ 3]$$

$$X := N1 + 4 \cdot N2^T \quad X = \begin{bmatrix} 25 & 60 \\ 117 & 76 \end{bmatrix}$$

Обчислення зворотної матриці:

$$N1 = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix} \quad N1inv := N1^{-1} \quad N1inv = \begin{bmatrix} -0.182 & 0.091 \\ 0.168 & -0.059 \end{bmatrix}$$

$$\text{Перевірка:} \quad N1 \cdot N1inv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сума елементів вектора:

$$\sum \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$$

Функція, що повертає одиничну матрицю заданої розмірності:

$$\text{identity}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.2 – Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad відповідно до рис. 2.1 та рис. 2.2.
3. Вихідні дані відповідно до варіанту з табл. 2.1.
4. Mathcad-документ, в якому для матриць M та R проведені розрахунки відповідно до виразів (2.1).
5. Висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що являє собою V після виконання команди Mathcad?

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. Для чого використовуються наведені команди Mathcad?

$$V_0 = 1$$

$$M_{0,0} = 1$$

$$N^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}^1 = \begin{bmatrix} 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$N1^T$$

$$N1^{-1}$$

3. Що обчислює команда Mathcad?

$$\sum \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Для чого використовується команда Mathcad?

identity

Лабораторна робота № 3

Тема: ПОСЛІДОВНІСТЬ ТА ЇЇ ГРАНИЦЯ. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для дослідження збіжності числових послідовностей та знаходження їх границь; дослідження збіжності числових рядів та знаходження їх сум.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для дослідження збіжності числових послідовностей та знаходження їх границь.

2. Вивчити основні можливості програми Mathcad для дослідження збіжності числових рядів та знаходження їх сум.

3. Виконати запропоновані завдання з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1⁰. Поняття про числову послідовність та її границю

О з н а ч е н н я. Якщо кожному натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ за певним законом поставлено у відповідність число x_n , то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

називають **числовою послідовністю** і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають **членами послідовності**, а x_n – **загальним членом послідовності**.

О з н а ч е н н я. Число a називається **границею числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого, як завгодно малого додатного числа ε , знайдеться такий номер N ($N = N(\varepsilon)$), що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ має місце нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Якщо число a є границею числової послідовності $\{x_n\}$, то пишуть:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ або } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Послідовність $\{x_n\}$, яка має границю a , називається **збіжною до a** (або просто **збіжною**). Послідовність, яка не є збіжною, називається **розбіжною**.

За допомогою логічних символів (кванторів) $\forall$ (для всіх, для всякого), $\exists$ (існує, знайдеться) і $\rightarrow$ (слідuje) означення границі числової послідовності можна записати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Приклад 1. Користуючись програмою Mathcad знайти перші п'ять членів послідовностей, загальні члени яких задаються формулами:

$$1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}; \quad 2) y_n = y_{n-1} + y_{n-2}, \text{ де } y_1 = 1, y_2 = 1, n = 2, 3, \dots$$

Послідовність 2) відома в математиці як послідовність Фібоначчі, а члени її – як числа Фібоначчі.

Для побудови послідовностей доцільно, по-перше, скористатись дискретними змінними. По-друге, якщо ми хочемо одержувати члени послідовності у вигляді звичайних дробів, то потрібно виконати послідовність команд: **Формат / результат... / Fraction**. По-третє, по замовчуванню результат буде виданий у вигляді матриці-стовпця, а якщо ви хочете вивести його у вигляді матриці-рядка, то змінну, яка задає послідовність, потрібно транспонувати. Результат розв'язання завдання наведено на Лістингу 1

Лістинг 1

ORIGIN := 1

$$1. \quad n := 1..5 \quad x_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad x^T = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \right)$$

$$2. \quad y_1 := 1 \quad y_2 := 1 \quad n := 3..8 \quad y_n := y_{n-1} + y_{n-2} \quad y^T = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21)$$

Зауваження. Десять і більше членів послідовності виводяться десятковими числами у вигляді таблиці (Лістинг 2)

Лістинг 2

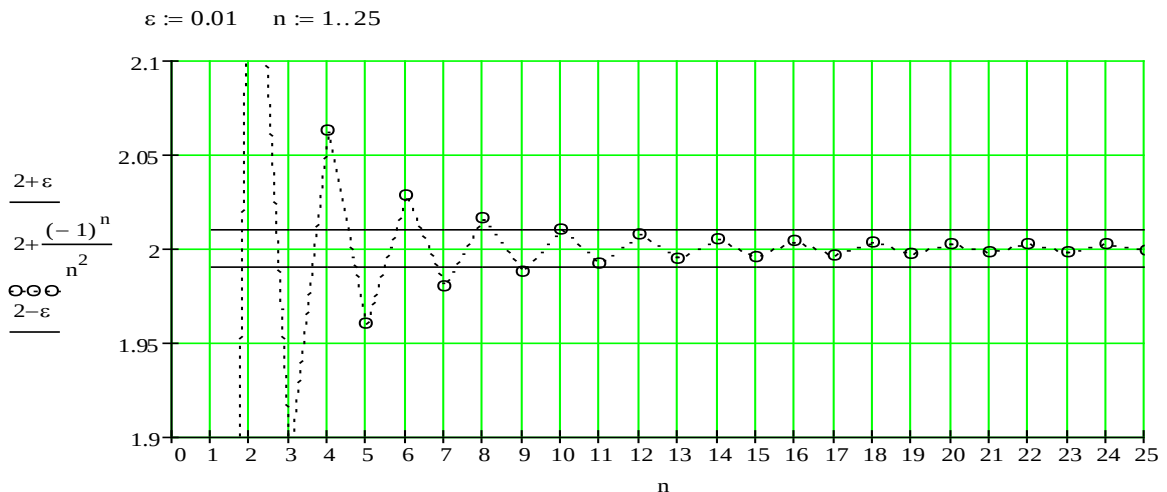
$$n := 1..10 \quad x_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$x^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	-0.333	0.25	-0.2	0.167	-0.143	0.125	-0.111	0.1	-0.091

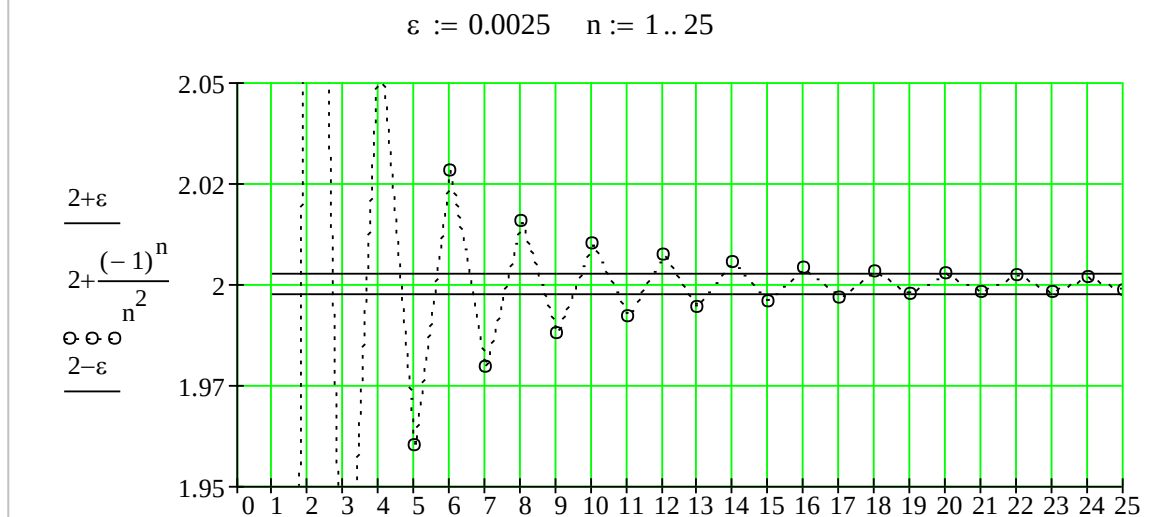
Приклад 2. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 2$. Скільки членів послідовності $\{x_n\}$ лежить поза околom $(2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.0025$?

Оскільки $|x_n - 2| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, то нерівність $|x_n - 2| < \varepsilon$ виконуватиметься при

Лістинг 3

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, звідки $n > \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$, де квадратні дужки означають цілу частину числа. Отже, у першому випадку $n > 10$, а у другому $n > 20$. З цього випливає, що у першому випадку поза вказаним околom знаходяться 10 членів послідовності, а у другому – 20. Про це свідчить і графічне розв’язання даної задачі, яке подано на лістингу 3 та лістингу 4.

Лістинг 4



В програмі Mathcad є три операториⁿ обчислення границь: просто границі, правосторонньої і лівосторонньої границь:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Для обчислення границі потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці і ввести вираз справа від слова **lim**; ввести ім'я змінної і її граничне значення; клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Приклад 3. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$, 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n})$,

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

Результати обчислення границь показано на Лістингу 5

Лістинг 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right] \rightarrow 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n \rightarrow \exp(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i}} \rightarrow \frac{4}{3}$$

2⁰. Числові ряди

Рядом називають нескінченну суму вигляду

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n. \quad (2)$$

Числа $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ називаються членами ряду; U_n – n -м членом ряду, а $S_n = U_1 + \dots + U_n$ – частинною сумою ряду.

Означення. Числовий ряд (2) називається *збіжним*, якщо існує скінчена границя S його частинних сум, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S називається *сумою* ряду. Символічно це

записується так $S = U_1 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченої границі

не має, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд називається *розбіжним*.

Ряд вигляду $a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – *геометрична прогресія*, збіжний при

$|q| < 1$ і сума $S = \frac{a}{1-q}$, де $a \neq 0$ – перший член, а q – знаменник прогресії.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ називається *гармонічним*. Він є розбіжним.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ називається *узагальненим гармонічним*. Він є розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$ і збіжним, якщо $\alpha > 1$.

Необхідна умова збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Достатня умова розбіжності. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ розбіжний.

Приклад 4. Користуючись означенням збіжності числового ряду та програмою Mathcad, встановити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Для знаходження n -ї частинної суми ряду введемо функцію користувача $S(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ і обчислимо її за допомогою символного знака дорівнює “ $\rightarrow$ ”. Для встановлення збіжності (розбіжності) ряду потрібно знайти границю n -ї частинної суми при $n \rightarrow \infty$. Послідовність виконання вказаних дій, показано на Лістингу 6. На цьому ж лістингу показано безпосереднє обчислення суми числового ряду за допомогою символного оператора сумування:

Лістинг 6

$$S(n) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} \quad S(n) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \rightarrow$$

Користуючись програмою Mathcad легко перевірити, що для заданого ряду необхідна умова збіжності ряду виконується, а саме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot (n + 1)} \rightarrow 0$$

Приклад 5. Користуючись програмою Mathcad дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n + 1}.$$

Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності ряду. Для цього знайдемо границю n -го члена ряду при $n \rightarrow \infty$. На Лістингу 7 наведено відповідну границю n -го члена ряду, яка дорівнює $\frac{1}{100}$ (виконується достатня умова розбіжності). Це означає, що ряд розбіжний. Це легко перевірити безпосередньо, обчисливши суму числового ряду за допомогою символьного оператора сумування:

Лістинг 7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n + 1} \rightarrow \frac{1}{100} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n + 1} \rightarrow \infty$$

3⁰. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності

Теорема 1. (ознака порівняння). Нехай задано два знакододатні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ і для всіх n $U_n \leq V_n$. Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

▼ Порівняємо даний ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (див. прикл. 4). Маємо:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Звідси, згідно з теоремою 1, випливає, що досліджуваний ряд збігається. Крім цього, з нерівності

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

та властивості, що на збіжність ряду не впливає відкидання (приєднання) скінченного числа його перших членів, випливає, що узагальнений гармонічний ряд при $\alpha = 2$, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ збіжний. Суми усіх трьох рядів, знайдених за допомогою програми Mathcad,}$$

наведено на Лістингу 8

Лістинг 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow -1 + \frac{1}{6} \cdot \pi^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \rightarrow 1$$

Теорема 2. (гранична ознака порівняння). Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ знакододатні, причому існує скінчена, відмінна від нуля границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = a$, ($a \neq 0, a \neq \infty$), тоді ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots$$

Для доведення збіжності даного ряду використаємо граничну ознаку порівняння, взявши для порівняння збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для цього знайдемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1. \quad \text{З цього випливає (теорема 2), що}$$

досліджуваний ряд збігається. Сума, знайдена за допомогою програми Mathcad (символьно і чисельно), має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1i \cdot \text{Psi}(1 - 1i) - \frac{1}{2} \cdot 1i \cdot \text{Psi}(1 + 1i)$$

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2 + 1} = 1.06672 \quad \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n^2 + 1} = 1.07657 \quad \sum_{n=1}^{100000} \frac{1}{n^2 + 1} = 1.07666$$

Теорема 3. (ознака Даламбера). Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = D$. Тоді якщо $D < 1$, то ряд збіжний і розбіжний, якщо $D > 1$.

Приклад 7. Користуючись програмою Mathcad та ознакою Даламбера дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n \cdot n!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)}.$$

Результати дослідження даних рядів за допомогою програми Mathcad, наведено на Лістингу 9:

Лістинг 9

$$\begin{aligned}
 1. \quad U(n) &:= \frac{n \cdot (n+1)}{2^n \cdot n!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n+1)}{U(n)} \rightarrow 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{2^n \cdot n!} \rightarrow \frac{5}{4} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right) \\
 2. \quad U(n) &:= \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n+1)}{U(n)} \rightarrow 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \pi \\
 \sum_{n=1}^{100} \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} &= 2.56253 \times 10^{26} \quad \sum_{n=1}^{1000} \frac{2^n}{n \cdot (n+1)} = 2.14518 \times 10^{295}
 \end{aligned}$$

З наведених результатів бачимо, що перший ряд збіжний ($D = 0 < 1$), а другий – розбіжний ($D = 2 > 1$).

Теорема 4. (ознака Коші). Нехай для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ існує границя (скінчена чи нескінчена) $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n}$. Тоді, якщо $K < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збіжний і розбіжний, якщо $K > 1$.

Приклад 8. Користуючись програмою Mathcad та ознакою Коші дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Результати дослідження даних рядів за допомогою програми Mathcad, наведено на Лістингу 10:

Лістинг 10

$$\begin{aligned}
 1. \quad K(n) &:= \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{K(n)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{signum}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^n \right) \cdot \left(\left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^n \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) &\rightarrow 0 \\
 2. \quad K(n) &:= \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{K(n)} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \exp(1)
 \end{aligned}$$

З наведених результатів бачимо, що перший ряд збіжний ($K = 0 < 1$), а другий – розбіжний ($D = \frac{e}{2} > 1$).

4⁰. Знакозмінні ряди

Розглянемо ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n-1} U_n + \dots, \text{ де } U_n > 0.$$

Теорема 6 (ознака Лейбніца). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$ збігається, якщо $U_{n+1} < U_n$, $n=1, 2, \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Абсолютна і умовна збіжності. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ – знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ утворений з модулів цього ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ називають умовно збіжним.

Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ збігаються абсолютно і мають відповідно суми S_1 і S_2 , то збігається абсолютно і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (U_n V_1 + U_{n-1} V_2 + U_{n-2} V_3 + \dots + U_1 V_n).$$

Цей ряд називається добутком рядів (за Коші). Його сума дорівнює $S_1 S_2$.

Приклад 9. Дослідити, який з рядів збігається абсолютно, умовно чи розбігається:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{n+1}.$$

1). Складемо ряд з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$ і порівняємо його зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для кожного члена ряду із абсолютних значень виконується нерівність $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $n=1, 2, 3, \dots$

Згідно з ознакою порівняння, ряд з абсолютних значень збігається, а це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ збігається абсолютно.

2). У цьому випадку ряд, складений з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ не є абсолютно збіжний. Для дослідження його неабсолютної збіжності застосуємо ознаку Лейбніца. У даному випадку обидві умови ознаки Лейбніца виконуються:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ збігається неабсолютно.

3). У цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності числового ряду тому, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 2 \neq 0$.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{n+1}$ – розбіжний.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти границі:

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}; \\ & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+2}; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n+1}; \quad 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}; \\ & 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right); \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}} \right); \\ & 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right); \quad 11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}. \end{aligned}$$

2. Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, які ряди збігаються, і знайти їхні суми:

$$\begin{aligned} & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}; \\ & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 5n + 4}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+3}. \end{aligned}$$

3. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

4. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2 + 4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3 + 2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-2)^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

5. Використовуючи ознаку Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2) \cdot 2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{\sqrt{n} \cdot 3^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n!}.$$

6. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3n^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+1)}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}}.$$

7. Встановити, які з наступних рядів збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2n+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}.$$

8. Знайти добуток абсолютно збіжних рядів

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \quad \text{і} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$$

Дослідження рядів з допомогою програми Mathcad наведено на Листингу 11.

Зауважимо, що обчислення суми ряду 1) можна знайти тільки наближено і тільки для конкретно заданих значень параметра α .

Лістинг 11

Дослідження збіжності ряду при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{\left| \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right|}{n^2} = 0.974563 \qquad \sum_{n=1}^{1000000} \frac{\left| \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right|}{n^2} = 0.975166$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow \ln(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n}{n+1} \rightarrow \infty$$

Контрольні запитання:

1. Що таке числова послідовність і як визначається її загальний член?
2. Сформулюйте означення границі послідовності та наведіть його запис мовою кванторів.
3. Які умови збіжності та розбіжності послідовності реалізуються у програмі Mathcad?
4. Яким чином у Mathcad можна побудувати таблицю або графік послідовності?
5. Які оператори Mathcad використовуються для обчислення границь (звичайних, правих і лівих)?
6. Дайте означення числового ряду та частинної суми ряду.
7. У чому полягає необхідна та достатня умови збіжності числового ряду?
8. Назвіть основні ознаки збіжності рядів, реалізовані в Mathcad (ознака порівняння, Даламбера, Коші, Лейбніца).
9. Як за допомогою Mathcad перевірити абсолютну та умовну збіжність знакозмінних рядів?
10. Як можна використати Mathcad для дослідження збіжності узагальнених гармонічних рядів та обчислення їхніх сум?

Лабораторна робота № 4

Тема: ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для побудови графіків функцій, заданих в декартовій та полярній системах координат. Набути найпростіші навички редагування та форматування графіків.

Зміст роботи

2. Вивчити основні можливості програми Mathcad для побудови графіків функцій, заданих в різних формах.

2. Вивчити основні можливості програми Mathcad для побудови на одному рисунку декількох графіків, їх редагування та форматування.

3. Виконати запропоновані завдання з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1⁰. Загальні відомості

В програмі Mathcad передбачено побудову різних типів графіків, які можна розбити на дві великі групи: двовимірні (на площині) і тривимірні (в просторі). У свою чергу двовимірні графіки можна будувати в декартовій системі координат (X–Y Plot) і полярній системі координат (Polar Plot). Використовуючи тривимірну графіку можна будувати: графік тривимірної поверхні (Surface Plot); графік лінії рівня (Contour Plot); тривимірну гістограму (3D Bar Plot); тривимірну множину точок (3D Scatter Plot); векторне поле (Vector Field Plot). Зауважимо, що ділення на типи дещо умовне, оскільки керуючи установками відповідних параметрів, можна створити комбінації різних типів графіків. Більше того, всі графіки створюються майже однаково, за допомогою полочки інструментів Graph (Графік).

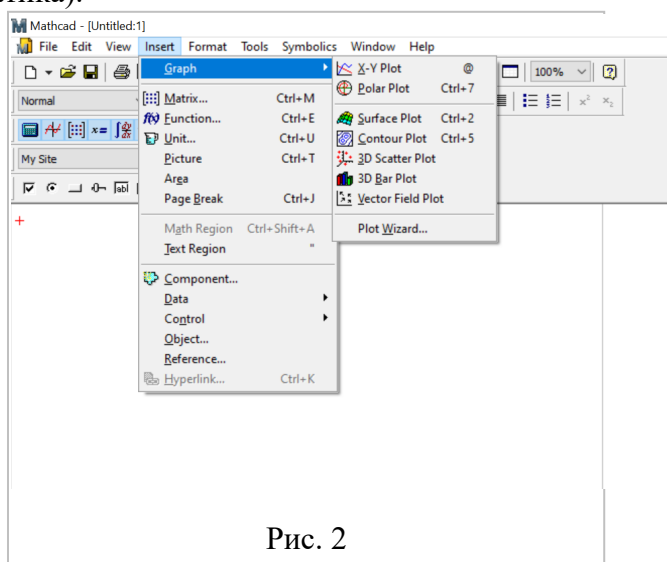
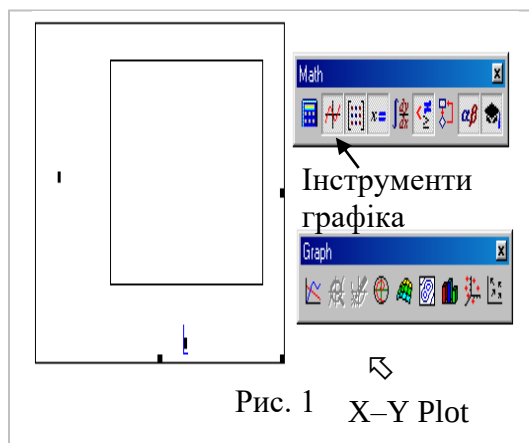
Зокрема, для побудови графіка в прямокутній декартовій системі координат потрібно:

1. Розмістити курсор введення в те місце робочого листа, куди потрібно помістити рисунок.

2. Якщо на екрані відсутня полочка Graph (Графік), то викликати її клацнувши на кнопці зі зображенням графіка (Інструменти графіка), яка знаходиться на полочці Math (Математика).

3. Натиснути на полочці Graph (Графік) кнопку “Декартів графік” (X–Y Plot) для створення декартового графіка.

4. В результаті таких дій на робочому полі появиться порожня область графіка з одним або декількома місцями для заповнення, в які вводяться імена змінних або функцій, які повинні бути зображені на графіку. При побудові графіка в декартовій системі координат два виділені місця відповідають осям x (нижнє) і y (зліва).



Якщо імена даних введені правильно, то на екрані з'явиться графік. Створений графік можна змінювати, вводючи нові дані або форматовувати його зовнішній вигляд.

Крім розглянутого способу, побудову графіка можна здійснити за допомогою команд головного меню **Вставка ► Графік ► Точка X–Y**, показаного на рис. 2, або – комбінації клавіш **Shift+2**. Аналогічним способом можна будувати графіки інших типів.

Для побудови X–Y-графіків потрібно два ряди даних, які відкладаються по осях x і y . Розглянемо декілька способів побудови X–Y-графіків.

2⁰. Побудова X–Y-графіка двох векторів

Найбільш простий і наочний спосіб побудувати графік в декартовій системі координат – це сформувати два вектори даних, які будуть відкладені на осях x і y . Послідовність

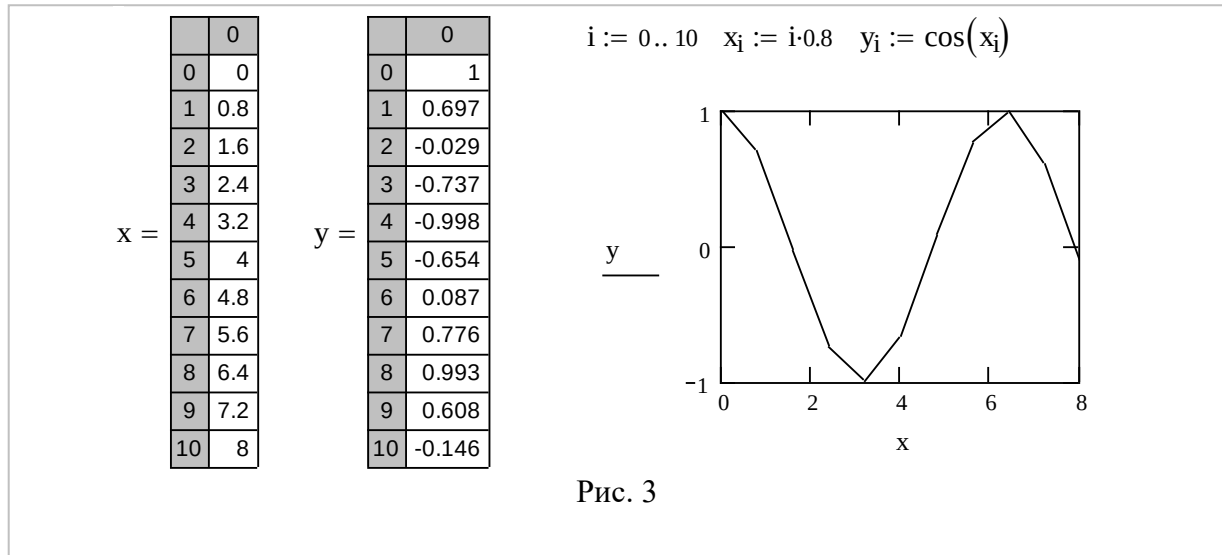


Рис. 3

побудови графіка за допомогою двох векторів x і y , показана на рис. 3. Для побудови двох векторів x і y використано дискретну змінну i . Таблиця компонент векторів одержується шляхом введення імені вектора і натисненням клавіші “=”. В результаті одержується графік, утворений точками, які відповідають парам елементів векторів, з’єднаних послідовно відрізками прямих ліній.

Зауважимо, що такий самий результат можемо дістати, якщо в місця заповнення по осях введемо змінні з індексами x_i і y_i . При цьому таблиці компонент векторів виводитись не будуть.

3⁰. Швидка побудова X–Y-графіка функції

Швидка побудова графік будь-якої скалярної функції $y = f(x)$ полягає у введенні функції в одне із двох місцезаповнень, наприклад, $f(x)$ по осі ординат, а ім’я аргументу x – по осі абсцис (рис. 4). В результаті такої дії програма Mathcad сама буде графік функції у межах значень аргументу, які по замовчуванню змінюються від -10 до 10.

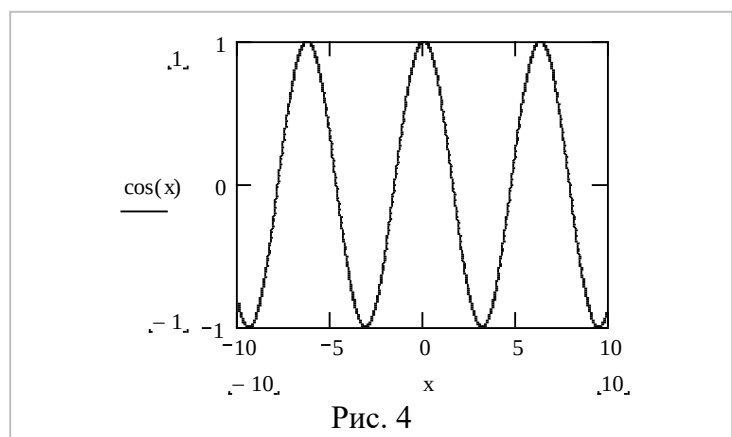


Рис. 4

Зрозуміло, що при потребі можна змінити діапазон значень аргументу, і графік автоматично буде побудовано для нього.

Необхідно зауважити, що якщо змінній, яка є аргументом функції, було присвоєно деяке значення за допомогою дискретної змінної до побудови в документі графіка, то замість швидкої побудови графіка буде побудований графік функції із врахуванням цього значення, тобто буде побудований графік функції від векторного аргументу. Приклади побудови двох таких графіків наведено на рис. 5.

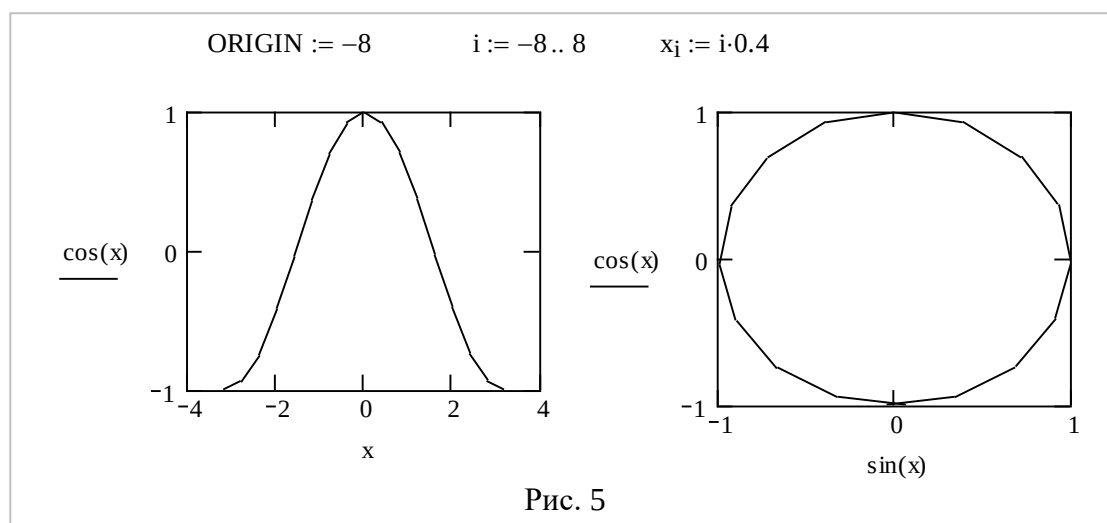


Рис. 5

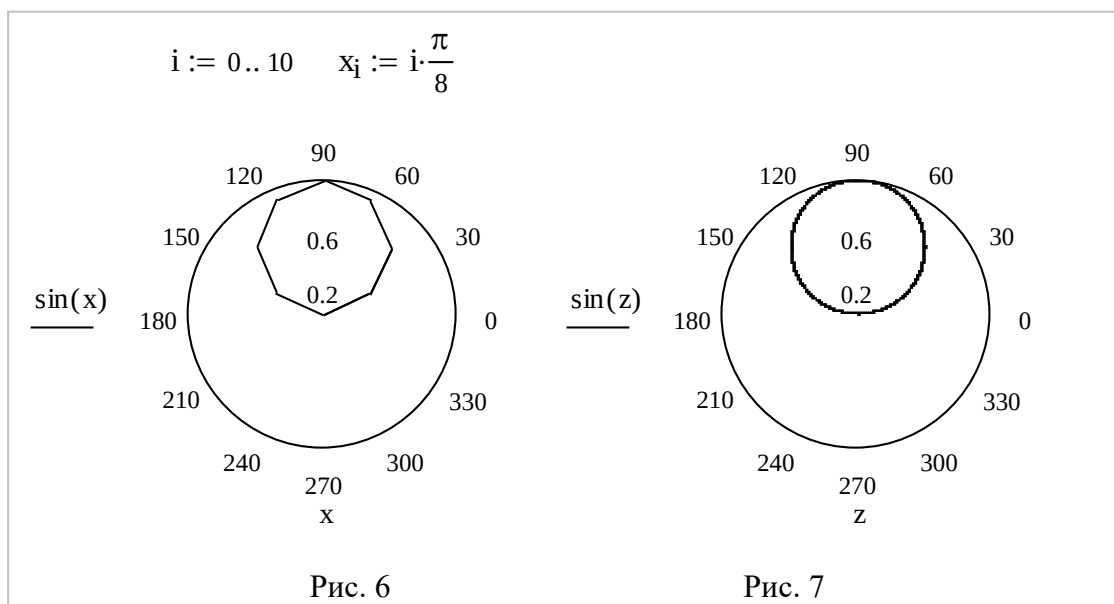
4⁰. Побудова графіків у полярній системі координат

У полярній системі координат кожна точка задається кутом φ та модулем радіус-вектора $\rho(\varphi)$. Таким чином, рівняння $\rho = \rho(\varphi)$ або $\rho = f(\varphi)$ називається *рівнянням лінії в полярних координатах* або *полярним рівнянням*. Графік функції будується у вигляді лінії, яку описує кінець радіус-вектора при зміні кута φ у визначених межах (звичайно від 0 до 2π).

Зв'язок між прямокутними декартовими і полярними координатами задається формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

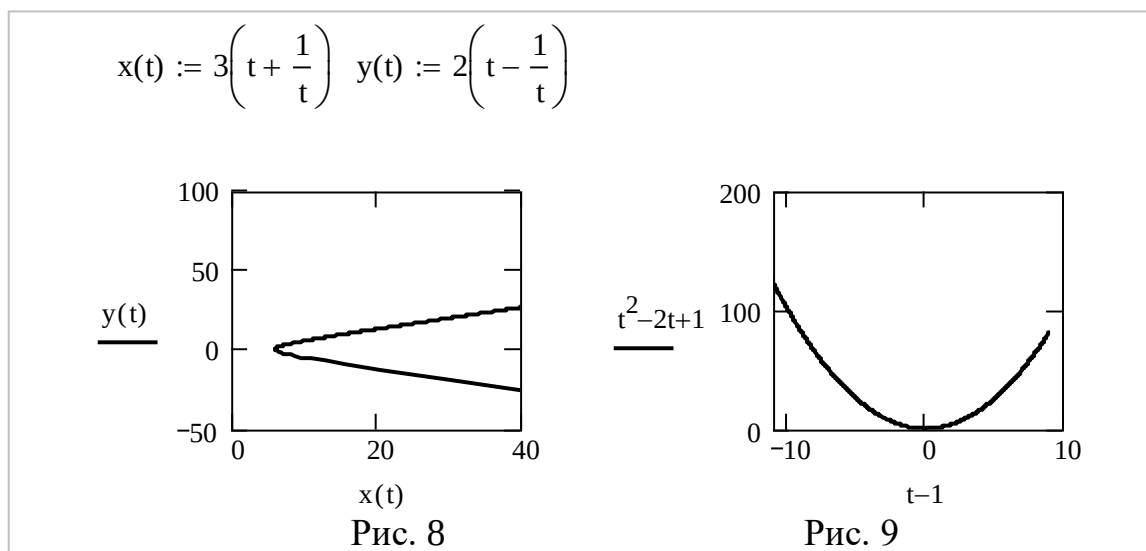
Надалі функція $y = f(x)$ (або від інших змінних) буде вважатися заданою в полярних координатах, якщо змінні x і y – полярний кут і полярний радіус, відповідно. Для побудови графіка функції, заданої в полярних координатах, необхідно натиснути кнопку Polar Plot з полицки Graph і вставити в місця заповнення імена аргументів і функцій. При цьому полярний кут (аргумент) вставляється в нижню позицію для заповнення, а полярний радіус (функція) – в ліву позицію для заповнення. Так само, як і при побудові графіків в декартовій системі координат, на осях можуть бути відкладені два вектори (рис. 6), елементи векторів і дискретних змінних у різних комбінаціях, а також може бути виконана швидка побудова графіка (рис. 7).



5⁰. Графік функції, заданої параметрично

Якщо залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t , тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$, де t змінна, яка називається параметром, то кажуть, що функція задана параметрично. Графіки функцій, заданих параметрично, будуються аналогічно, як і функцій, заданих в декартовій системі координат. Але найбільш зручно будувати його заносючи у нижню позицію для заповнення функцію $x(t)$, а в ліву – функцію $y(t)$, які задаються безпосередньо або описуються як функції користувача.

Приклади побудови графіків функцій, заданих параметрично, наведено на рис. 8, 9.

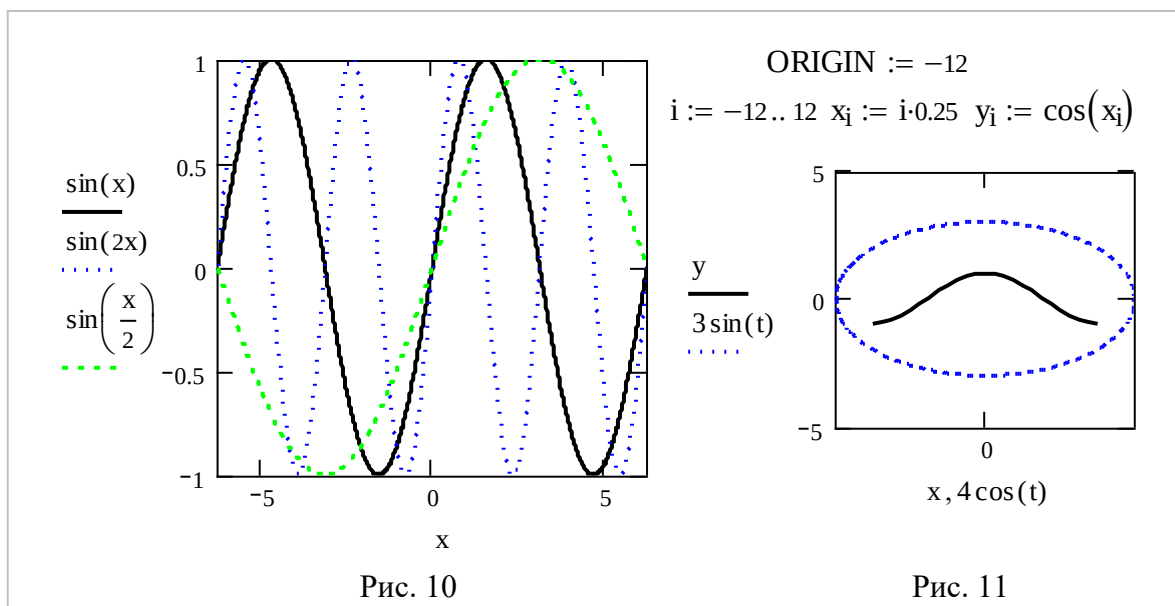


Зауважимо, що на рис. 9 зображено графік функції, яка є параметричною формою явно заданої функції $y = x^2$. Дійсно, виключивши з рівнянь $x = t - 1$ і $y = t^2 - 2t + 1$ параметр t , дістанемо:

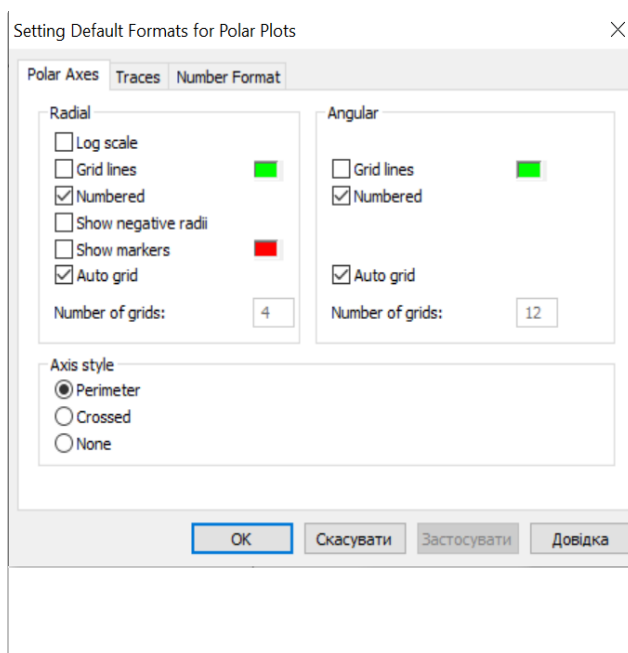
$t = x + 1$, $y = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$, звідки, після спрощення, матимемо $y = x^2$.

6⁰. Побудова декількох графіків

На одному рисунку можна побудувати графіки до 16 різних залежностей. Для цього після введення чергового виразу функції, потрібно натиснути клавішу “,” і ввести вираз наступної функції.



Описаним способом буде побудовано декілька залежностей, які відносяться до одного аргументу (рис. 10). Разом з тим, Mathcad надає можливість на одному і тому ж рисунку будувати графіки різних залежностей. Для цього достатньо ввести у відповідному порядку вирази усіх залежностей на обох осях. На рис. 11 зображено графіки двох залежностей: графік функції $y = \cos x$ і графік еліпса, заданого параметрично $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$.



7⁰. Форматування графіків функцій

Рис. 12

Зміна діапазону осей. Коли графік будується вперше, Mathcad визначає діапазон для обох осей автоматично. Щоб змінити цей діапазон потрібно:

1. Перейти в режим редагування графіка, клацнувши в його межах лівою клавішею миші (ЛКМ). При цьому графік буде виділено, а поблизу кожної з осей з'являться два поля з числами, які задають границі діапазону. Клацнувши ЛКМ у межах одного з полів, дістанемо можливість редагувати відповідну границю.

2. Користуючись клавішами керування курсором і клавішами “BackSpace” і “Delete” вилучаємо вміст поля і заносимо нове значення діапазону. Для одержання графіка в новому діапазоні, достатньо клацнути ЛКМ за межами графіка.

Форматування шкали.

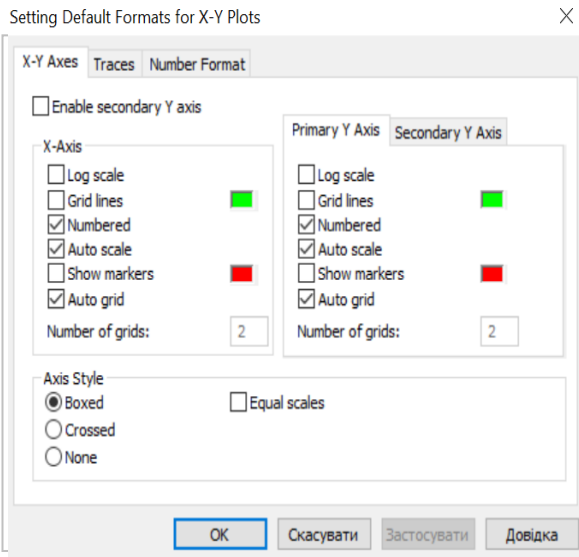


Рис. 13

3. За допомогою вкладки **Трасіровки** (рис. 14) діалогового вікна Formatting Currently Selected X–Y Plot (Polar Plot) легко задати комбінації параметрів лінії і точок для кожного із графіків. Для цього достатньо у списку параметрів задати потрібні установки. Деякі з установок показано на рис. 15.

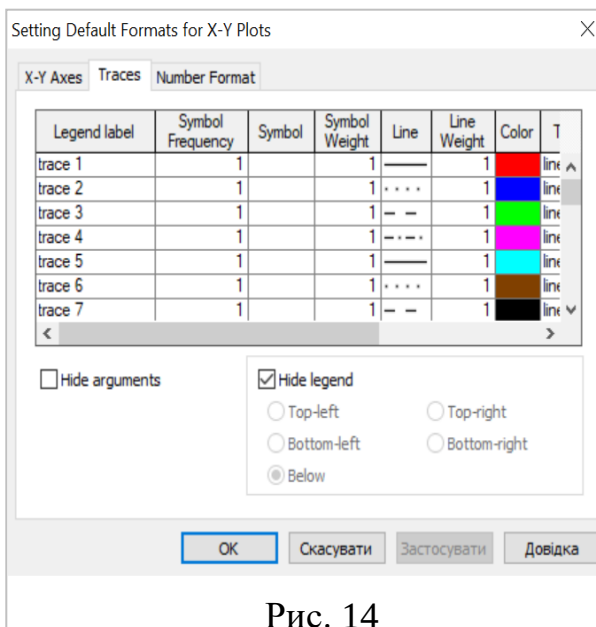


Рис. 14

$$\phi := 0, 0.1 \dots 2\pi$$

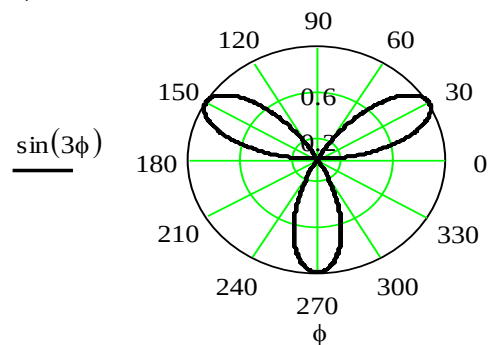
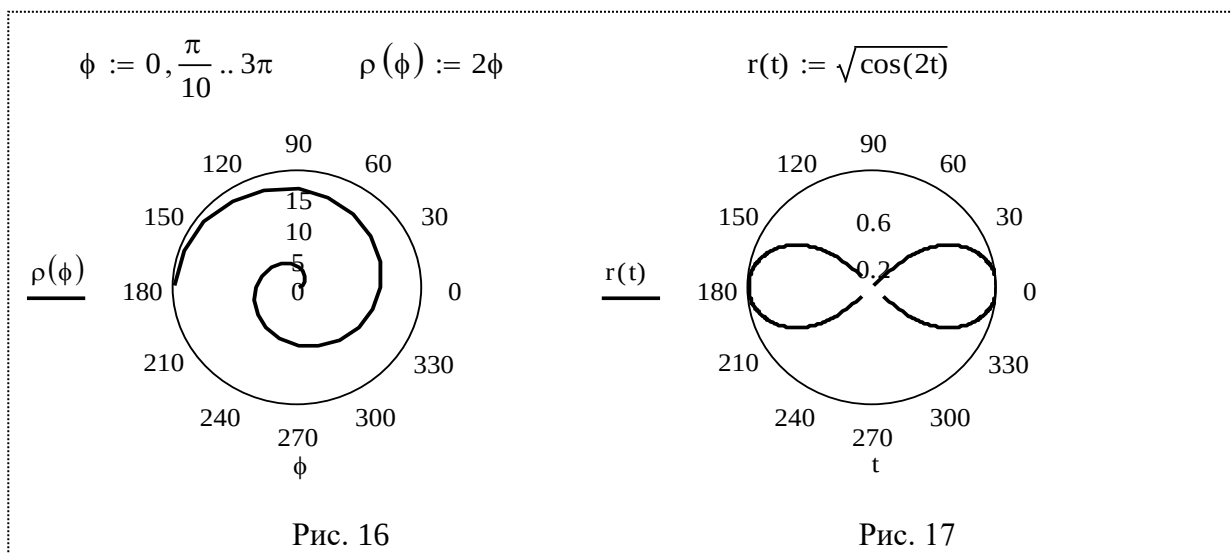


Рис. 15. Графік функції – $r(\phi) = \sin(3\phi)$, де ϕ – полярний куту межах від 0 до 2π .

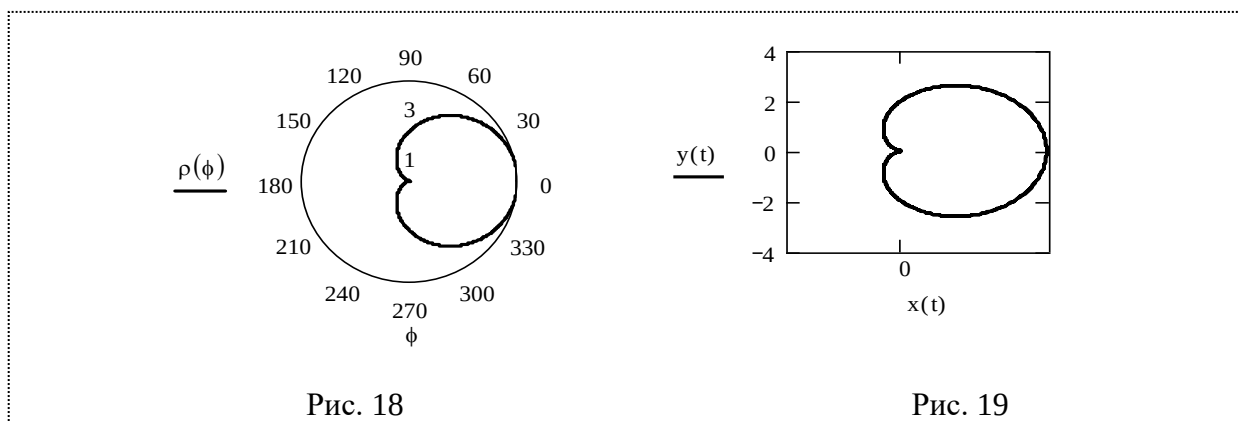
8⁰. Приклади деяких важливих кривих, заданих полярними та параметричними рівняннями

1. **Спіраль Архімеда** – лінія, яка описується точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку. Рівняння спіралі Архімеда має вигляд $\rho = a\phi$, $a > 0$ ($r = a \cdot t$). На рис. 16 зображено спіраль Архімеда при $a = 2$, $0 \leq \phi \leq 3\pi$.

2. **Лемніската Бернуллі** – лінія, що задається рівнянням $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ і має вигляд вісімки. У прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується рівнянням вигляду $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$. На рис. 17 зображено лемніскату Бернуллі при $a = 2$.



3. **Равлик Паскаля** – лінія, що задається рівняннями: у полярних координатах $\rho = a \cos \varphi + b$; у параметричному вигляді $x = a \cos^2 t + b \cos t$, $y = a \cos t \sin t + b \sin t$ і має вигляд у залежності від a і b . Якщо $a = b$, то маємо лінію, яка **називається кардіоїдою**. На рис. 18 зображено кардіоїду у полярних координатах при $a = b = 2$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, а на рис. 19 – кардіоїду, задану у параметричному вигляді при $a = b = 2$, $-\pi \leq t \leq 1.3\pi$.

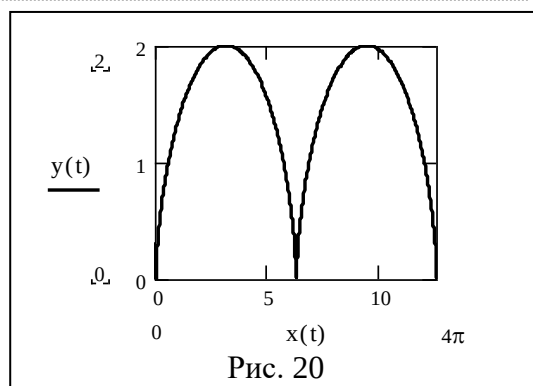


4. **Циклоїда** – лінія, яку описує довільна точка кола радіусом R , яке котиться без ковзання вздовж прямої. Якщо коло котиться вдовж прямої Ox , то циклоїда задається параметричними рівняннями:

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t).$$

На рис. 20 зображена циклоїда при $R=1$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

5. **Епіциклоїда** – лінія, яку описує довільна точка кола, під час його кочення вздовж більшого кола ззовні його. Параметричні рівняння мають



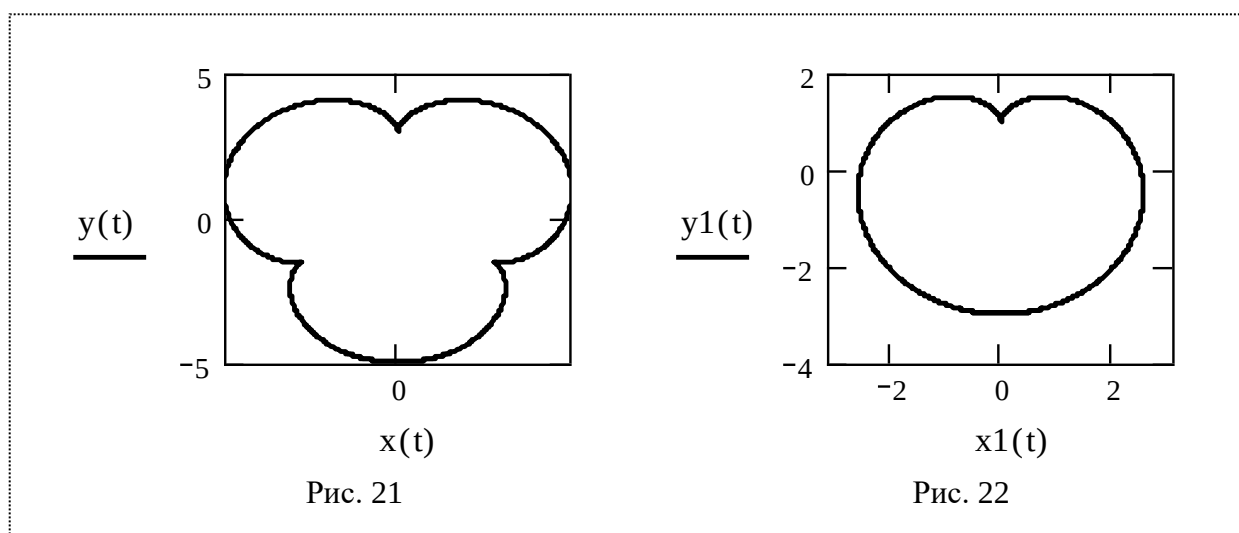
вигляд:

$$x(t) = r(m+1)\sin \frac{t}{m} - r \sin \left(\frac{m+1}{m}t \right), \quad y(t) = r(m+1)\cos \frac{t}{m} - r \cos \left(\frac{m+1}{m}t \right).$$

6. Гіпоциклоїда – лінія, яку описує довільна точка кола, під час його кочення вздовж більшого кола залишаючись всередині його. Параметричні рівняння мають вигляд:

$$x(t) = r(m-1)\sin \frac{t}{m} - r \sin \left(\frac{m-1}{m}t \right), \quad y(t) = r(m-1)\cos \frac{t}{m} - r \cos \left(\frac{m-1}{m}t \right).$$

Вигляд епіциклоїди і гіпоциклоїди залежить від відношення $m = \frac{R}{r}$ – радіуса великого кола до радіуса малого кола. На рис. 21 зображена епіциклоїда при $r=1, m=3, -1.5\pi \leq t \leq 1.5\pi$, а на рис. 22 – гіпоциклоїда при $r=1, m=3, -\pi \leq t \leq \pi$.



9⁰. Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати графіки функцій, заданих в декартовій системі координат.

1.1. Степеневих функцій: $y = x$, $y = x^n$, $y = x^{\frac{1}{n}}$ при $n = 2k$ і $y = x$, $y = x^n$, $y = x^{\frac{1}{n}}$ $n = 2k + 1$, $k = 1$.

1.2. Степеневої функції $y = x^{-n}$ з цілим від'ємним показником при $n = 2k$ і $n = 2k + 1$, $k = 1$.

1.3. Степеневої функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ з раціональним показником при: $m = 2, n = 3$, $m = 4, n = 3$, $m = -2, n = 3$; $m = 3, n = 5$, $m = 5, n = 3$, $m = -5, n = 3$.

2. Показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$) при $a = \frac{1}{2}$ і $a = 2$; $a = \frac{1}{e}$ і $a = e$.

3. Логарифмічної функції $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$, $a > 1$) при $a = \frac{1}{e}$ і $a = e$.

4. Тригонометричних функцій: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обернених тригонометричних функцій: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

6. На одному рисунку побудувати графіки функцій: $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ та $y = x$; $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ та $y = x$ на відрізках $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. На одному рисунку побудувати графіки функцій: $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = \sin x$ та $y = \sin 2x$ на відрізку $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

8. На одному рисунку побудувати графіки функцій:

$$1) \quad y_1(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad y_2(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad y_3(x) = \frac{b}{a}x, \quad y_4(x) = -\frac{b}{a}x;$$

$$2) \quad y_1(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}, \quad y_2(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}, \quad y_3(x) = \frac{b}{a}x, \quad y_4(x) = -\frac{b}{a}x$$

при $a = 4$, $b = 3$.

9. В декартовій системі координат побудувати графіки функцій, заданих параметрично:

$$1) \quad x(t) = -1 - 2\cos(t), \quad y(t) = 3 + 2\cos(t); \quad 2) \quad x(t) = 4\sin(2t), \quad y(t) = 8\sin^2(t).$$

10. В полярній системі координат побудувати графік функції: $x(\alpha) = \alpha$, $y(\alpha) = \cos(2\alpha)$.

11. В полярній системі координат побудувати графік функції, заданої параметрично:

$$x(\alpha) = \sin(\alpha), \quad y(\alpha) = \cos(2\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha := 0, \frac{\pi}{30} \dots 2\pi.$$

Контрольні запитання:

1. Які типи графіків можна побудувати в програмі Mathcad і чим відрізняються двовимірні графіки від тривимірних?
2. Як у Mathcad створюється декартовий графік (X–Y Plot)? Опишіть основні кроки побудови.
3. Яким чином можна швидко побудувати графік функції у декартовій системі координат?
4. Які особливості має побудова графіків у полярній системі координат?
5. Як визначається зв'язок між декартовими та полярними координатами у Mathcad?
6. Як побудувати графік функції, заданої параметрично? Наведіть приклад.
7. Яким чином можна побудувати на одному рисунку кілька графіків різних функцій?
8. Опишіть порядок форматування графіків у Mathcad (зміна діапазону осей, кольору, типу ліній).
9. Які типи важливих кривих можна побудувати у полярній або параметричній формах (спіраль Архімеда, лемніската Бернуллі, циклоїда тощо)?

Лабораторна робота № 5

Тема: ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для знаходження границь та дослідження неперервності функції.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для знаходження границь та дослідження неперервності функції.

2. Виконати запропоновані завдання з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1^о. Границя функції в точці і на нескінченності

Границя функції в точці. Нехай функція $y = f(x)$ задана в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ при x , що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ (як завгодно малого), знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x , таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Це записується так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Односторонні границі. При дослідженні функцій корисні поняття односторонніх границь.

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ *справа* (зліва) при $x \rightarrow x_0$, $x > x_0$ ($x \rightarrow x_0$, $x < x_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x , таких, що $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначають це так: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b \right)$.

Границя функції на нескінченності. Поняття границі функції $y = f(x)$ на нескінченності тісно пов'язане з поняттям границі числової послідовності $\{x_n\}$. Якщо у випадку числової послідовності змінна n , зростаючи, приймає лише цілі значення, то у випадку границі функції змінна x , змінюючись, приймає будь-які значення.

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ при x , яке прямує до нескінченності ($x \rightarrow \infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне число $M > 0$ ($M = M(\varepsilon)$), що для всіх x таких, що $|x| > M$, справедлива нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

У цьому випадку границя записується так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Нескінченні границі. У попередніх випадках малося на увазі, що b – певне число. Іноді потрібно розглядати нескінченні границі.

Кажуть, що функція $y = f(x)$ має своєю границею ∞ (або $+\infty$ чи $-\infty$) при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого $M > 0$, знайдеться таке додатне число $\delta > 0$, що для всіх x таких, що $|x - x_0| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x)| > M$.

Це позначають так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$.

Аналогічно можна розглядати односторонні нескінченні границі: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$$

В програмі **Mathcad** є три оператори обчислення границь: просто границі, правосторонньої і лівосторонньої границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-}$$

Для обчислення границі потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці і ввести вираз справа від слова **lim**; ввести ім'я змінної і її граничне значення; клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Завдання 1. Обчислити границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{5x + 2}{2x + 3} \right).$$

Оскільки $x \rightarrow 4$, то чисельник дробу прямує до числа $5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменник – до числа $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{5x + 2}{2x + 3} \right) = \frac{22}{11} = 2$.

Результат, одержаний за допомогою програми Mathcad, такий самий

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3} \rightarrow 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}.$$

У даному випадку чисельник і знаменник дробу при $x \rightarrow 2$ прямує до нуля (маємо невизначеність типу $0/0$). Для знаходження границі розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $x - 2$.

Лістинг з результатами, одержаними за допомогою програми Mathcad згідно з описаним алгоритмом та безпосередньо, мають вигляд:

$$x^2 - 6x + 8 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x - 4) \quad x^2 - 8x + 12 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x - 6)$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} \text{ factor} \rightarrow \frac{(x - 4)}{(x - 6)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)}{(x - 6)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x + 4} + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + 4} - 2) \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)}{x \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Результат, одержаний за допомогою програми Mathcad, має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \rightarrow \frac{1}{4}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7}.$

Чисельник і знаменник дробу необмежено зростає при $x \rightarrow \infty$. У цьому випадку говорять, що має місце невизначеність типу ∞/∞ . Розділивши чисельник і знаменник на x , одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{2 + \frac{7}{x}} = \frac{3}{2},$$

оскільки при $x \rightarrow \infty$ кожен із дробів $\frac{5}{x}$ і $\frac{7}{x}$ прямує до нуля, тобто $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$.

Програма Mathcad дає той самий результат

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \rightarrow \frac{1}{4}$$

4. Для функції $f(x) = \frac{2}{x-3}$ обчислити звичайну та односторонні границі при $x \rightarrow 3$.

Користуючись програмою Mathcad, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3} \rightarrow \text{undefined} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x-3} \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3} \rightarrow \infty$$

Як бачимо, у даному випадку звичайна границя не існує (невизначена).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \rightarrow \frac{1}{4}$$

2⁰. Практичне обчислення границь

Практичне обчислення границь базується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо кожна із функцій $f(x)$ та $g(x)$ має границю при $x \rightarrow x_0$ або при $x \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = b$, то справедливі рівності:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x),$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) \neq 0 \right).$$

Використовуються також границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – перша важлива границя.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$ – друга важлива границя.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $a > 0$, $a \neq 1$. Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$. Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in R$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $0/0$:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{5x^2 - 8x + 3}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^3 - 8}$.
2. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональності:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x} - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{3 - \sqrt{5 + x}}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$, 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$.
3. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty/\infty]$:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 8}{x - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 - 6x + 5}{5x^2 + 8x + 3}$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^3 - 8}$.
4. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty - \infty]$:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - x)$.
5. Знайти границі функцій, застосувавши першу важливу границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$, 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$.
6. Знайти границі функцій, застосувавши другу важливу границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x$, 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$.

3⁰. Неперервність функції

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 , якщо вона визначена в цій точці і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною зліва (справа)** від точки x_0 , якщо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

4⁰. Розрив функції. Класифікація точок розриву

Використовуючи поняття неперервності функції зліва і справа, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і мають місце рівності:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Якщо при деякому $x = x_0$ не виконується хоча б одна із умов (1), то кажуть, що функція у цій точці має **розрив**, а сама точка x_0 називається **точкою розриву функції**.

Якщо функція $y = f(x)$ не визначена в точці $x = x_0$ або визначена, але має місце співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то розрив в точці x_0 називається **усувним**.

В цьому випадку функцію можна довизначити або змінити її значення в точці x_0 так, щоб виконувалась рівність $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ має скінчені односторонні границі, але вони не рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то кажуть, що функція має в точці

$x = x_0$ **неусувний розрив першого роду**, а різницю $d = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$

називають **стрибком функції**.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує, або дорівнює нескінченності, то кажуть, що в точці $x = x_0$ функція має **неусувний розрив другого роду**.

8. Які із наведених нижче функцій є неперервними в точці $x = 2$? У випадку розривності встановити характер розриву:

$$1) \ y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad 2) \ y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 4, & \text{якщо } x = 2. \end{cases} \quad 3) \ y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-2}}};$$

9. Для наведених нижче функцій та двох значень аргументів треба:

а) встановити чи буде функція неперервною у заданих точках;

б) у випадку розриву функцій встановити характер розриву, знайшовши її односторонні границі; в) зробити схематичний рисунок.

$$1) \ y = 2^{\frac{1}{x-3}}, \ x_1 = 1, \ x_2 = 3; \quad 2) \ y = \frac{1}{x^2 + 4x - 12}, \ x_1 = 2, \ x_2 = 3.$$

Варіанти індивідуальних завдань

№	a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x$
2	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x^2 + 1}{x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{5 + 8x^2 - x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$
3	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x + 4}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3}{1 + 5x^2 - 2x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$
4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{7 + 2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$
5	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{x(2 - 5x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$
6	$\lim_{x \rightarrow} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x - 1}{2x^2 - 9x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + 1}\right)^x$
7	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 2^x}{5^x + 2^x}$
8	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(3x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{x - 1}\right)^x$
9	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)\sqrt{1 - x}}{9 - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 4^x}{3^x - 4^{x+1}}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(5x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{3x-1}{x}}$
11	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x + 1} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}}\right)$

Контрольні запитання:

1. Дайте означення границі функції в точці та поясніть її геометричний зміст.
2. Яке співвідношення між границею функції та границею числової послідовності?
3. Що таке односторонні границі? Як вони позначаються у програмі Mathcad?
4. Поясніть відмінність між границею функції на нескінченності та нескінченною границею.
5. Які оператори для обчислення границь реалізовано у середовищі Mathcad?
6. Як у Mathcad виконати символічне обчислення границі функції?
7. Сформулюйте основні теореми про границі (суми, різниці, добутку, частки).
8. Що означає, що функція є неперервною в точці? Запишіть аналітичну умову неперервності.

Лабораторна робота № 6

Тема: ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для знаходження похідних функції однієї змінної.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для знаходження похідних та диференціалів функції однієї змінної.

2. Виконати запропоновані завдання традиційним способом та з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1⁰. Похідна функції однієї змінної

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці x_0 дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 1. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля.

Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

називають **диференціальним відношенням**.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають y' , $f'(x)$ або $\frac{d}{dx} f(x)$.

Означення 2. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0 , називають **диференційованою в точці x_0** . Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають **диференційованою на проміжку X** . Операцію відшукування похідної називають **диференціюванням**.

Приклад 1. Користуючись означенням похідної та програмою **Mathcad**, знайти похідні функцій: $y = x^3$, $y = \sin(x)$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \rightarrow 3 \cdot x^2 \qquad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \rightarrow \cos(x)$$

2⁰. Правила диференціювання

2.1⁰. Диференціювання суми, різниці, добутку й частки

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці $x \in X$, то функції $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (в останньому випадку вважається, що $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

2.2⁰. Диференціювання складної функції

Теорема 2. Нехай $y = f(\varphi(x))$ – складна функція, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(u)$ в точці $u = \varphi(x)$ має похідну (по u) $y'_u(u) = f'_u(u)$, а внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x – похідну (по x) $u'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована в точці x , причому її похідна обчислюється за формулою

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2.3⁰. Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі (a, b) і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ або } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

В програмі **Mathcad** є два оператори обчислення похідних: похідної першого порядку і похідної n -го порядку:

$$\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}$$

Для обчислення похідної потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, ввести функцію, ім'я змінної і, якщо треба, порядок похідної у відповідні знакомісця, клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Приклад 2. Користуючись програмою **Mathcad**, знайти похідні першого порядку від функцій: $y = \arcsin(x)$,

$y = \arctg(x)$ і похідну другого порядку від функції $y = x^4 + 3x^2$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) \rightarrow \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{d}{dx} \arctan(x) \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \quad \frac{d^2}{dx^2} (x^4 + 3x^2) \rightarrow 12 \cdot x^2 + 6$$

2.4⁰. Таблиця похідних основних елементарних функцій

№	Похідна основної елементарної функції	Похідна складної елементарної функції $u = u(x)$	Частинний випадок
1	$(C)' = 0$		
2	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x, \alpha \in R$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x, a > 0, a \neq 1$	$(e^x)' = e^x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x, a > 0, a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$	
6	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$	
7	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$	
8	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$	
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (x < 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (x < 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
11	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
12	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
13	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'_x$	
14	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'_x$	
15	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'_x$	
16	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'_x$	

2.5⁰. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta.$

Теорема 4. Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ на сегменті $[a, b]$ задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції, а функція $\psi(t)$ має похідну на інтервалі (a, b) . Тоді існує похідна y'_x , яка обчислюється за формулою $y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$

Приклад 3. Користуючись програмою **Mathcad**, знайти похідну функції, заданої параметрично: $y(t) = a \cdot \cos t$, $x(t) = a \cdot \sin t$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$$y(t) := a \cdot \cos(t) \quad x(t) := a \cdot \sin(t) \quad \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)} \rightarrow \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

2.6⁰. Похідна функції, заданої неявно

Нехай неявна функція $y = y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема 5. Якщо функція $F(x, y)$ задовольняє теоремі про існування і є диференційованою за своїми змінними, то похідна $y'(x)$ обчислюється за формулою

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Останню формулу легко одержати, якщо ліву і праву частину рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x , вважаючи y функцією від x , а саме $F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

Приклад 4. Користуючись програмою **Mathcad**, знайти похідну функції, заданої неявно: $x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 = 0$.

Лістинг знаходження похідної має вигляд:

$$F(x, y) := x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 \quad -\frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \rightarrow \frac{-(2 \cdot x + 3)}{(2 \cdot y - 2)}$$

2.7⁰. Похідна показниково-степеневі функції

Нехай потрібно знайти похідну показниково-степеневі функції вигляду $y = u^v$, де u, v – задані і диференційовані функції від x . У даному випадку похідну потрібно шукати шляхом попереднього логарифмування, а саме:

$$\ln y = v \cdot \ln u, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) = u^v \cdot \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'.$$

Приклад 5. Користуючись програмою **Mathcad**, знайти похідну показниково-степеневі функції $y = x^{\sin 5x}$.

Лістинг знаходження похідної має вигляд:

$$\frac{d}{dx} x^{\sin(5x)} \rightarrow x^{\sin(5 \cdot x)} \cdot \left(5 \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(5 \cdot x)}{x} \right)$$

3^о. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x , тобто існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки x має місце рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{ де } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Звідси $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx .

Означення 3. Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці $dy = f'(x)\Delta x$ або $dy = f'(x)dx$. (3)

Означення 4. Другим диференціалом d^2y або диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx dx = f''(x)dx^2. \quad (4)$$

Приклад 6. Користуючись означенням та програмою **Mathcad** знайти диференціали першого і другого порядків функції $y = \arctg x$.

$$\text{За формулами (3, 4) знаходимо: } dy = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad d^2y = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx^2.$$

Зауважимо, що за допомогою програми **Mathcad** диференціали можна знайти як безпосередньо, так і за допомогою функцій користувача (відповідно перший і другий стовпчики лістинга).

Звертаємо також увагу і на те, що диференціали незалежної змінної вводяться шляхом домноження похідної відповідного порядку на диференціал такого ж порядку.

Лістинг знаходження диференціалів першого і другого порядків функції $y = \arctg x$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arctan(x) \cdot dx &\rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \cdot dx & dy(x, dx) &:= \frac{d}{dx} \arctan(x) \cdot dx \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \cdot dx \\ \frac{d^2}{dx^2} \arctan(x) \cdot dx^2 &\rightarrow \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot dx^2 \cdot x & d^2y(x, dx) &:= \frac{d^2}{dx^2} \arctan(x) \cdot dx^2 \rightarrow \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot dx^2 \cdot x \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

7. Для нижче наведених функцій знайти похідні першого порядку за правилами диференціювання та за допомогою програми **Mathcad**:

$$1) y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}, \quad 2) y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad 3) y = \arcsin(\sqrt[3]{2x + x}),$$

$$4) x + 3y = e^{3x} + e^y, \quad 5) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 6) y = (6x^2 + 7)^{\ln x}.$$

8. Для нижче наведених функцій знайти похідні та диференціали першого і другого порядків як за правилами диференціювання, так і за допомогою програми **Mathcad**:

$$1) y = x^3 + 3x^2 - 5x + 7, \quad 2) y = x^2 e^{5x}, \quad 3) y = e^{\sin^2 7x}.$$

Варіанти індивідуальних завдань

№	Знайти y'	Знайти y'	Знайти y', dy, y'', d^2y
1	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x} \cos + \frac{e^x}{x^2}$	$y = \sin \sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}$
2	$y = x^4 + \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$	$y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^2}$	$y = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
3	$y = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{x^2} + \sqrt{x}$	$y = x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x}{e^x}$	$y = \operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{4}\right)$
4	$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + x^3$	$y = (x^2 - 1) \sin x + \frac{2^x}{x}$	$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 5x\right)^4$
5	$y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{x} + x^4$	$y = x^5(x^3 - 5) + \frac{x}{3^x}$	$y = \operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{3}\right)$
6	$y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^3$	$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + (x^3 - 1) \sin x$	$y = \sin\left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x}\right)$
7	$y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - x^4$	$y = \frac{\sin x}{x^2} + x^3(x^2 - 5)$	$y = \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$
8	$y = 3x - 6\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$	$y = \frac{2x}{\cos(x)} + x \arcsin x$	$y = \ln\left(3x + \frac{1}{\ln x}\right)$
9	$y = 6\sqrt[3]{x} - 4x^5 + \frac{1}{x^4}$	$y = \frac{2x}{x^2 + 1} + x \arccos x$	$y = \sin\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)$
10	$y = 6x^2 - \sqrt[4]{x} + \frac{7}{x^3}$	$y = \frac{4x}{x^2 - 6} + x \operatorname{arctg} x$	$y = 6 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
11	$y = x + \frac{6}{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2}$	$y = \frac{x}{2x - 1} + x \operatorname{arccot} x$	$y = \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
12	$y = x^4 - \frac{7}{x^2} - \sqrt[5]{x}$	$y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x \ln x$	$y = \left(\frac{1}{e^x} - 3x\right)^{10}$

Контрольні запитання:

1. Дайте означення похідної функції в точці та поясніть її геометричний зміст.
2. Які основні правила диференціювання реалізовані в програмі Mathcad?
3. Як у Mathcad можна знайти похідну функції, заданої параметрично або неявно?
4. Як визначається диференціал функції першого та другого порядків?
5. Які оператори Mathcad використовуються для обчислення похідних різних порядків і як вводяться змінні під час їх використання?

Лабораторна робота № 7

Тема: ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для дослідження функцій.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для дослідження функцій.
2. Виконати запропоновані завдання традиційним способом та з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1⁰. Геометричне застосування похідної

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, який утворює з додатнім напрямком осі Ox дотична до кривої в точці з абсцисою x_0 .

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \text{ де } y_0 = f(x_0).$$

Нормалью до кривої називається пряма, перпендикулярна до дотичної, яка проходить через точку дотику.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

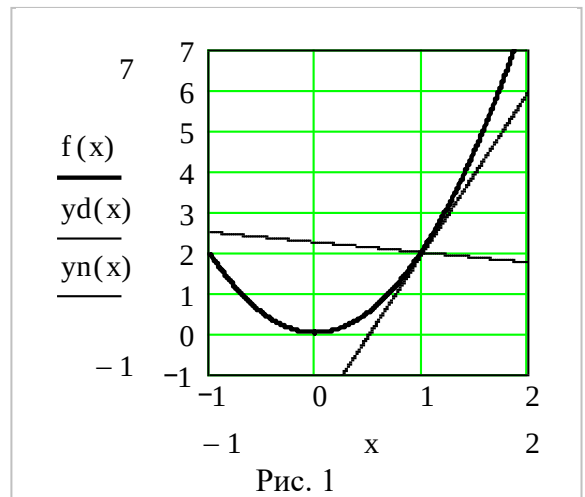
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

Приклад 1. Користуючись програмою **Mathcad**, знайти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = 2x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

► Лістинг знаходження дотичної і нормалі має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2x^2 & f1(x) &:= \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot x \\ x0 &:= 1 & y0 &:= f(x0) \rightarrow 2 \\ yd(x) &:= f1(x0) \cdot (x - x0) + y0 \rightarrow 4 \cdot x - 2 \\ yn(x) &:= \frac{-1}{f1(x0)}(x - x0) + y0 \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Графік функції, дотичної і нормалі наведено на рис 1.



Приклад 2. Користуючись програмою

Mathcad, знайти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, які проведені в точці $A(-9, -8)$.

Послідовність дій наведено на лістингу, а графік функції, дотичної і нормалі, наведено на рис 2.

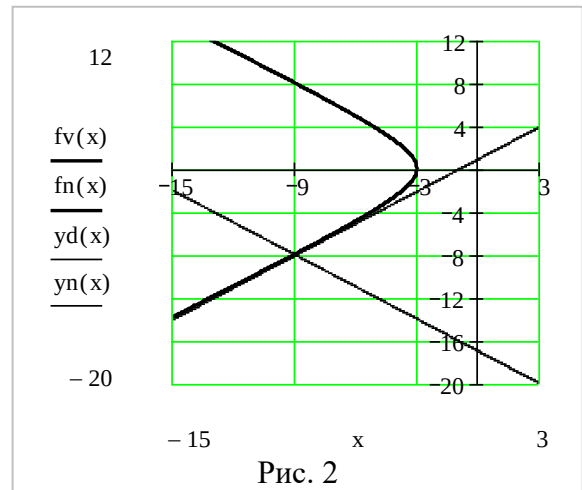
$$F(x, y) := \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} - 1 \quad x_0 := -9 \quad y_0 := -8$$

$$fn(x) := -\sqrt{\frac{8x^2}{9} - 8} \quad fv(x) := \sqrt{\frac{8x^2}{9} - 8}$$

$$y1(x, y) := -\frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{x}{y}$$

$$yd(x) := y1(x_0, y_0)(x + 9) + y_0 \rightarrow x + 1$$

$$yn(x) := \frac{-1}{y1(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0 \rightarrow -x - 17$$



2⁰. Застосування диференціалу функції до наближених обчислень функцій

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x .

Теорема 1. Якщо $y'_x(x) = f'(x) \neq 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$, тобто Δy і dy є

еквівалентними нескінченно малими.

На підставі означення диференціалу та сформульованої теореми дістанемо наближені формули:

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

Якщо в рівності (1) покласти $x_0 = 0$, а $\Delta x = x$, то вона набуває вигляду

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x. \quad (2)$$

Формули (1), (2) часто використовуються для наближених обчислень.

Приклад 3. Користуючись програмою **Mathcad** наближено обчислити значення $\arctg(1.05)$.

Для наближеного обчислення значення $\arctg(1.05)$ скористаємось формулою (1), згідно з якою $\arctg(x_0 + \Delta x) \approx (\arctg x_0)' \cdot \Delta x + \arctg(x_0)$.

Поклавши $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, одержимо

$$\arctg(1.05) \approx \frac{1}{1+1^2} \cdot 0.05 + \frac{\pi}{4} = 0.025 + 0.78539816 = 0.81039816.$$

З використанням програми **Mathcad** послідовність обчислень для одержання наближеного і точного значень, наведено на наступному лістингу, де $x_0 = x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$, а $f_1(x) = f'(x)$.

$$f(x) := \arctan(x) \quad f_1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$x_0 := 1 \quad \Delta x := 0.05 \quad x_1 := 1.05$$

$$f_nabl(x_1) := f_1(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0) \text{ simplify } \rightarrow .81039816339744830963$$

$$f_tochne(x_1) := f(x_1) \rightarrow .80978357257016684662$$

Приклад 4. Користуючись формулою (2), одержати формулу для наближеного обчислення функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ в околі точки $x=0$.

Послідовність дій, з використанням програми **Mathcad**, може мати вигляд

$$f(x) := \sqrt{x+1} \quad f_1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{1}{2 \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}}} \quad f_nabl(x) := f(0) + f_1(0) \cdot x \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot x$$

Таким чином, маємо $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

3⁰. Формула Тейлора та її застосування

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 і в деякому її околі неперервні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно, то має місце формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(a)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора, який задається формулою

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Формулою Маклорена називається формула Тейлора при $a=0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \tilde{R}_n(x),$$

де $\tilde{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, а точка c знаходиться між 0 і x ($c = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

4⁰. Розвинення в ряд (Expand to Series)

За допомогою символного процесора **Mathcad** є можливість одержати розвинення (розклад) функції в ряд Тейлора за степенями змінної x в околі точки $x=0$, тобто в ряд Маклорена. Для цього можна скористатись кнопкою **series** з полицки команд **symbolic**, яка має вигляд

series, , →

де перше знакомісце відводиться для функції, друге для змінної, а третє – для степеня залишкового члена, який позначається як $O(x^n)$, тобто відкидаються члени ряду, які містять x^{n+1} і вище. Наприклад, якщо ми хочемо розкласти функцію $f(x) = e^x$ у ряд Маклорена із залишковим членом $O(x^6)$, то потрібно виконати команду **series** із параметрами: **exp(x), x, 6**. Результат виконання команди має вигляд

$$\text{exp}(x) \text{ series, } x, 6 \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5$$

Для розвинення функції $y = f(x)$ в ряд Тейлора, за степенями $x-a$ необхідно розвинути функцію $y = f(x-a)$ за степенями змінної x і зробити заміну змінної x на $x-a$. Це можна зробити за допомогою двох команд: **series** і **substitute** з полицки команд **symbolic**. Команда **substitute** має вигляд

substitute, = →

де перше знаомісце відводиться для виразу, в якому потрібно зробити заміну, друге для змінної, яку треба замінити, а третє – для виразу, на який треба замінити. Наприклад, якщо ми хочемо розкласти функцію $f(x) = \ln(x)$ у ряд Тейлора за степенями $x - 1$, то потрібно розкласти функцію $\ln(x + 1)$ за степенями x , а потім за допомогою команди **substitute** замінити x на $x - 1$. Результат виконання команди має вигляд

$$\ln(x + 1) \text{ series, } x, 4 \rightarrow x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 \text{ substitute, } x = x - 1 \rightarrow x - 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3$$

Таким чином, розклад функції $\ln(x)$ у ряд Тейлора за степенями $x - 1$ має вигляд

$$\ln(x) = x - 1 + \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3.$$

Недоліком даного методу є те, що не вдається копіювати результати виконання команди для подальшої обробки. Зокрема, через це, останній результат було набрано в редакторі формул.

Щоб уникнути вказаних незручностей пропонується подати розклад функції $y = f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки $x = a$ у вигляді функції користувача вигляду

$$F(x, a) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{d^i}{da^i} f(a) \right) \cdot \frac{1}{i!} (x - a)^i \right].$$

Для розкладу конкретної функції в ряд потрібно задати функцію користувача $f(x)$, значення параметрів a і n , де n – кількість членів суми може бути задано наперед або безпосередньо в сумі.

Приклад 5. Користуючись програмою **Mathcad** одержати розклад в ряд Тейлора функцію $f(x) = e^x$ при $n = 3$, $a = 0$ і $a = 1$.

Лістинг розв'язання задачі має вигляд:

$n := 3 \quad f(x) := \exp(x)$ $F(x, a) := f(a) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{d^i}{da^i} f(a) \right) \cdot \frac{1}{i!} (x - a)^i \right] \rightarrow \exp(a) + \exp(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} \cdot \exp(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{1}{6} \cdot \exp(a) \cdot (x - a)^3$
$F(x, 0) \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 \qquad F(x, 1) \rightarrow \exp(1) + \exp(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot \exp(1) \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{6} \cdot \exp(1) \cdot (x - 1)^3$

5⁰. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

5.1⁰. Монотонність функції

Означення 1. Функцію $f(x)$ називають **зростаючою (спадною)** на деякому проміжку $X = (a, b)$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 3 (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на X , то функція $f(x)$ є строго зростаюча (спадна) на цьому проміжку.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на X , то функція на цьому проміжку не спадає (не зростає).

Теорема 4 (необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на проміжку X функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на X .

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $X = (-\infty, +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$ і рівну нулю, якщо $x = 0$.

З наведених теорем випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають **стаціонарними точками**), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками** або **критичними точками першого роду**.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ треба:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну даної функції.
- 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

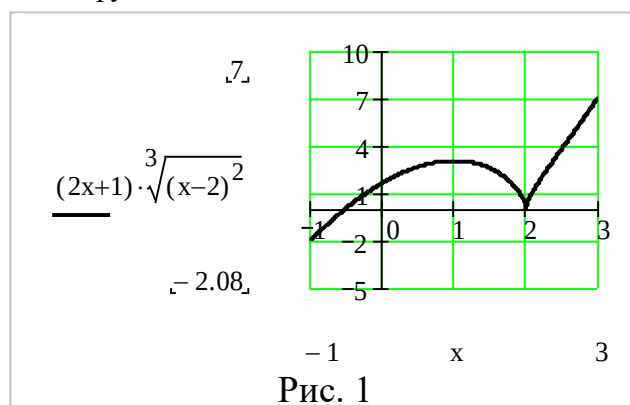
Приклад 6. Знайти інтервали монотонності функції

$y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$ та побудувати її графік.

1) Область визначення $(-\infty, +\infty)$.

2) Похідна $y' = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}$.

3) Критичні точки: $x_1 = 1$ – похідна дорівнює нулю, $x_2 = 2$ – похідна не існує. Інтервали, знак похідної та поведінку функції показано в наведеній таблиці, а графік функції на рис. 1.



x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
$y'(x)$	+	-	+
$y(x)$	зростає	спадає	зростає

5.2⁰. Локальний екстремум функції

Означення 2. Точку x_0 називають **точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції** $f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ із деякого δ -околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (відповідно $f(x) < f(x_0)$).

Якщо в деякому δ -околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$ (відповідно $f(x) \leq f(x_0)$), то точку x_0 називають **точкою локального мінімуму (максимуму) функції** $f(x)$.

Точки локального мінімуму й локального максимуму функції називають **точками локального екстремуму**, а значення функції в цих точках називають відповідно **локальним мінімумом** і **локальним максимумом** або **локальним екстремумом**.

Теорема 4 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційовна, то $f'(x_0) = 0$.

З даної теореми випливає, що не всяка точка x_0 , в якій похідна $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ має мінімум, але не має в цій точці похідної. Це не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму. Графіки розглянутих функцій, наведено на рис. 2.

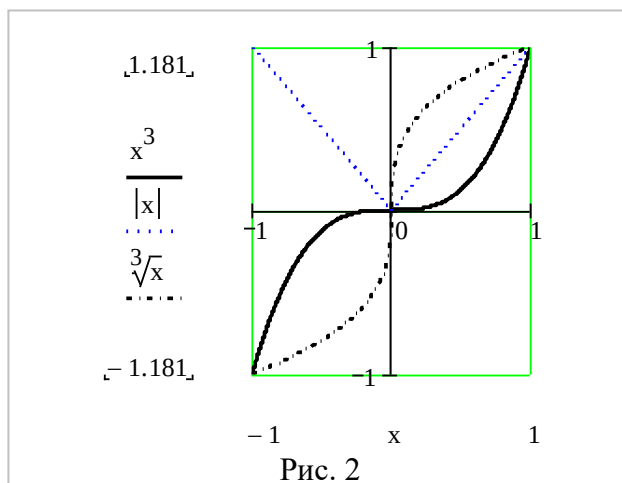


Рис. 2

Теорема 5 (перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0 , тоді:

- 1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;
- 2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;
- 3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Зауважимо, що першу достатню умову екстремуму можна сформулювати і так: Якщо при переході зліва на право через критичну точку x_0 похідна функції $y = f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс – то точкою мінімуму.

З теорем 4 і 5 випливає таке правило дослідження функції на екстремум:

Правило 1. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:

1. Знайти стаціонарні точки заданої функції, розв'язавши рівняння $f'(x_0) = 0$, причому з розв'язків вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області визначення функції.
2. Знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує (якщо критичних точок функція $f(x)$ не має, то вона не має і екстремумів).
3. Дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення знайденими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку. Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку (зліва на право) змінює знак з + на -, то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з - на +, то ця точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною точкою заданої функції.

Результати досліджень доцільно звести в таблицю.

Приклад 7. Користуючись першим правилом, дослідити на екстремум функцію $y = \sqrt[3]{x^2} e^x$.

Знаходимо похідну $f'(x) = \frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}} e^x$. Похідна $f'(x)$ при $x = -\frac{2}{3}$ дорівнює нулю і не існує при $x = 0$. Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ і $x_2 = 0$ – критичні точки даної функції.

Визначимо знаки похідної на інтервалах неперервності:

$$f'(-1) = \frac{2-3}{\sqrt[3]{-1}} e^{-1} > 0, \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2-1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}} e^{-\frac{1}{3}} < 0, \quad f'(1) = \frac{2+3}{\sqrt[3]{1}} e^1 > 0, \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 0.4,$$

$f(0) = 0$. На основі знайдених значень складемо таблицю

x	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	∞	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\max \approx 0.4$	$\searrow$	$\min = 0$	$\nearrow$

Таким чином, точка $x_1 = -\frac{2}{3}$ – точка локального максимуму, а $x_2 = 0$ – точка локального мінімуму.

Теорема 6 (друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

На основі теореми 6 можна сформулювати друге правило дослідження функції на екстремум:

Правило 2. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:

1. Знайти стаціонарні точки заданої функції.
2. Знайти похідну другого порядку в стаціонарних точках. Якщо при цьому в стаціонарній точці x_0 похідна $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 є екстремальною точкою заданої функції, а саме точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$.

Приклад 8. Користуючись другим правилом, дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 18x + 8$.

Знаходимо похідну першого порядку $f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $6x^2 - 30x - 84 = 0$. Отже, стаціонарні точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x - 30$ і обчислюємо її значення в стаціонарних точках: $f''(-2) = -54 < 0$, $f''(7) = -54$. В точці $x_1 = -2$ функція має максимум $f(-2) = 100$, а в точці $x_2 = 7$ – мінімум $f(7) = -629$.

Теорема 7 (третя достатня умова локального екстремуму). Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді:

- 1) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум;
- 2) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має в точці x_0 локальний мінімум;
- 3) якщо n – непарне, то $f(x)$ в точці x_0 локального екстремуму не має.

Приклад 9. Користуючись теоремою 8, дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^4$.

Знаходимо похідну першого порядку: $f'(x) = 4x^3$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $4x^3 = 0$. Звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x = 0$. Точок, в яких похідна першого порядку не існує, немає. Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x^2$. Підставивши значення $x = 0$, маємо $f''(0) = 0$. Отже, друге правило тут застосувати не можна. Обчислимо похідну третього порядку: $f'''(x) = 24x$. Підставивши значення $x = 0$, матимемо $f'''(0) = 0$. Знайдемо наступну похідну: $f^{IV}(x) = 24 \neq 0$.

Отже: $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, а $f^{IV}(0) \neq 0$. Оскільки перша відмінна від нуля похідна є похідною парного порядку, то в точці $x = 0$ функція $f(x) = x^4$ має екстремум. Оскільки $f^{IV}(0) = 24 > 0$, то в цій точці функція має мінімум $f(0) = 0$.

5.3⁰. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді, згідно з теоремою Вейерштрасса, функція на цьому відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значень. Якщо ця функція досягає свого найбільшого (найменшого) значення на інтервалі (a, b) , то воно, очевидно, буде максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Але функція може досягати свого найбільшого (найменшого) значення на одному з кінців відрізка $[a, b]$. Звідси випливає таке правило знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значень.

Правило 3. Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a, b]$, треба знайти усі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед знайдених чисел і буде найбільшим (найменшим) значення функції на відрізку $[a, b]$.

Приклад 10. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $[-2; 2,5]$.

Знаходимо стаціонарні точки. Для цього обчислимо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Прирівнюючи цю похідну до нуля і розв'язуючи рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$, дістанемо стаціонарні точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислимо значення функції в точках x_1, x_2 , а також на кінцях відрізка, тобто в точках: $x_3 = -2$, $x_4 = 2,5$. Маємо

$$f(-1) = 8, \quad f(2) = -19, \quad f(-2) = -3, \quad f(2,5) = -16,5.$$

Таким чином, найменше значення $f(2) = -19$, а найбільше – $f(-1) = 8$.

5.4⁰. Опуклість та угнутість графіка. Точки перегину

Означення 3. Крива $y = f(x)$ називається опуклою (угнутою) на інтервалі (a, b) , якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) точок її дотичних на цьому інтервалі.

Теорема 8. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ є угнутою на цьому інтервалі; якщо $f''(x) < 0$ на інтервалі (a, b) то крива опукла на цьому інтервалі.

Означення 4. Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка розділяє інтервали, в яких функція опукла і угнута.

Правило 4. Точка $x = x_0$ буде точкою перегину кривої $y = f(x)$, якщо: $f''(x_0) = 0$ або не існує, а знаки $f''(x)$ зліва ($x < x_0$) та справа ($x > x_0$) різні.

Приклад 11. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Знаходимо похідні першого та другого порядків: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$,

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12.$$

Прирівнюємо $f''(x)$ до нуля: $36x^2 - 48x + 12 = 0$. Звідси знаходимо корені:
 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$.

В інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), (1, +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ похідна $f''(x) < 0$. Тому в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), (1, +\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ – опукла. Точки $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right) \approx (0,33; 12,41), (1, 13)$ – точки перегину кривої (рис. 3).

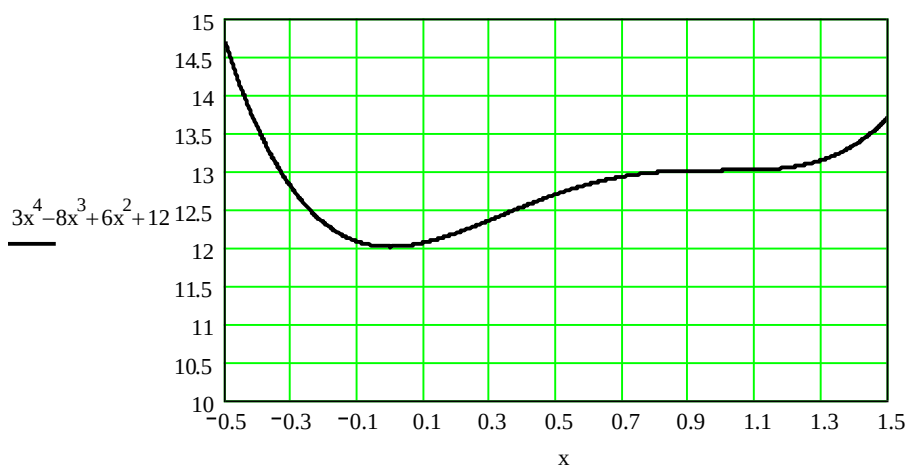


Рис. 3

5.5⁰. Асимптоти кривої

Означення 5. Пряму лінію називають асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки M кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченність.

Асимптоти бувають вертикальні, горизонтальні та похилі.

Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна із границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty.$$

Якщо лише $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b$ або $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$, то функція має лише односторонню асимптоту.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$, де k і b – коефіцієнти, які обчислюються за формулами: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Приклад 12. Користуючись програмою Mathcad знайти асимптоти кривої $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x}$.

Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$ і

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \rightarrow -\infty$$

то $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x \cdot x} \rightarrow 2 \quad b := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} - k \cdot x \rightarrow 5 \quad y := k \cdot x + b \rightarrow 2 \cdot x + 5$$

Таким чином, дана крива має дві асимптоти: $x = 0$ і $y = 2x + 5$.

5.6⁰. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Найбільш наочне уявлення про зміну функції дає її графік. Тому побудова графіка є заключним етапом дослідження функції, на якому використовуються усі результати її дослідження.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1. Знайти область існування функції.
2. Знайти, якщо це можна, точки перетину графіка функції з координатними осями.

Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь

$$\begin{cases} y = f(x); \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = f(x); \\ x = 0, \end{cases}$$

Перша дає точку перетину з віссю Ox , а друга – з віссю Oy .

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти точки розриву і дослідити їх.
5. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
6. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.
7. Знайти асимптоти кривої.
8. Побудувати графік функції.

Приклад 13. Дослідити та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Досліджувана функція визначена і неперервна для всіх значень x , крім $x = 1$. Функція не є ні парною, ні непарною. Її графік не має точок перетину з віссю Ox , оскільки $x^2 + 1 > 0$.

Далі, за допомогою програми Mathcad, знайдемо вертикальні асимптоти. Для цього знайдемо границі:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \rightarrow \infty$$

Знайдені границі показують, що пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Користуючись програмою Mathcad знайдемо похідну даної функції та точки, в яких вона перетворюється в нуль

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{(x^2 - 2 \cdot x - 1)}{(x - 1)^2} \quad \frac{(x^2 - 2 \cdot x - 1)}{(x - 1)^2} \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Таким чином похідна дорівнює нулю в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, а отже, вони є точками екстремуму. Ці точки розбивають усю числову вісь на три проміжки:

$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$, всередині кожного з яких похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак. Легко переконатись, що в першому і третьому проміжках $f'(x) > 0$ і, таким чином, тут функція зростає, у другому проміжку $f'(x) < 0$ і, отже, тут функція спадає. Її друга похідна

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{4}{(x - 1)^3}$$

відмінна від нуля на всій області визначення, а це означає, що графік даної функції точок перегину не має. Оскільки на проміжку $(-\infty, 1)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то графік даної функції на даному проміжку є опуклим, а в точці x_1 ця функція має локальний максимум; на проміжку $(1, +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а тому тут графік функції угнутий, а в точці x_2 ця функція має локальний мінімум.

За допомогою програми Mathcad знаходимо похилу асимптоту:

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x - 1) \cdot x} \rightarrow 1 \quad b := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} - k \cdot x \rightarrow 1 \quad y := k \cdot x + b \rightarrow x + 1$$

Графік функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ зображено на рис 4.

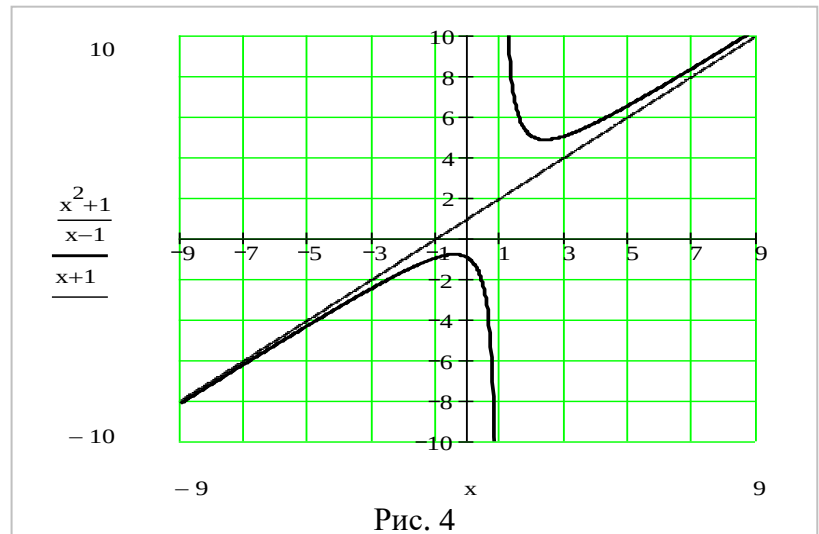


Рис. 4

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись програмою **Mathcad**, скласти рівняння дотичної і нормалі до:

1) гіперболи $y = \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$; 2) кривої $y = \operatorname{tg} x$ у початку

координат; 3) кривої $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ у точці перетину з віссю Ox ; 4) до гіперболи

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ в точці } M\left(5; \frac{9}{4}\right).$$

Побудувати графік функції, дотичної і нормалі.

2. Користуючись програмою **Mathcad** обчислити наближено значення:

1) $\sin 31^\circ$; 2) $\arcsin(0.707)$.

3. Показати, що при достатньо малих x ($|x| \ll 1$) мають місце наближені рівності:

$$\ln(1+x) \approx x, (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x, e^x \approx 1+x, \sin x \approx x.$$

4. Користуючись програмою **Mathcad** одержати розклад в ряд Тейлора функцій: 1)

$f(x) = \sin x$ при $n=5$, $a=0$ і $a=\pi/2$; 2) $f(x) = \cos x$ при $n=5$, $a=0$ і $a=\pi/2$;

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ за степенями x ; 4) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x + 4$ за степенями $x - 4$.

5. Знайти інтервали монотонності та побудувати графіки функцій:

$$1) y = x(1 + \sqrt{x}); \quad 2) y = x^3 2x - 5; \quad 3) y = \ln(1 + x^2); \quad 4) y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

6. Користуючись першим правилом, дослідити на екстремуми функції:

$$1) y = x^2(1 - x\sqrt{x}); \quad 2) y = x + \sqrt{3-x}; \quad 3) y = x^3 - 3x + 2; \quad 4) y = \frac{x}{\ln x}.$$

7. Користуючись другим правилом, дослідити на екстремуми функції:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3; \quad 2) f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

8. Користуючись теоремою 8, дослідити на екстремуми функції:

1) $f(x) = (x-1)^4$, 2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$, 3) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ – в точці $x=0$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

$$1) f(x) = x^4 - 8x^2 \text{ на відрізку } [-1; 3], \quad 2) f(x) = 3x - x^3 \text{ на відрізку } [-2; 3].$$

10. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

$$1) f(x) = x^5 - x + 2; \quad 2) f(x) = 2 + (x-5)^{5/3}.$$

11. Користуючись програмою **Mathcad** знайти асимптоти кривих:

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}, \quad 2) f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x, \quad 3) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}.$$

12. Дослідити та побудувати графіки функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{1-x^2}, \quad 2) y = \frac{x^3+4}{x^2}, \quad 3) y = \sqrt{1-x^3}; \quad 4) y = e^{-x^2}; \quad 5) y = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Контрольні запитання:

1. Яке геометричне тлумачення має похідна функції в точці?
2. Як у Mathcad знаходиться рівняння дотичної та нормалі до кривої?
3. У чому полягає застосування диференціала функції для наближених обчислень?
4. Сформулюйте формулу Тейлора та поясніть її практичне застосування.
5. Як у Mathcad можна реалізувати розклад функції в ряд Маклорена?
6. Яким чином визначаються інтервали монотонності функції за знаком похідної?
7. Як знайти локальні екстремуми функції за допомогою першої та другої похідних?
8. У чому полягає різниця між опуклістю та вгнутістю графіка функції?
9. Які типи асимптот розрізняють і як їх знаходять у Mathcad?
10. Опишіть повну схему дослідження функції (область визначення, похідні, екстремуми, опуклість, асимптоти, графік).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Тема: Апроксимація експериментальних даних за допомогою методу найменших квадратів

Мета: отримати навички використання методу найменших квадратів для апроксимації експериментальних даних.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найбільш поширеним методом апроксимації експериментальних даних є метод найменших квадратів. Метод дозволяє використовувати апроксимуючі функції довільного виду і відноситься до групи глобальних методів. Простим варіантом методу найменших квадратів є апроксимація прямою лінією (поліномом першого ступеня). Цей варіант методу найменших квадратів носить також назву лінійної регресії.

Критерієм близькості в методі найменших квадратів є вимога мінімального значення суми квадратів відхилень апроксимуючої функції від експериментальних точок:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n y_i - f(x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Метод не вимагає, щоб апроксимуюча функція проходила через усі задані точки, що особливо важливо при апроксимації даних, які містять похибки.

Важливою особливістю методу є те, що апроксимуюча функція може бути довільною. Її вид визначається особливостями задачі, наприклад, фізичними міркуваннями, якщо проводиться апроксимація результатів фізичного експерименту. Найчастіше зустрічаються апроксимація прямою лінією (лінійна регресія), апроксимація поліномом (поліноміальна регресія), апроксимація лінійною комбінацією довільних функцій. Крім того, часто буває можливо шляхом заміни змінних звести завдання до лінійної (провести лінеаризацію). Наприклад, розглянемо випадок, коли апроксимуюча функція шукається у вигляді $y = A \cdot e^{kx}$. Прологарифмуємо цей вираз і введемо позначення $z = \ln(y)$, $a = \ln(A)$. Тоді в нових позначеннях завдання зводиться до відшукування коефіцієнтів лінійної функції $z = a + kx$.

Для ряду двопараметричних залежностей, що часто зустрічаються, можливі заміни змінних, що приведені в табл. 8.1.

Слід враховувати, що якщо початкові дані не задовольняють наведеним обмеженням для конкретної залежності, наприклад, значення x або y від'ємні або нульові, то логарифмування або ділення на нуль виконати неможливо. У цьому випадку необхідно зрушити шкалу x або y в позитивну область:

$$y' = y + \Delta y; \quad x' = x + \Delta x.$$

При цьому потрібне виконання умов $\Delta x > \max_{x_i < 0} |x_i|$, $\Delta y > \max_{y_i < 0} |y_i|$.

Після відшукування виду апроксимуючої залежності для x' і y' необхідно повернутися до первинних координат x і y .

Таблиця 8.1

Перелік двопараметричних залежностей

№	Залежність	Заміна змінних		Зворотна заміна змінних		Обмеження
0	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$v = y$	$u = \frac{1}{x}$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x \neq 0$
1	$y = a_0 + a_1 \ln x$	$v = y$	$u = \ln x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x > 0$
2	$y = a_0 e^{a_1 x}$	$v = \ln y$	$u = x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$	$y > 0 \quad a_0 > 0$
3	$y = a_0 x^{a_1}$	$v = \ln y$	$u = \ln x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$	$x > 0 \quad y > 0$ $a_0 > 0$
4	$y = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$	$v = \frac{1}{y}$	$u = e^{-x}$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$
5	$y = a_0 a_1^x$	$v = \ln y$	$u = x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = e^{b_1}$	$y > 0$
6	$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$	$v = \frac{1}{y}$	$u = x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$ $x \neq -a_0/a_1$
7	$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$	$v = \frac{x}{y}$	$u = x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$ $x \neq -a_0/a_1$
8	$y = a_0 + a_1 \lg x$	$v = y$	$u = \lg x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x > 0$

ЗАВДАННЯ

У табл. 8.2 початкових даних приведені експериментально отримані точки, що визначають залежність між змінними x і y . Необхідно скласти Mathcad-документ, що дозволяє лінеаризувати залежність і підібрати параметри a_0 і a_1 за методом найменших квадратів. Перевірити правильність обчислень за допомогою відомої залежності. Правильно складений документ даватиме нехтовно малу нев'язку. Оскільки вид залежності спочатку невідомий, слід виконати обчислення для усіх залежностей з табл. 8.1 і вибрати ту з них, яка забезпечує найменшу сумарну нев'язку.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. По номеру варіанта вибрати з табл. 8.1 вихідні дані.
2. У пакеті Mathcad скласти документ для апроксимації експериментальних даних за методом найменших квадратів. Вид апроксимуючої функції обирається згідно з табл. 8.1 за критерієм мінімальної нев'язки. Приклад виконання роботи наведено на рис. 8.1 – 8.4.
3. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи

Таблиця 8.2

Вихідні дані

1	x	-1	-0,55	-0,4	-0,35	0,8	1,25	1,7	2,15	2,6	3,05
	y	-6,78	-6,56	-6,14	-5,31	-3,68	-0,85	5,81	18,15	42,4	90,03
2	x	0,01	0,56	1,11	1,66	2,21	2,28	3,3	3,85	4,4	4,95
	y	34,23	5,97	1,28	-1,54	-3,54	-5,09	-6,36	-7,44	-8,37	-9,2
3	x	0,4	0,81	1,22	1,5	2,04	2,45	2,86	3,27	3,68	4,09
	y	1,8	0,53	0,12	-0,09	-0,21	-0,31	-0,35	-0,39	-0,43	-0,46
4	x	0,3	1,57	2,84	4,11	5,38	6,65	7,92	9,19	10,46	11,73
	y	15,33	4,55	3,41	2,97	2,74	2,6	2,59	2,44	2,38	2,34
5	x	-3,5	-2,65	-1,8	-0,95	-0,	0,75	1,6	2,45	3,3	4,15
	y	0,01	0,03	0,07	0,12	0,19	0,2	0,29	0,31	0,325	0,33
6	x	0,15	0,94	1,72	2,51	3,29	4,08	4,86	5,65	6,43	7,22
	y	-9,69	4,2	-2,37	-1,25	-0,43	0,21	0,74	1,3	1,58	1,93
7	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,675	3,14	3,605	4,07	4,535
	y	6,86	5,23	4,78	4,57	4,45	4,37	4,35	4,28	4,25	4,22
8	x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
	y	4,14	4,2	4,3	4,45	4,67	5	5,49	6,85	7,32	8,95
9	x	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7
	y	2,67	4,06	6,16	8,13	10,92	14,29	18,29	22,97	28,39	34,6
10	x	0,01	0,53	1,05	1,57	2,09	2,61	3,12	3,64	4,16	4,68
	y	15,22	3,31	1,26	0,05	-0,81	-1,74	-2,17	-2,48	-2,88	-3,23
11	x	0,95	1,21	1,47	1,74	2,0	2,26	2,52	2,78	3,05	3,31
	y	8,16	3,39	2,19	1,34	0,88	0,61	0,54	0,33	0,28	0,19
12	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,68	3,14	3,61	4,07	4,535
	y	16,99	8,83	6,61	5,56	4,96	4,62	4,29	4,09	3,93	3,8
13	x	-1,7	-1,43	-1,16	-0,89	-0,62	-0,35	-0,08	0,19	0,46	0,73
	y	26,96	14,46	7,17	2,92	0,45	-0,98	-1,35	-2,31	-2,6	-2,77
14	x	-1	-0,72	-0,44	-0,17	0,12	0,39	0,67	0,95	1,22	1,5
	y	-4,95	4,89	-4,74	-4,39	-3,6	-1,93	2,42	12,08	34,33	85,55
15	x	0,01	0,51	1,01	1,51	2,01	2,51	3,01	3,51	4,01	4,51
	y	-4,76	2,29	3,52	4,24	4,76	5,06	5,48	5,76	6,0	6,21
16	x	0,4	0,86	1,32	1,78	2,24	2,7	3,16	3,62	4,08	4,54
	y	-20,5	-11,2	-8,3	-6,93	-6,5	-5,59	-5,3	-4,93	4,83	-4,54
17	x	0,01	0,51	1,01	1,52	2,01	2,51	3,0	3,05	4,0	4,5
	y	-1,14	2,39	3,01	3,37	3,63	3,83	3,99	4,13	4,25	4,35
18	x	0,11	0,499	0,89	1,28	1,67	2,055	2,44	2,83	3,22	3,61
	y	6,27	0,6	-0,1	-0,37	-0,52	-0,61	-0,67	-0,69	-0,75	-0,78
19	x	-2,1	-1,79	-1,48	-1,17	-0,86	-0,55	-0,24	0,07	0,38	0,69
	y	0,28	0,29	0,3	0,32	0,36	0,48	0,78	1,52	3,41	8,21
20	x	0,01	0,53	1,05	1,57	2,09	2,61	3,12	3,64	4,16	4,68
	y	15,22	3,31	1,26	0,05	-0,81	-1,74	-2,17	-2,48	-2,88	-3,23

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема і мета роботи, номер варіанта і вихідні дані.
2. Mathcad-документ, який забезпечує апроксимацію експериментальних даних за методом найменших квадратів.
3. Висновки з аналізом результатів апроксимації.

Лабораторна робота №8 **Апроксимація експериментальних даних за допомогою метода** **найменших квадратів**

Вихідні дані:

$$X1 := \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.59 \\ 1.17 \\ 1.75 \\ 2.33 \\ 2.91 \\ 3.48 \\ 4.06 \\ 4.64 \\ 5.22 \end{bmatrix} \quad Y1 := \begin{bmatrix} 8.82 \\ -3.41 \\ -5.93 \\ -6.67 \\ -7.53 \\ -8.2 \\ -8.74 \\ -9.15 \\ -9.61 \\ -9.96 \end{bmatrix}$$

$$n := \text{length}(X1)$$

$$i := 0 \dots n - 1$$

Зміщення функції в першу чверть:

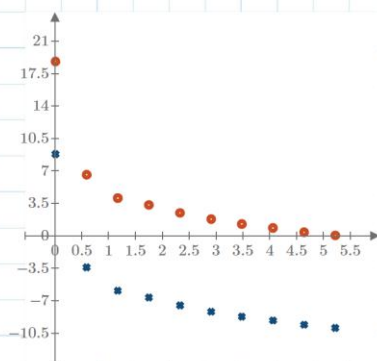
$$dX := 0$$

$$dY := 10$$

Зміщена функція:

$$X_i := X1_i + dX$$

$$Y_i := Y1_i + dY$$



$$X = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.59 \\ 1.17 \\ 1.75 \\ 2.33 \\ 2.91 \\ 3.48 \\ 4.06 \\ 4.64 \\ 5.22 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 18.82 \\ 6.59 \\ 4.07 \\ 3.33 \\ 2.47 \\ 1.8 \\ 1.26 \\ 0.85 \\ 0.39 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$X1$

X

Рисунок 1 - Опорні точки вихідної та зміщеної функцій

Номери апроксимуючих функцій:

$$j := 0 \dots 8$$

Заміна змінних:

$$fv(x, y) := \begin{bmatrix} y & y \ln(y) & \ln(y) & \frac{1}{y} & \ln(y) & \frac{1}{y} & \frac{x}{y} & y \end{bmatrix}$$

вектор замін $v=v(y)$ для всіх апроксимуючих функцій

$$fv(X_0, Y_0) = [18.82 \ 18.82 \ 2.935 \ 2.935 \ 0.053 \ 2.935 \ 0.053 \ 5.313 \cdot 10^{-4} \ 18.82]$$

$$fv(X_1, Y_1) = [6.59 \ 6.59 \ 1.886 \ 1.886 \ 0.152 \ 1.886 \ 0.152 \ 0.09 \ 6.59] \quad \text{і так далі}$$

Рисунок 8.1 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

$$fu(x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \ln(x) & x & \ln(x) & \exp(-x) & x & x & x & \log(x) \end{bmatrix} \quad \text{вектор замін } u=u(y) \text{ для всіх апроксимуючих функцій}$$

$$fu(X_0) = [100 \quad -4.605 \quad 0.01 \quad -4.605 \quad 0.99 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad -2]$$

$$fu(X_1) = [1.695 \quad -0.528 \quad 0.59 \quad -0.528 \quad 0.554 \quad 0.59 \quad 0.59 \quad 0.59 \quad -0.229]$$

і так далі

Формування матриць нових змінних U та V, які містять точки лінеаризованих залежностей (№ стовпчика відповідає номеру апроксимуючої функції, № рядка відповідає номеру опорної точки):

$$U_{i,j} := \left(\left(fu(X_i) \right)^{(j)} \right)_0 \quad V_{i,j} := \left(\left(fv(X_i, Y_i) \right)^{(j)} \right)_0$$

Обчислення параметрів лінеаризованої залежності для j-ї апроксимуючої функції:

$$Mu_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i U_{i,j} \quad Mv_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i V_{i,j}$$

$$Kuv_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i (U_{i,j} - Mu_j) \cdot (V_{i,j} - Mv_j)$$

$$S2_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i (U_{i,j} - Mu_j)^2 \quad b1_j := \frac{Kuv_j}{S2_j} \quad b0_j := Mv_j - b1_j \cdot Mu_j$$

Отримали вектори b0 та b1, що містять коефіцієнти лінійних залежностей $v=b0+b1 \cdot u$ для кожної з апроксимуючих функцій.

Визначимо коефіцієнти a0 та a1 вихідної апроксимуючої залежності:

$$fa0(q) := [q \quad q \quad \exp(q) \quad \exp(q) \quad q \quad \exp(q) \quad q \quad q \quad q] \quad \text{вектори зворотної заміни змінних для всіх функцій}$$

$$fa1(q) := [q \quad q \quad q \quad q \quad q \quad \exp(q) \quad q \quad q \quad q]$$

$$a0_j := \left(fa0(b0_j) \right)^{(j)}_0 \quad a1_j := \left(fa1(b1_j) \right)^{(j)}_0$$

$$a0 = \begin{bmatrix} 2.213 \\ 4.961 \\ 17.222 \\ 2.018 \\ 4.695 \\ 17.222 \\ -3.664 \\ -19.933 \\ 4.961 \end{bmatrix} \quad a1 = \begin{bmatrix} 0.167 \\ -2.996 \\ -0.903 \\ -0.659 \\ -6.998 \\ 0.405 \\ 2.595 \\ 13.484 \\ -6.9 \end{bmatrix}$$

Отримали вектори a0 та a1, що містять параметри всіх апроксимуючих функцій

Рисунок 8.2 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

Визначення нев'язок для всіх апроксимуючих функцій:

$f_0(x) := a_{0_0} - dY + \frac{a_{1_0}}{x - dX}$	$d_0 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_0(X_{1_i}) \right)^2$	$d_0 = 32.298$
$f_1(x) := a_{0_1} - dY + a_{1_1} \cdot \ln(x + dX)$	$d_1 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_1(X_{1_i}) \right)^2$	$d_1 = 0.199$
$f_2(x) := a_{0_2} \cdot \exp(a_{1_2} \cdot x + dX) - dY$	$d_2 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_2(X_{1_i}) \right)^2$	$d_2 = 20.061$
$f_3(x) := a_{0_3} \cdot (x + dX)^{a_{1_3}} - dY$	$d_3 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_3(X_{1_i}) \right)^2$	$d_3 = 560.238$
$f_4(x) := \frac{1}{a_{0_4} + a_{1_4} \cdot \exp(-x + dX)} - dY$	$d_4 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_4(X_{1_i}) \right)^2$	$d_4 = 431.682$
$f_5(x) := a_{0_5} \cdot (a_{1_5})^{x + dX} - dY$	$d_5 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_5(X_{1_i}) \right)^2$	$d_5 = 20.061$
$f_6(x) := \frac{1}{a_{0_6} + a_{1_6} \cdot (x + dX)} - dY$	$d_6 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_6(X_{1_i}) \right)^2$	$d_6 = 459.611$
$f_7(x) := \frac{x + dX}{a_{0_7} + a_{1_7} \cdot (x + dX)} - dY$	$d_7 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_7(X_{1_i}) \right)^2$	$d_7 = 435.121$
$f_8(x) := a_{0_8} - dY + a_{1_8} \cdot \log(x + dX)$	$d_8 := \sum_i \left(Y_{1_i} - f_8(X_{1_i}) \right)^2$	$d_8 = 0.199$

Найменше значення сумарної нев'язки - для логарифмічних функцій $f_1(x)$ та $f_8(x)$.

Приймаємо функцію $f_1(x)$

Таким чином, вихідна залежність може бути апроксимована функцією виду:

$$f_1(x) := a_{0_1} - dY + a_{1_1} \cdot \ln(x + dX)$$

де $a_{0_1} = 4.961$ $a_{1_1} = -2.996$ $dY = 10$ $dX = 0$

Проміжні точки для побудови графіка апроксимуючої функції:

$$xp := \min(X_1), \frac{\max(X_1) - \min(X_1)}{100} .. \max(X_1)$$

Рисунок 8.3 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

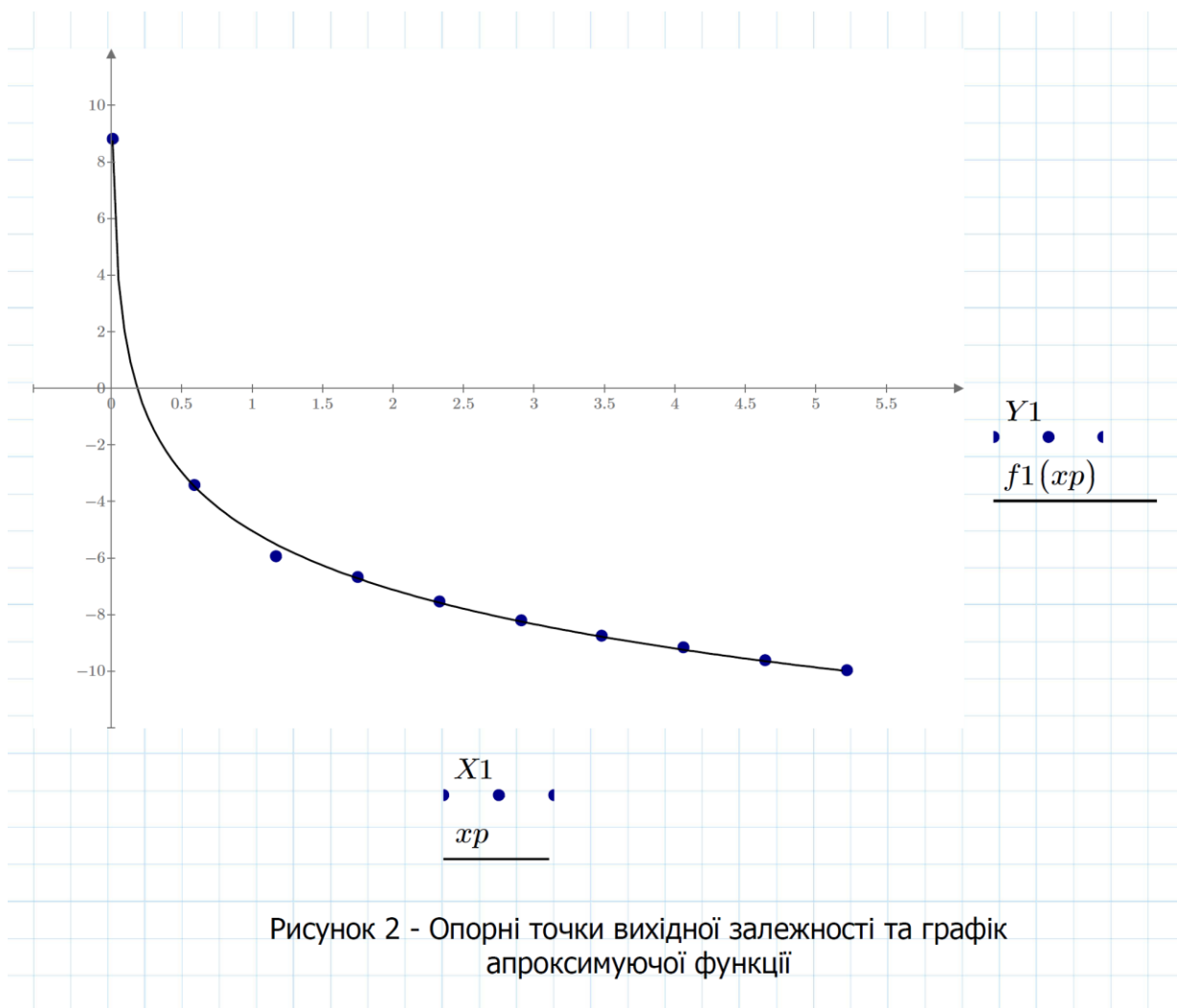


Рисунок 8.4 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення інтерполяції та апроксимації.
2. В чому полягає метод найменших квадратів?
3. Як формулюється критерій методу найменших квадратів?
4. Наведіть приклади застосування методу найменших квадратів.
5. Для чого у лабораторній роботі використовувалася лінеаризація?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Тема: Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини

Мета: освоїти методи точкової оцінки числових характеристик випадкової величини.

ЗАВДАННЯ

За заданими значенням математичного сподівання m та стандартного відхилення s (табл. 9.1) необхідно за допомогою засобів системи Mathcad генерувати вибірку заданого об'єму N з нормальним законом розподілу. здійснити точкову оцінку параметрів отриманої вибірки з використанням методу моментів та методу максимальної правдоподібності. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 9.1

Вихідні дані

Варіант	m	S	N	Варіант	m	S	N
1	5.3	2.6	100	11	4.5	2.0	50
2	4.6	2.0	120	12	8.2	3.9	90
3	7.8	2.1	90	13	4.8	2.2	80
4	5.8	2.3	80	14	7.3	3.1	110
5	6.5	2.4	60	15	5.0	2.3	100
6	5.8	2.5	90	16	6.8	3.5	70
7	6.1	2.1	70	17	6.2	3.0	80
8	8.2	4.0	50	18	4.6	2.2	90
9	6.3	2.9	100	19	8.0	3.9	100
10	7.5	3.6	60	20	4.6	2.4	60

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Обрати вихідні дані згідно з табл. 9.1.
2. Скласти Mathcad документ, в якому передбачити (рис. 9.1 – 9.3):
 - введення вихідних даних;
 - генерацію вибірки випадкових чисел з нормальним законом розподілу, для чого можна скористатися функцією `gnorm`;
 - точкову оцінку числових характеристик вибірки методом моментів;
 - точкову оцінку числових характеристик вибірки методом максимальної правдоподібності;
 - аналіз отриманих результатів та побудову кривої розподілу заданої випадкової величини.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи, вихідні дані.
2. Mathcad документ, де здійснюється оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини.
3. Висновки з аналізом отриманих результатів.

Лабораторна робота №9

Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини

1. Вихідні дані. Параметри вибірки з нормальним розподілом:

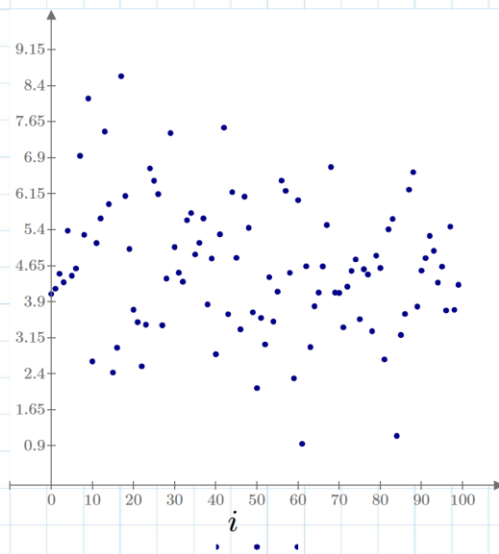
$m := 5$ - математичне сподівання

$s := 1.5$ - стандартне відхилення

$N := 100$ - об'єм вибірки

2. Генерація вибірки випадкових чисел з нормальним законом розподілу

$X := \text{rnorm}(N, m, s)$ $i := 0 \dots N - 1$



X_i

Рисунок 1 - Графічне зображення отриманої вибірки випадкових чисел з нормальним законом розподілу

3. Точкова оцінка параметрів нормального розподілу

Нормальний розподіл описується щільністю:

$$f(x, a, \sigma) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

де a , σ - шукані параметри розподілу

3.1 Метод моментів

Метод моментів точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає у прирівнюванні теоретичних моментів розподілу, що розглядається, емпіричним моментам того самого порядку.

Рисунок 9.1 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини у Mathcad

Точкові оцінки параметрів нормального розподілу становлять:

- оцінкою параметра μ є вибіркова середня (математичне сподівання)
- оцінкою параметра σ є вибіркове середнє квадратичне відхилення

Дані параметри можна оцінити двома способами:

3.1.1 Оцінка параметрів за методом моментів з використанням аналітичних залежностей

$$a1 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_i = 4.632 \quad - \text{ оцінка параметра } \mu$$

$$s1 := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - a1)^2} = 1.399 \quad - \text{ оцінка параметра } \sigma$$

3.1.2 Оцінка параметрів за методом моментів з використанням вбудованих функцій Mathcad

$$a2 := \text{mean}(X) = 4.632 \quad - \text{ функція mean(V) повертає математичне сподівання елементів вектора V}$$

$$s2 := \text{stdev}(X) = 1.399 \quad - \text{ функція stdev(V) повертає стандартне відхилення елементів вектора V}$$

Отримані в п.3.1.1 та 3.1.2 значення параметрів розподілу співпадають.

3.2 Метод найбільшої правдоподібності

Полягає у розрахунку таких значень параметрів, при яких логарифмічна функція правдоподібності досягає максимуму.

Логарифмічна функція правдоподібності визначається виразом:

$$L2(a, s) := \ln \left(\prod_{i=0}^{N-1} f(X_i, a, s) \right)$$

Оскільки логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників, то:

$$L1(a, s) := \sum_{i=0}^{N-1} \ln(f(X_i, a, s))$$

Відшукування максимуму L1 рівнозначно відшукуванню мінімуму функції:

$$L(a, s) := - \sum_{i=0}^{N-1} \ln(f(X_i, a, s))$$

Рисунок 9.2 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини у Mathcad

Розрахунки слід виконувати у блоці розв'язання

$$a := 4 \quad s := 2$$

$$a > 0 \quad s > 0 \quad s < 10 \quad a < 10$$

$$\frac{d}{da} L(a, s) = 0 \quad \frac{d}{ds} L(a, s) = 0$$

$$\begin{bmatrix} a3 \\ s3 \end{bmatrix} := \text{Minerr}(a, s)$$

У Solve Block текстові коментарі не допускаються

використовується знак = з панелі "Порівняння"

$a3 = 4.632 \quad s3 = 1.399$ - отримані значення

Перевірка досягнення логарифмічною функцією правдоподібності максимуму при отриманих коренях:

$$d2a(a, s) := \frac{d^2}{da^2} L1(a, s) \quad d2a(a3, s3) = -51.096$$

$$d2s(a, s) := \frac{d^2}{ds^2} L1(a, s) \quad d2s(a3, s3) = -102.192$$

Оскільки другі частинні похідні від'ємні, то при даних значеннях параметрів логарифмічна функція правдоподібності досягає максимуму.

Рисунок 9.3 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини у Mathcad

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення випадковій величині.
2. Що таке вибірка, генеральна сукупність?
3. Які основні характеристики випадкової величини?
4. Як обрахувати вибіркове математичне сподівання, вибіркиму дисперсію?
5. Які функції Mathcad для обрахування точкових оцінок параметрів нормального розподілу випадкової величини Вам відомі?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Прокопенко Т.О. Теорія систем і системний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]/ Т.О. Прокопенко; М-во освіти і науки України, Черка. Держ. Технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2019. – 139 с.
2. Чорней Н.Б. Теорія систем і системний аналіз: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Н.Б. Чорней, Р.К. Чорней. – К.: МАУП, 2005. – 256 с.: іл.
3. Сурмін Ю.П. Теорія систем і системний аналіз: Навч. посіб. – К.: МАУП, 2003. – 368 с.
4. Теорія систем і системний аналіз: навчальний посібник / О.А. Балтовський, К.Ю. Ісмайлов, О.І. Сіфоров, Г.В. Форос, О.М. Заєць; за заг. Ред. Балтовського О.А. Одеса: РПП ОДУВС, - 156 с.
5. Варенко В.М., Братусь І.В., Дорошенко В.С., Смольников Ю.Б. Юрченко В.О. Системний аналіз інформаційних процесів: Навч. посіб. / В.М. Варенко, І.В. Братусь, В.С. Дорошенко, Ю.Б. Смольников, В.О. Юрченко. – К.: Університет «Україна», 2013. – 203 с.
6. Дудник І.М. Вступ до загальної теорії систем. – К.: Кондор, 2009. – 205 с.
7. Лесечко М.Д. Основи системного підходу: теорія, методологія, практика: Навч. посіб. – Львів: ЛРІДУ УАДУ, 2002. – 300 с.
8. Міца О.В., Лавер В.О. Системний аналіз: навч.-метод. Посіб. / О.В. Міца, В.О. Лавер. – Ужгоро.: вид-во ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. – 63 с.
9. Згуровський М.З. Панкратова Н.Д. Системний аналіз: Проблеми, методологія, застосування. – К.: Наук. Думка, 2005 – 743 с.
10. Дубовой В.М., Ковалюк О.О. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2008. – 185 с.
11. Теорія систем і системний аналіз: конспект лекцій / укладач С.В. Соколов. – Суми: Сумський державний університет, 2020 – 171 с.
12. Аршинова О. Системний аналіз: навч. посіб. / Національний авіаційний ун-т. — К. : НАУ, 2007. — 128с.
13. Юн Г. Основи теорії систем і системний аналіз: Конспект лекцій / Національний авіаційний ун-т. — К. : НАУ, 2004. — 68с.
14. Стопакевич О. Теорія систем і системний аналіз: Підручник для студ. спец. "Комп'ютеризовані системи обробки інформації та управління" / Одеський держ. політехнічний ун-т. — К. : ІСДО, 1996. — 200с.
15. Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу «Математичний аналіз». Основні розділи для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, напряму підготовки «Комп'ютерна інженерія». Частина 1 / уклад.: Горват П. П., Король І. Ю., Гапак О. М., Мигалина С. І., Тютюнникова Г. С. – Ужгород : Ужгородський національний університет, 2019. – 64 с.

[illegible]