

УДК 539.3

Л. Вовк, канд. фіз.-мат. наук

Донецький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ В СИНГУЛЯРНИХ ТОЧКАХ СКЛАДЕНОЇ ОБЛАСТІ

Розглянуто сталі коливання пружної прямокутної області, яка складається з чотирьох ізотропних прямокутників з різними пружними властивостями. Проведено аналіз особливостей хвильового поля на границі розділу середовищ. Досліджено величину значень коефіцієнтів локальної концентрації напружень для різних типів сполучень матеріалів стикованих середовищ

Умовні позначення

$G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}$ – області, з яких складено перетин D тіла;

a, b, c, d – параметри, які характеризують розміри цих областей;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – декартові координати;

A, B, C, D – сингулярні точки перерізу тіла;

$\mu^{(m)}, \nu^{(m)}, \rho^{(m)}$ – модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона і щільність області $G^{(m)}, m = 1, 2, 3, 4$;

q – інтенсивність зовнішнього вібронавантаження;

ω – його частота;

$V_\beta^{(m)}, U_\beta^{(m)}$ – розмірні і безрозмірні амплітудні компоненти вектора переміщень, $\beta = 1, 2$;

$x, y, \hat{x}, \hat{y}$ – безрозмірні глобальні і локальні координати в областях $G^{(m)}$;

$L, \eta, \delta, \gamma, \delta_2, \gamma_2$ – безрозмірні геометричні параметри, які характеризують розміри областей $G^{(m)}$;

$\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$ – віднесені до $\mu^{(m)}$ компоненти тензора напружень;

$\Omega^{(m)}$ – безрозмірні параметри частоти;

$H_\beta^{(m)}, R_\beta^{(m)}, S_\beta^{(m)}, Q_\beta^{(m)}, \theta_k^{(\beta)}, \chi_j^{(\beta)}, t_{fk}^{(m)}, l_{f\beta}^{(m)}, \Omega_\beta^{(m)}$ – довільні константи і параметри, які входять до загального розв'язку задачі;

$r_{ij}^S, r_{ij}^S, \nu_{ij}^S, C_{11}^{(m)}, n^{(m)}, m_{ij}, s^{(m)}$ – пружні параметри складеної області;

$f_1(\hat{y}), \varphi_1(\hat{y}), f_2(x), f_3(x), \varphi_4(x), f_4(y), f_5(y), \varphi_3(y), f_6(\hat{x}), \varphi_2(\hat{x}), f_7(\hat{y}), f_8(\hat{x})$ – додаткові невідомі функції допоміжної крайової задачі; α – параметр локальної особливості за напруженнями;

ПЛО – параметр локальної особливості;

$q^{(m)}$ – віднесена до модуля зсуву $\mu^{(m)}$ інтенсивність зовнішнього вібронавантаження;

Φ_j, F_j – довільні константи, які визначають асимптотичну поведінку допоміжних функцій;

$G^{(\delta)}$ – окіл границі розділу середовищ;

$\bar{E}_\delta$ – внутрішня енергія, накопичена у цій області.

У даній роботі досліджуються особливості локального розподілу динамічних напружень поблизу кутової точки лінії розділу областей поперечного перерізу тіла, складеного з чотирьох різних призматичних пружних тіл, спаяних між собою бічними поверхнями. Визначення характеру поведінки компонентів напружено-деформованого стану поблизу особливих точок зовнішніх і внутрішніх границь кусково-однорідних тіл дозволяє при чисельному аналізі щонайкраще апроксимувати розв'язок і побудувати алгоритм його наближеного визначення. Питання поведінки розв'язків задач теорії пружності в околі кутових точок, що належать лінії розділу двох різних пружних середовищ, вивчаються в багатьох роботах, серед яких відзначимо [1–5]. Характер локальної особливості за напруженнями у кутовій точці стику трьох різних середовищ розглядався в роботі [6]. Отримані в даній роботі результати дозволяють, з однієї сторони, проектувати складені елементи конструкцій з

ускладненою кусково-однорідною внутрішньою структурою, а з другого боку – дати практичні рекомендації з підбору пружних характеристик стикованих областей з метою мінімізації концентрації напружень, що виникає в особливих точках.

Постановка задачі. Нехай перетин нескінченної в напрямку осі α_3 кусково-неоднорідної пружної призми займає в системі координат область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)} \cup G^{(3)} \cup G^{(4)}$, де області $G^{(m)}$ склеєні одна з одною і визначаються нерівностями

$$G^{(1)} = \{|\alpha_1| \leq c; \alpha_2 \in [-b, -d] \cup [d, b]\}; G^{(2)} = \{\alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq d\};$$

$$G^{(3)} = \{\alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; \alpha_2 \in [-b, -d] \cup [d, b]\}; G^{(4)} = \{|\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq d\}.$$

Матеріал областей $G^{(m)}$ передбачається ізотропним і визначається модулем зсуву $\mu^{(m)}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu^{(m)}$ і щільністю $\rho^{(m)}$. Тут і далі верхній індекс буде визначати приналежність механічної характеристики чи пружного модуля до області $G^{(m)}$ ($m=1,2,3,4$).

Нехай на зовнішніх сторонах перетину $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задано навантаження змінної інтенсивності q , що гармонічно змінюється в часі з частотою ω . У кожній області $G^{(m)}$ розглядаємо рівняння руху Ляме, записані в безрозмірних переміщеннях $U_\beta^{(m)} = V_\beta^{(m)} / a$ ($V_\beta^{(m)}$ - амплітудні компоненти вектора переміщень, $\beta=1,2$) і координатах $x = \alpha_1 / a$, $y = \alpha_2 / a$. З огляду на симетрію області D , можливо розглядати хвильове поле частини області, розташованої в першій чверті.

Для зручності в області перетину вводимо локальні безрозмірні координати $\hat{x} = (\alpha_1 - c) / a$, $\hat{y} = (\alpha_2 - d) / a$ і геометричні параметри $\eta = b / a$, $L = a / b$, $\delta = c / a$, $\gamma = d / a$, $\delta_2 = 1 - \delta$, $\gamma_2 = \eta - \gamma$. Віднесені до $\mu^{(m)}$ безрозмірні амплітудні компоненти тензора напружень $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$ зв'язані з безрозмірними, віднесеними до a переміщеннями $U_\beta^{(m)}$ співвідношеннями закону Гука для ізотропного тіла і залежать від безрозмірного частотного параметра $\Omega^{(m)} = \omega a / \sqrt{\mu^{(m)} / \rho^{(m)}}$.

Граничні умови задачі містять у собі силові умови навантаження на зовнішній границі перетину й умови твердого зчеплення областей $G^{(m)}$.

Формулювання допоміжних задач. Загальний розв'язок $U_\beta^{(m)}$, що задовольняє системі рівнянь руху усередині області $G^{(m)}$, конструємо за методом суперпозиції у вигляді суми двох часткових розв'язків цієї системи, кожне з яких описує коливання нескінченних смуг, що утворять при своєму перетинанні область $G^{(m)}$ [7,8]. Парність чи непарність цих часткових розв'язків визначається граничними умовами. При цьому необхідно враховувати, що по координаті $\hat{y}$ функції $U_\beta^{(1)}(x, \hat{y})$, $U_\beta^{(3)}(\hat{x}, \hat{y})$, а по координаті $\hat{x}$ - функції $U_\beta^{(2)}(\hat{x}, y)$, $U_\beta^{(3)}(\hat{x}, \hat{y})$ є функціями загального виду. Таким чином, загальний розв'язок задачі в областях $G^{(m)}$ матиме вигляд

$$U_1^{(1)} = H_1^{(1)} sh(t^{(1)} x) \cos \theta^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2) + (R_1^{(1)} sh(l^{(1)} \hat{y}) + S_1^{(1)} ch(l^{(1)} \hat{y})) \sin \chi^{(1)} (x - \delta),$$

$$U_2^{(1)} = H_2^{(1)} ch(t^{(1)} x) \sin \theta^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2) + (R_2^{(1)} sh(l^{(1)} \hat{y}) + S_2^{(1)} ch(l^{(1)} \hat{y})) \cos \chi^{(1)} (x - \delta);$$

$$U_1^{(2)} = (H_1^{(2)} sh(t^{(2)} \hat{x}) + Q_1^{(2)} ch(t^{(2)} \hat{x})) \cos \theta^{(2)} (y - \gamma) + R_1^{(2)} ch(l^{(2)} y) \sin \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta_2),$$

$$U_2^{(2)} = (H_2^{(2)} sh(t^{(2)} \hat{x}) + Q_2^{(2)} ch(t^{(2)} \hat{x})) \sin \theta^{(2)} (y - \gamma) + R_2^{(2)} sh(l^{(2)} y) \cos \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta_2);$$

$$U_1^{(3)} = (H_1^{(3)} sh(t^{(3)} \hat{x}) + Q_1^{(3)} ch(t^{(3)} \hat{x})) \cos \theta^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + (R_1^{(3)} sh(l^{(3)} \hat{y}) + S_1^{(3)} ch(l^{(3)} \hat{y})) \sin \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2), \\
U_2^{(3)} &= (H_2^{(3)} sh(t^{(3)} \hat{x}) + Q_2^{(3)} ch(t^{(3)} \hat{x})) \sin \theta^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2) + \\
& + (R_2^{(3)} sh(l^{(3)} \hat{y}) + S_2^{(3)} ch(l^{(3)} \hat{y})) \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2); \\
U_1^{(4)} &= H_1^{(4)} sh(t^{(4)} x) \cos \theta^{(2)}(y - \gamma) + R_1^{(4)} ch(l^{(4)} y) \sin \chi^{(1)}(x - \delta), \\
U_2^{(4)} &= H_2^{(4)} ch(t^{(4)} x) \sin \theta^{(2)}(y - \gamma) + R_2^{(4)} sh(l^{(4)} y) \cos \chi^{(1)}(x - \delta).
\end{aligned} \tag{1}$$

Набір констант $H_\beta^{(m)}, Q_\beta^{(m)}, R_\beta^{(m)}, S_\beta^{(m)}$ у формулах (1) забезпечує необхідний ступінь довільності для задоволення граничних умов і умов сполучення в розглянутій складеній області. За значення $\theta^{(\beta)}, \chi^{(\beta)}$ доцільно вибрати такі послідовності чисел $\theta_k^{(\beta)}, \chi_j^{(\beta)}$, щоб системи відповідних функцій були повними й ортогональними на відповідних відрізках [7,8]. З цієї вимоги в якості можливих впливають значення

$$\theta_k^{(1)} = k\pi / \gamma_2, \theta_k^{(2)} = k\pi / \gamma, \chi_j^{(1)} = j\pi / \delta, \chi_j^{(2)} = j\pi / \delta_2, \quad k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$$

Підставляючи вирази (1) у системи рівнянь руху, одержуємо для кожного значення k і j системи лінійних однорідних рівнянь щодо коефіцієнтів $H_1^{(m)}$ і $H_2^{(m)}, \dots, R_1^{(m)}$ і $R_2^{(m)}$. З умови існування нетривіального рішення цих систем знаходимо значення параметрів $t^{(m)}$ і $l^{(m)}$

$$\begin{aligned}
(t_{jk}^{(m)})^2 &= (\theta_k^{(m)})^2 - (\Omega_\beta^{(m)})^2, (l_{jk}^{(m)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 - (\Omega_\beta^{(m)})^2, (\Omega_1^{(m)})^2 = (\Omega^{(m)})^2 / C_{11}^{(m)}, \\
C_{11}^{(m)} &= 2(1 - \nu^{(m)}) / (1 - 2\nu^{(m)}), \Omega_2^{(m)} = \Omega^{(m)}, \\
\theta_k^{(1)} &= \theta_k^{(3)}, \theta_k^{(2)} = \theta_k^{(4)}, \chi_j^{(1)} = \chi_j^{(4)}, \chi_j^{(2)} = \chi_j^{(3)}
\end{aligned}$$

і зв'язок між згаданими коефіцієнтами, що цілком визначає загальний розв'язок задачі у всіх областях $G^{(m)}$ і дозволяє задовольнити умови сполучення і силові граничні умови.

Відповідно до алгоритму модифікованого методу суперпозиції, уперше запропонованого в роботі [9] і розповсюдженого на неоднорідні області в [6,7], замінимо частину вихідних граничних умов допоміжними. Це дозволить одержати аналітичний розв'язок допоміжної задачі. Розв'язок вихідної крайової задачі буде виражено через додаткові функції, що визначають уведені граничні умови. У порівнянні з [6,7,9] граничні умови цієї допоміжної задачі значно ускладняться через наявність чотирьох внутрішніх ліній розділу областей $G^{(m)}$ і приймуть наступний вигляд

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= \{ |x| \leq \delta; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2 \}: U_1^{(1)}(\delta, \hat{y}) = f_1(\hat{y}), \sigma_{12}^{(1)}(\delta, \hat{y}) = \varphi_1(\hat{y}), U_2^{(1)}(x, \gamma_2) = f_2(x), \\
\sigma_{12}^{(1)}(x, \gamma_2) &= 0, U_2^{(1)}(x, 0) = f_3(x), \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \varphi_4(x); \\
G^{(2)} &= \{ 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \gamma \}: U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_4(y), \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, U_1^{(2)}(0, y) = f_5(y), \\
\sigma_{12}^{(2)}(0, y) &= \varphi_3(y), U_2^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = f_6(\hat{x}), \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = \varphi_2(\hat{x}); \\
G^{(3)} &= \{ 0 \leq x \leq \delta_2; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2 \}: U_1^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = f_7(\hat{y}), \sigma_{12}^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = 0, \\
U_1^{(3)}(0, \hat{y}) &= f_1(\hat{y}); \sigma_{12}^{(3)}(0, \hat{y}) = r_{13}\varphi_1(\hat{y}), U_2^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = f_8(\hat{x}), \sigma_{12}^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = 0, \\
U_2^{(3)}(\hat{x}, 0) &= f_6(\hat{x}), \sigma_{12}^{(3)}(\hat{x}, 0) = r_{23}\varphi_2(\hat{x}); \\
G^{(4)} &= \{ |x| \leq \delta; |y| \leq \gamma \}: U_1^{(4)}(\delta, y) = f_5(y), \sigma_{12}^{(4)}(\delta, y) = r_{24}\varphi_3(y), \\
U_2^{(4)}(x, \gamma) &= f_3(x), \sigma_{12}^{(4)}(x, \gamma) = r_{14}\varphi_4(x).
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут через $r_{ij} = \mu^{(i)} / \mu^{(j)}$ позначене відношення модулів зсуву областей, що сполучаються, а через $f_1(\hat{y}), \varphi_1(\hat{y}), \dots, f_8(\hat{x})$ – невідомі допоміжні функції. Відзначимо, що вибір граничних умов допоміжної задачі у вигляді (2) дозволяє автоматично задовольнити частину граничних умов вихідної крайової задачі, що стосуються нормальних переміщень і дотичних напружень на зовнішніх і внутрішніх границях області. Розкладаємо допоміжні функції в ряди Фур'є на відповідних відрізках і, використовуючи загальний розв'язок задачі, складаємо умови (2). Набори вихідних лінійних систем допускають аналітичний розв'язок і дозволяють у явному вигляді виразити характеристики хвильового поля у всій складеній області перетину через коефіцієнти $f_{10}, f_{1k}, f_{20}, f_{2j}, \varphi_{1k}, \dots$ Фур'є введених допоміжних функцій.

Асимптотичний аналіз. Візьмемо до уваги 12 невикористаних граничних умов і умов сполучення вихідної крайової задачі, що являють собою систему інтегральних рівнянь для визначення введених допоміжних функцій, а саме

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)}(\delta, \hat{y}) &= r_{31} \sigma_{11}^{(3)}(0, \hat{y}), \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = r_{32} \sigma_{22}^{(3)}(\hat{x}, 0), U_2^{(1)}(\delta, \hat{y}) = U_2^{(3)}(0, \hat{y}), \\ U_1^{(2)}(\hat{x}, \gamma) &= U_1^{(3)}(\hat{x}, 0), \sigma_{11}^{(2)}(0, y) = r_{42} \sigma_{11}^{(4)}(\delta, y), \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = r_{41} \sigma_{22}^{(4)}(x, \gamma), \\ U_2^{(2)}(0, y) &= U_2^{(4)}(\delta, y), U_1^{(1)}(x, 0) = U_1^{(4)}(x, \gamma), \sigma_{22}^{(1)}(x, \gamma_2) = q^{(1)}, \\ \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q^{(2)}, \sigma_{11}^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = q^{(3)}, \sigma_{22}^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = q^{(3)}, q^{(m)} = q / \mu^{(m)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Досліджуємо особливості хвильового поля в околі нерегулярних точок границі перетину [6-9]. У розглянутій задачі такими точками є кутові точки стику областей $A(\delta, \eta), C(1, \gamma), D(\delta, \gamma)$ і зовнішня кутова точка перетину $B(1, \eta)$. Характер локальних особливостей динамічних напружень у точках A, C і B був вивчений у роботах [6, 7, 10]. У даній роботі детально розглянемо характер локалізації динамічних напружень у точці D стику чотирьох різнорідних середовищ. Для цього потрібно провести асимптотичний аналіз перших восьми рівнянь системи (3). Беручи до уваги, що введені допоміжні функції є переміщеннями і дотичними напруженнями на границях областей, припустимо, що їхні особливості в точці D визначаються формулами

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\xi) &= \Phi_\beta^D(\xi)^{\alpha-1}, f_i'(\xi) = F_i^D(\xi)^{\alpha-1}, (\beta = 1, 2; i = 1, 6) \text{ при } \xi \rightarrow 0; \\ \varphi_3(\xi) &= \Phi_3^D(\gamma - \zeta)^{\alpha-1}, f_5'(\xi) = F_5^D(\gamma - \zeta)^{\alpha-1} \text{ при } \xi \rightarrow \gamma, \\ \varphi_4(\xi) &= \Phi_4^D(\delta - \zeta)^{\alpha-1}, f_3'(\xi) = F_3^D(\delta - \zeta)^{\alpha-1} \text{ при } \xi \rightarrow \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут через α позначено параметр локальної особливості (ПЛО), що характеризує особливості шуканих функцій у точці D , а через $\Phi_\beta^D, \dots, F_3^D$ – довільні константи. Проводячи інтегрування у формулах (4), визначаємо, перепозначаючи константи при особливості, асимптотику коефіцієнтів Фур'є допоміжних функцій при великих значеннях індексів у околі точки D .

Граничні умови задачі (3) такі, що забезпечують обмеженість правих частин системи інтегральних рівнянь у всій області. Вимагаючи тому обмеженості лівих частин системи і використовуючи отримані асимптотики, знаходимо таку однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned} -m_{13} \sin(0,5\pi\alpha)\Phi_1 + r_{21}(1+n^{(3)}\alpha)\Phi_2 - (1+n^{(1)}\alpha)\Phi_4 - 2(n^{(1)} + r_{31}n^{(3)})\sin(0,5\pi\alpha)F_1 - \\ - 2n^{(1)}\alpha F_3 - 2r_{31}n^{(3)}\alpha F_6 = 0, \\ r_{12}(1+n^{(3)}\alpha)\Phi_1 - m_{23} \sin(0,5\pi\alpha)\Phi_2 - (1+n^{(2)}\alpha)\Phi_3 - 2r_{32}n^{(3)}\alpha F_1 - 2n^{(1)}\alpha F_5 - \\ - 2(n^{(2)} + r_{32}n^{(3)})\sin(0,5\pi\alpha)F_6 = 0, \\ -(s^{(1)} + r_{13}s^{(3)})\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_1 + r_{23}n^{(3)}\alpha\Phi_2 - n^{(1)}\alpha\Phi_4 + 2m_{13} \sin(0,5\pi\alpha)F_1 + \\ + 2(1-n^{(1)}\alpha)F_3 + 2(1-n^{(3)}\alpha)F_6 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_{13}n^{(3)}\alpha\Phi_1 - (s^{(2)} + r_{23}s^{(3)})\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_2 - n^{(2)}\alpha\Phi_3 + 2(1-n^{(3)}\alpha)F_1 + 2(1-n^{(2)}\alpha)F_5 + \\
& + 2m_{23}\sin(0,5\pi\alpha)F_6 = 0, \\
& (1+n^{(2)}\alpha)\Phi_2 + m_{24}\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_3 - r_{12}(1+n^{(4)}\alpha)\Phi_4 - 2r_{42}n^{(4)}\alpha F_3 - \\
& - 2(n^{(2)} + r_{42}n^{(4)})\sin(0,5\pi\alpha)F_5 - 2n^{(2)}\alpha F_6 = 0, \\
& (1+n^{(1)}\alpha)\Phi_1 - r_{21}(1+n^{(4)}\alpha)\Phi_3 + m_{14}\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_4 - 2n^{(1)}\alpha F_1 - \\
& - 2(n^{(1)} + r_{41}n^{(4)})\sin(0,5\pi\alpha)F_3 - 2r_{41}n^{(4)}\alpha F_5 = 0, \\
& -n^{(2)}\alpha\Phi_2 - (s^{(2)} + r_{24}s^{(4)})\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_3 + r_{14}n^{(4)}\alpha\Phi_4 - 2(1-n^{(4)}\alpha)F_3 - \\
& - 2m_{24}\sin(0,5\pi\alpha)F_5 - 2(1-n^{(2)}\alpha)F_6 = 0, \\
& -n^{(1)}\alpha\Phi_2 + r_{42}n^{(4)}\alpha\Phi_3 - (s^{(1)} + r_{14}s^{(4)})\sin(0,5\pi\alpha)\Phi_4 - 2(1-n^{(1)}\alpha)F_1 - \\
& - 2m_{14}\sin(0,5\pi\alpha)F_3 - 2(1-n^{(4)}\alpha)F_5 = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут введені позначення $n^{(m)} = 0,5(1-\nu^{(m)})^{-1}$, $m_{ij} = \frac{2-3(\nu^{(i)} + \nu^{(j)}) + 4\nu^{(i)}\nu^{(j)}}{2(1-\nu^{(i)})(1-\nu^{(j)})}$,

$$s^{(m)} = 0,5(3-4\nu^{(m)})/(1-\nu^{(m)}).$$

Для існування нетривіальних рішень однорідної системи (5) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю

$$\Delta(r_{ij}, \nu^{(m)}, \alpha) = 0. \tag{6}$$

Зі співвідношень закону Гука і формул (4) випливає, що якщо значення ПЛО задовольняють нерівності $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, то напруження при наближенні до кутової точки лінії розділу областей необмежено зростають. Порядок особливості при цьому дорівнює $|\operatorname{Re} \alpha - 1|$. Таким чином, дослідження особливостей напруженого стану біля кутової точки ліній розділу чотирьох областей приводиться до відшукування кореня з найменшою дійсною частиною трансцендентного рівняння (6) у залежності від пружних параметрів областей $G^{(m)}$.

Числовий аналіз ПЛО. З даних проведеного числового аналізу визначального рівняння (6) можна зробити наступні висновки. По-перше, для більшості сполучень матеріалів існує позитивний корінь цього рівняння, менший від одиниці, що характеризує наявність особливості в динамічних напруженнях у внутрішній кутовій точці D стику чотирьох середовищ. По-друге, практично для всіх розглянутих сполучень матеріалів значення ПЛО виявляються більше, ніж значення ПЛО при сполученні трьох середовищ[6], що свідчить про зменшення локальної концентрації напружень. По-третє, при сполученні чотирьох областей з однаковими пружними характеристиками ПЛО $\alpha=1$. У цьому випадку локальної концентрації напружень в околі точки D не виникає. По-четверте, для багатьох сполучень матеріалів на відміну від випадку сполучення двох середовищ існує кілька коренів, менших за одиницю. Хоча особливість хвильових характеристик визначається найменшим додатним значенням ПЛО, однак облік цих коренів важливий при побудові асимптотичного рішення системи інтегральних рівнянь (3), оскільки прискорює збіжність обчислювального алгоритму [7,9,10]. По-п'яте, значення ПЛО не змінюється при взаємній заміні місцями пружних характеристик навхрест лежачих областей, а також при їхній круговій перестановці. Це може служити додатковим контролем вірогідності отриманих результатів.

Надалі при характеристиці розглянутих сполучень матеріалів будемо перелічувати їх у круговому порядку, починаючи з матеріалу області $G^{(1)}$. При цьому будемо застосовувати звичайні позначення металів, використовувані в періодичній таблиці хімічних елементів Д.І. Менделєєва, виділяючи їх напівжирним шрифтом. Для сталі приймемо позначення **St**. Наприклад, сполучення **St-Pb-St-Pb** означає, що матеріалом областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ служить сталь, а областей $G^{(3)}$ і $G^{(4)}$ – свинець. Якщо,

наприклад, який-небудь пружний параметр області $G^{(2)}$ варіюється, то сполучення буде записане **St-Pb-G⁽²⁾-Pb**.

У таблиці 1 приведені значення найменшого додатного кореня рівняння (6) для випадку, коли пружні параметри областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ фіксовані і відповідають сталі, а пружні параметри областей $G^{(3)}$ і $G^{(4)}$ варіюються. З даних цієї таблиці, зокрема, випливає, що найменш кращим варіантом сполучення матеріалів буде сполучення **St-Pb-St-Pb**, оскільки саме при такому сполученні ПЛО буде найменшим $\alpha = 0.411$.

Таблиця 1

Значення ПЛО для різних сполучень матеріалів

	Al	W	Fe	Au	Mg	Cu	Pb
Al	0,710	0,910	0,841	0,757	0,642	0,779	0,562
W	0,910	0,811	0,917	1	0,829	1	0,932
Fe	0,841	0,917	1	0,905	0,793	0,934	0,674
Au	0,757	1	0,905	0,821	0,681	0,913	0,586
Mg	0,642	0,829	0,793	0,681	0,585	0,710	0,504
Cu	0,779	1	0,934	0,913	0,710	0,857	0,623
Pb	0,562	0,932	0,674	0,586	0,504	0,623	0,411

Практичний інтерес викликає питання залежності ПЛО від співвідношення жорсткостей стикованих середовищ. За основні параметри виберемо відношення r_{is}, ν_{is} модуля зсуву і коефіцієнта Пуассона до відповідних пружних параметрів сталі. Пунктирною лінією на графіку позначимо криві, що відповідають значенню $\nu_{is} = 1,3$, штрих пунктирної – значенню $\nu_{is} = 0,769$, суцільний – значенню $\nu_{is} = 1$. Розглянемо наступні випадки різного сполучення матеріалів чотирьох областей складеного перетину.

1. Три області перетину виготовлені з однакового матеріалу, а варіюється модуль зсуву четвертої області.

На рис.1 подані залежності $\alpha = \alpha(r_{2s})$ для сполучень матеріалів **St-St-St-G⁽²⁾** (крива 1), **Pb-Pb-Pb-G⁽²⁾** (крива 2) і **W-W-W-G⁽²⁾** (крива 3). З даних цього малюнка і проведеного чисельного аналізу випливає, що:

а) при прагненні модуля зсуву $\mu^{(2)}$ до нуля ПЛО при будь-якому матеріалі прямує до свого граничного значення $\alpha = 0,544$, що було отримано раніше при вивченні ПЛО на стику трьох середовищ [6]. Це значення буде найменшим на всій області зміни параметра r_{2s} ;

б) максимальне значення ПЛО $\alpha = 1$, однак, чим менша твердість фіксованого матеріалу, тим при менших r_{2s} воно досягається;

в) при великих значеннях параметра r_{2s} ПЛО стабілізується, прямуючи до постійного значення. Чим більша жорсткість фіксованого матеріалу, тим більшим буде це значення. Наприклад, для кривої 1 маємо граничне значення ПЛО $\alpha = 0,602$, для кривої 2 – $\alpha = 0,569$, нарешті, для кривої 3 – $\alpha = 0,597$;

г) зміна коефіцієнта Пуассона матеріалу області $G^{(2)}$ незначно впливає на величину ПЛО, причому до значення параметра r_{2s} , при якому $\alpha = 1$, збільшення параметра ν_{2s} збільшує значення ПЛО, а після нього – зменшує.

Таким чином, при проектуванні складеного перетину розглянутого типу варто керуватися тим, що, чим менша твердість матеріалу фіксованих областей $G^{(1)}, G^{(3)}$ і $G^{(4)}$, тим меншою потрібно вибирати твердість наплавлення.

2. Дві сусідні області $G^{(1)}$ і $G^{(3)}$ виконані з одного матеріалу, а варіюються пружні характеристики двох інших областей $G^{(2)}$ і $G^{(4)}$. У цьому випадку можна сформулювати наступні висновки:

а) якщо модулі зсуву матеріалу областей $G^{(2)}$ і $G^{(4)}$ однакові, то при будь-якому значенні параметра $\nu_{2S} = \nu_{4S}$ значення ПЛО $\alpha = 1$. Це означає, що при сполученні чотирьох областей з попарно однаковими пружними характеристиками сусідніх областей локальної концентрації напружень в околі точки стику не буде. Цей висновок узагальнює отриманий раніше аналогічний результат у задачі про сполучення двох пружних середовищ [7,10];

б) якщо коефіцієнти Пуассона областей $G^{(2)}$ і $G^{(4)}$ є різними $\nu^{(4)} \neq \nu^{(2)}$, то при $\mu^{(1)} = \mu^{(3)}$ основний висновок залишається практично тим же. Наприклад, для сполучення матеріалів **St-St-G⁽²⁾-G⁽⁴⁾** при $\nu^{(4)} = 1,5\nu^{(2)}$ залежність $\alpha = \alpha(r_{2S})$ майже нічим не відрізняється від одиниці. При даних значеннях пружних параметрів перетину мінімальне значення ПЛО $\alpha = 0,989$;

в) якщо взяти модулі зрушення областей $G^{(2)}$ і $G^{(4)}$ різними, то при будь-яких значеннях параметрів ν_{2S} і ν_{4S} картина кардинально змінюється. Аналізуючи залежність $\alpha = \alpha(r_{2S})$ при $\nu_{2S} = \nu_{4S} = 1$ (матеріал областей $G^{(1)}$ і $G^{(3)}$ – сталь) для двох випадків різних жорсткостей областей $G^{(2)}$ і $G^{(4)}$: $\mu^{(4)} = 5\mu^{(2)}$ і $\mu^{(4)} = 0,2\mu^{(2)}$ можна дійти до наступних висновків: по-перше, зміна жорсткості однієї з областей обов'язково знижує значення ПЛО; по-друге, мінімальне ($\alpha = 0,738$), максимальне ($\alpha = 0,868$ при $r_{2S} \rightarrow \infty$) і граничне при $r_{2S} \rightarrow 0$ ($\alpha = 0,802$) значення ПЛО в обох випадках збігаються.

Основний висновок, який можна зробити при розгляді перетинів такої конфігурації, полягає в тому, що потрібно вибирати матеріали стикованих середовищ попарно однаковими. При цьому дуже важливо враховувати, що найбільш небезпечною сингулярною точкою перетину стає точка *C* стику двох середовищ. Так, для сполучення матеріалів **St-St-Pb-Pb** значення ПЛО в точці *D* $\alpha = 1$, а в точці *C* [10] $\alpha = 0,722$.

3. Дві нахрест лежачі області, наприклад $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, виконані з одного матеріалу, а варіюються пружні параметри двох інших областей $G^{(3)}$ і $G^{(4)}$.

На рис.2 проілюстровані графіки залежності ПЛО від параметра r_{3S} за умови $\mu^{(3)} = \mu^{(4)}$ для трьох сполучень матеріалів, коли матеріалом областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$ є сталь (крива 1), свинець (крива 2) і вольфрам (крива 3). Спостерігається деяка подібність із кривими, поданими на мал.1, однак існують і деякі принципові відмінності:

а) при прямуванні параметра r_{3S} до нуля значення ПЛО приймає значення, що близькі до нуля. При цьому, чим більша жорсткість матеріалу фіксованих областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$, тим менші значення ПЛО. Так, при $r_{3S} = 0,001$ маємо $\alpha = 0,193$ для кривої 2 і $\alpha = 0,044$ для кривої 3. Це може свідчити про дуже сильну локальну концентрацію напружень в околі точки *B*;

б) при дуже великих значеннях параметра r_{3S} значення ПЛО не стабілізується, як у випадку 1, а також приймає дуже малі значення. При цьому ці значення знову залежать від типу матеріалу областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. При тих же досить великих значеннях параметра r_{3S} значення ПЛО буде більше для тих сполучень матеріалів, що відповідають більш твердим матеріалам областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. Для кривої 2 при $r_{2S} = 1000$ маємо $\alpha = 0,017$, для кривої 3 – $\alpha = 0,083$.

Інші висновки аналогічні до висновків, сформульованих у п.1. Таким чином, для розглянутої конфігурації перетину деталі не бажано стикувати матеріали, у яких модулі зсуву сильно різняться, оскільки це приведе до сильної концентрації напружень в околі точки стику середовищ.

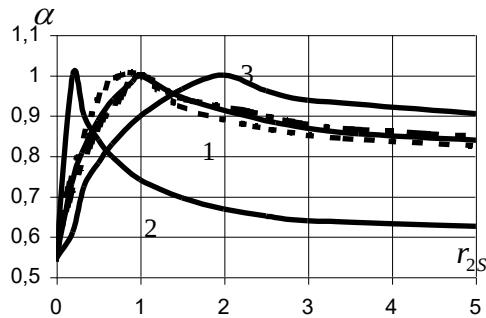


Рис. 1. Залежність ПЛО від жорсткісного параметра при фіксованому матеріалі трьох стикованих областей

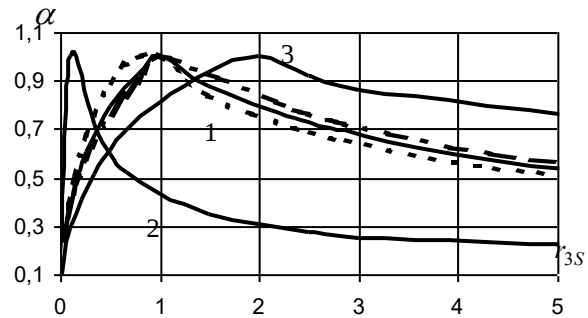


Рис. 2. Залежність ПЛО від жорсткісного параметра при фіксованому матеріалі двох навхрест лежачих областей

Дослідження спектра резонансних частот і динамічної напруженості складеного тіла. Розв'язання системи інтегральних рівнянь проводимо за звичайною методикою [7,8,10], зводячи її до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів Фур'є допоміжних функцій. Відома асимптотика поведінки цих коефіцієнтів при великих номерах дозволяє звести цю систему до кінцевої. Частотне рівняння одержуємо, дорівнюючи визначник цієї системи до нуля. Вірогідність розрахунків перевірялася шляхом порівняння одержуваних за пропонуваною методикою результатів з результатами розрахунків за методом кінцевих елементів. Похибка при обчисленні резонансних частот на всьому розглянутому частотному діапазоні росла з ростом величини частотного параметра $\Omega^{(1)}$, але не перевищувала 3%.

На наступних малюнках подано спектри резонансних частот для перетину з розмірами $\delta = 0,6, \gamma = 0,8\eta$. Розглянуті два випадки сполучення матеріалів перетину: коли однакові матеріали навхрест лежачих областей (рис.3) і сусідніх областей (рис.4). І в першому, і в другому випадках розглянуті пари матеріалів з різними співвідношеннями жорсткостей, що дозволяє простежити вплив величини ПЛО в сингулярних крапках перетину на картину спектра резонансних частот.

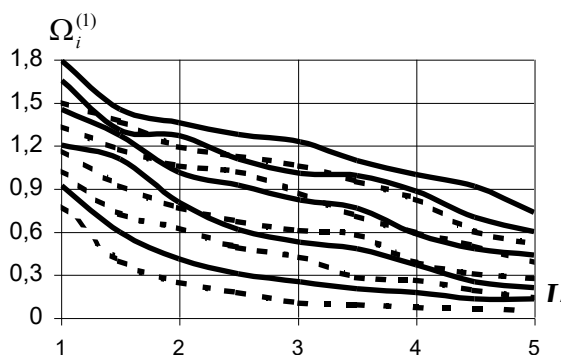


Рис.3. Спектр резонансних частот для сполучення матеріалів St-W-St-W (суцільна лінія) і St-Pb-St-Pb (пунктирна лінія)

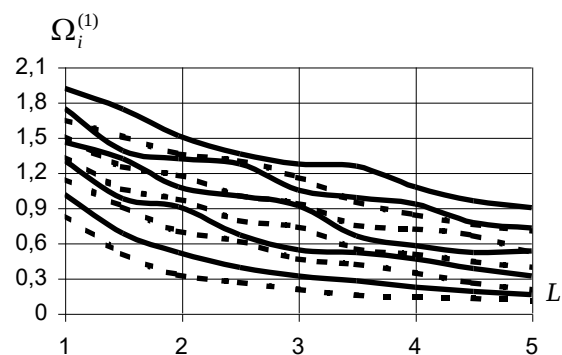


Рис.4. Спектр резонансних частот для сполучення матеріалів St-St-W-W (суцільна лінія) і St-St-Pb-Pb (пунктирна лінія)

Аналізуючи дані поданих малюнків, можна стверджувати, що:

1. Картина спектра резонансних частот для даного випадку неоднорідності перетину нагадує відповідні картини для випадків прямокутного складеного перетину з двох матеріалів і однорідного прямокутного перетину.

2. Чим більша різниця у жорсткості стикованих матеріалів, тим більш плавними виглядають на обох графіках криві залежностей $\Omega^{(1)} = \Omega^{(1)}(L)$

3. В другому випадку сполучення матеріалів на кривих зазначеної залежності можна помітити ділянки, на яких значення резонансної частоти майже не змінюється зі зміною геометричного параметра L .

4. Чим більша величина «сумарної локальної особливості» в особливих точках перетину, тобто сума величин ПЛО в крапках D , A і C , тим менш плавними виглядають криві зазначених залежностей і тим більше на них особливих ділянок. На поданих малюнках найбільш сингулярною виглядає крива залежності $\Omega^{(1)} = \Omega^{(1)}(L)$ для сполучення матеріалів **St-St-W-W**. Для цього сполучення матеріалів величини значень ПЛО в особливих точках границі перетину рівні $\alpha_D = \alpha_A = \alpha_B = 1$, $\alpha_C = 0,969$. Для порівняння приведемо ті ж значення ПЛО для сполучення матеріалів **St-St-Pb-Pb**: $\alpha_D = \alpha_A = \alpha_B = 1$, $\alpha_C = 0,722$.

5. Вид кривої аналізованої залежності залежить не тільки від суми величин ПЛО в особливих точках перетину, але і від порядку сполучення матеріалів стикованих областей, що видно з порівняння розташування кривих на рис.3 і рис.4.

Проведемо аналіз внутрішньої енергії $\bar{E}_\delta$, накопиченої в області $G^{(\delta)} = \{ |x - \delta| \leq 0,2\delta; 0 \leq y \leq \eta \}$. Критерієм вірогідності обчислень служила точність виконання умов сполучення середовищ. Похибка виконання умов сполучення за переміщеннями у всьому розглянутому частотному діапазоні не перевищувала 2-3% від максимальної величини переміщень. Точність виконання умов сполучення за напруженнями в околі сингулярних точок A і D границі складеної області не перевищувала 6-8%.

У таблиці 2 подані дані розрахунків на перших трьох резонансних частотах $\Omega_i^{(1)}$ процентного відношення $E_i = \bar{E}_\delta / \bar{E}_i$ енергії, накопиченої в області $G^{(\delta)}$, до енергії, накопиченої у всій області перетину, розташованої в першій чверті (індекс i визначає номер резонансної частоти, на якій велися розрахунки). Розрахунки проведені для різних сполучень матеріалів пружних параметрів стикованих середовищ при $\eta = 0,5$, $\delta = 0,8$, $\gamma = 0,4$. Через α_D і α_A позначені значення ПЛО в сингулярних точках перетину області. Значення ПЛО в точці $B[6]$ не залежить від типу матеріалу області $G^{(3)}$ і дорівнює $\alpha_B = 1$.

Таблиця 2

Розподіл енергії в околі лінії розділу середовищ на різних резонансних частотах

Сполучення матеріалів	Значення ПЛО		Резонансні частоти			Відносна енергія (%)		
	α_D	α_A	$\Omega_1^{(1)}$	$\Omega_2^{(1)}$	$\Omega_3^{(1)}$	E_1	E_2	E_3
St-Pb-St-W	0,932	0,722	0,432	1,201	1,419	8,1	10,2	34,7
St-Mg-St-Au	0,681	0,848	0,309	1,073	1,277	7,9	8,2	29,6
St-Cu-St-Al	0,779	0,968	0,294	1,029	1,258	9,2	10,3	40,7
St-W-St-Au	1,000	0,969	0,327	1,102	1,296	8,3	8,0	12,5

З даних таблиці випливає, що, чим менше значення ПЛО (а швидше за все можна говорити про суму значень ПЛО в особливих точках перетину), тим сильніший

сплеск енергії на границі розділу середовищ. Подібне явище найбільш яскраво виражено на частотах граничного резонансу, при яких спостерігається сильна концентрація динамічних напружень в околі сингулярних точок і ліній границі. Аналізуючи дані, подані в таблиці, можна зробити висновок, що такою частотою для даних сполучень матеріалів є третя резонансна частота.

Для завершення числового аналізу проаналізуємо особливості концентрації внутрішньої енергії не на всій лінії розділу різнорідних середовищ, а в околі особливих точок D і A складеного перетину. Це дасть можливість вказати найбільш небезпечні області перетину, у яких концентрація напружень максимальна. Введемо області $G^{(A)} = \{ |x - \delta| \leq 0,1\delta_2; 0,8\gamma_2 \leq \hat{y} \leq \gamma_2 \}$ і $G^{(D)} = \{ |x - \delta| \leq 0,1\delta_2; |y - \gamma| \leq 0,1\gamma_2 \}$. Ці області

мають однакову площу і можуть розглядатися як околиці точок A і D . Через $E_i^{(A)}, E_i^{(D)}$ позначимо внутрішні енергії, накопичені в околах відповідних точок на i -й резонансній частоті, а через $E_i^{(AD)} = E_i^{(A)} / E_i^{(D)}$ – їхнє відношення. Характеристики перетину виберемо тими ж, що і при аналізі власних форм коливань. У таблиці 3 подані величини відносин $E_i^{(AD)}$, обчислені для розглянутих раніше чотирьох типів сполучень матеріалів. Розрахунки проведені для третьої, четвертої і п'ятої власних частот при значеннях геометричних параметрів $L = 3,5$, $\delta = 0,6$, $\gamma = 0,8\eta$.

Таблиця 3

Порівняння величин енергій, накопичених в околах особливих точок перетину

Сполучення матеріалів	Резонансні частоти			Відношення енергій		
	$\Omega_3^{(1)}$	$\Omega_4^{(1)}$	$\Omega_5^{(1)}$	$E_3^{(AD)}$	$E_4^{(AD)}$	$E_5^{(AD)}$
St-W-St-W	0,762	0,984	1,056	0,644	1,025	0,987
St-Pb-St-Pb	0,589	0,743	0,934	0,607	0,785	0,970
St-St-W-W	0,681	0,994	1,238	1,144	1,342	1,017
St-St-Pb-Pb	0,569	0,758	0,980	1,367	0,941	1,024

Основний висновок, який можна зробити, аналізуючи дані розрахунків, приведені в таблиці, полягає в тому, що не на всіх частотах менше значення ПЛО в особливих точках A або D визначає більше значення енергії $E_i^{(A)}, E_i^{(D)}$. Хоча подібне твердження варто визнати справедливим для лінії розділу середовищ, що з'єднує ці точки, однак на деяких частотах меншому значенню ПЛО в розглянутих особливих точках A і D складеного перетину буде відповідати менше значення енергій $E_i^{(A)}, E_i^{(D)}$, накопичених в околах $G^{(A)}, G^{(D)}$ цих точок. Наприклад, для сполучення матеріалів **St-St-Pb-Pb**, хоча значення ПЛО задовольняють нерівності $\alpha_D > \alpha_A$, але на четвертій резонансній частоті $E_4^{(AD)} < 1$, тобто $E_4^{(D)} > E_4^{(A)}$. Слід також зазначити, що, як показали розрахунки, з ростом порядкового номера резонансної частоти накопичені в областях $G^{(A)}, G^{(D)}$ значення енергії зближаються.

Висновки. Більшість робіт, що вивчають особливості напружено-деформованого стану в сингулярних точках границі, стосуються або однорідних тіл (границя містить кутові точки), або до кусково-однорідних складених тіл. Тут границя розділяється на зовнішню, котра також може мати кутові точки, і внутрішню, що складається з лінії розділу середовищ з різними пружними властивостями. Поле напружень у таких тілах повинне залежати від пружних констант за посередництвом двох комбінованих параметрів Дандерса [3,4,10]. При розгляді деформування кусково-однорідних тіл, складених із трьох чи чотирьох різнорідних матеріалів, ввести такі компактні параметри можливості немає.

Таким чином, введення у формулах (4) поняття ПЛО за напруженнями α , запроваджене в даній роботі, дозволяє узагальнити отримані раніше результати для випадку сполучення двох середовищ, оскільки цей параметр визначає характер особливостей напружено-деформованого стану у сингулярній точці стику чотирьох середовищ. Для його визначення треба лише знайти корені трансцендентного рівняння (6), що не набагато складніше за обчислення параметрів Дандерса. Визначення ПЛО дає змогу прогнозувати характер локальної концентрації напружень у проблемних зонах перетину тіла. Для цього потрібно підбирати такі пружні характеристики стикованих областей, що відповідають максимальним значенням ПЛО α . У такий спосіб можна мінімізувати динамічні напруги в сингулярних точках границі перетину ще на етапі проектування.

Треба зазначити, що саме корені трансцендентного рівняння (6) визначають характер поведінки компонентів хвильового поля поблизу внутрішньої особливої точки. З математичної точки зору, саме в цій точці ряди для динамічних напружень будуть розбіжними, тому визначення згаданих коренів дає можливість, по-перше, вдало підібрати координатні функції при чисельному розв'язанні системи інтегральних рівнянь (3), і, по-друге, виділити і просумувати повільно збіжні частини у рядах Фур'є для компонент тензора напружень.

Як впливає з проведеного аналізу, значення ПЛО разом з частотним параметром $\Omega^{(1)}$ також суттєво впливають на характер спектра резонансних частот і розподілу динамічної напруженості в складеній області.

З огляду на зміну ПЛО при малих значеннях жорсткісного параметра, можна застосувати отримані результати на етапі проектування паяних і клейових стикових з'єднань, що працюють у вібраційному полі. Як перспективи розвитку даної методики можна намітити дослідження особливостей локальної концентрації напружень при сполученні анізотропних пружних середовищ.

The natural oscillations of the elastic rectangular nonhomogeneous region, which consist of the four isotropic rectangles with different elastic properties, are considered. The analysis of the wave fields peculiarity at the border of the media's partition is done. The value of the local concentration ratio and resonance frequency spectrum for the different pair combinations of the dock media's materials is investigated.

Література

1. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т.31. – Вып.1. – С.178-186.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688с.
3. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21. – №5. – С. 121-125.
4. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1971. – Т. 38. – №2. – С. 87-96.
5. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52. – Вып.6. – С.1044-1048.
6. Вовк Л.П. Асимптотическое исследование собственных колебаний неоднородного прямоугольника с внутренним отверстием // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2001. – №1. – С.29-33.
7. Вовк Л.П. Особенности гармонических колебаний кусочно-неоднородной прямоугольной области // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2002. – №4. – С.9-13.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К: Наук. думка, 1981. – 283с.
9. Белоконов А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С.56-59.
10. Вовк Л.П. Об особенностях волнового поля в зоне скачкообразного изменения упругих свойств кусочно-неоднородных областей // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2003. – №3. – С. 25-28.

Одержано 20.12.03 р.