

УДК 539.3

Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

ТИСК КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ, ЩО ЗУМОВЛЕНІ ЗОСЕРЕДЖЕНИМ НАГРІВАННЯМ

Отримано формули для визначення контактних напружень у шарі, в який втискується абсолютно гладкий кільцевий штамп, за наявності в шарі залишкових деформацій, зумовлених зосередженим нагріванням при зварюванні. Наведено числовий приклад і показано, що геометрія штампа і наявність у шарі залишкових деформацій суттєво впливає на величину і характер розподілу контактних напружень.

Вступ

Проблема визначення контактних деформацій і напружень є важливою і актуальною для дослідження міцності деталей машин і споруд в місцях їх взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалів конструкції і несучої здатності основи. В багатьох працях досліджувався вплив температурних полів та залишкових напружень на характер контактної взаємодії тіл [1,2]. Для зварних конструкцій розроблено метод визначення залишкових напружень в оболонках і пластинах, що ґрунтується на використанні розв'язків рівнянь механіки деформівних твердих тіл з власними деформаціями та експериментальної інформації, отриманої фізичними методами, і на основі розв'язків обернених задач дозволяє відтворити залишкові деформації і напруження в довільній точці елемента конструкції [3,4]. Зокрема, в статті [4] визначено напружений стан в пластині, який зумовлений вварюванням циліндричного диска коловим швом. Питання дослідження впливу залишкових зварювальних напружень в шарі на величину і характер розподілу напружень контактної взаємодії з штампом вивчаються в роботах [5, 6].

Нехай в ізотропний шар, товщиною h , який віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z , що лежить на жорсткій основі, втискується поступально (без обертання) абсолютно гладкий кільцевий штамп силою P (рис.1). Гладкість означає, що на поверхні контакту дотичні напруження дорівнюють нулю. В області контакту штамп обмежений поверхнею обертання, яка складається з трьох частин: плоскої поверхні для $r_1 \leq r \leq r_2$ та параболоїдів з вершинами в точках r_1, r_2 .

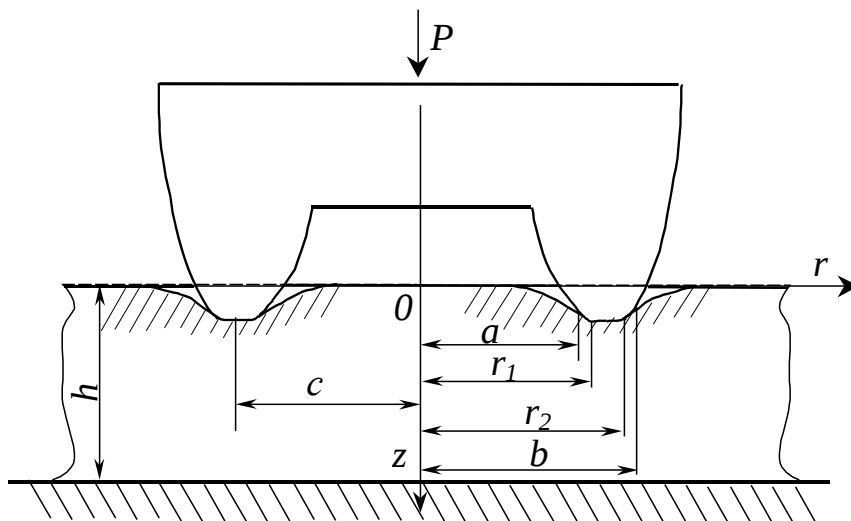


Рис.1. Схема взаємодії кільцевого штампа з шаром

В циліндричній системі координат з початком на верхній площині шару функцію, яка описує форму основи штампа, можна записати так

$$W(r) = \begin{cases} W(a) + \frac{1}{2R_1} [(r_1 - a)^2 - (r_1 - r)^2], & a \leq r < r_1; \\ W(a) + \frac{1}{2R_1} (r_1 - a)^2, & r_1 \leq r \leq c; \\ W(b) + \frac{1}{2R_2} (r_2 - b)^2, & c < r \leq r_2; \\ W(b) + \frac{1}{2R_2} [(r_2 - b)^2 - (r_2 - r)^2], & r_2 < r < b, \end{cases} \quad (1)$$

де R_1, R_2 - радіуси кривини параболоїдів, $c = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Знайдемо розподіл нормальних напружень σ_{zz} під штампом.

Якщо жорстка основа, на якій лежить шар, є абсолютно гладкою, то крайові умови задачі запишуться так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= 0 \quad (z=0, 0 \leq r < \infty); \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (z=0, 0 \leq r < a, b \leq r < \infty); \\ u_z &= W(r) \quad (z=0, a \leq r \leq b); \quad \sigma_{rz} = 0; \quad u_z = 0 \quad (z=h, 0 \leq r < \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

де σ_{rz} - дотичні напруження в шарі.

Використовуючи метод умовних пластичних деформацій [3], розглянемо випадок, коли попередні (залишкові) напруження в шарі обумовлені умовними пластичними деформаціями, які для осесиметричної задачі в циліндричній системі координат r, φ, z можна описати симетричним тензором $\{\varepsilon_{ij}^0\}$:

$$\varepsilon_{rr}^0 = \varepsilon_{rr}^0(r, z), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = \varepsilon_{\varphi\varphi}^0(r, z), \quad \varepsilon_{zz}^0 = -(\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0), \quad \varepsilon_{r\varphi}^0 = \varepsilon_{rz}^0 = \varepsilon_{z\varphi}^0 = 0. \quad (3)$$

Система рівнянь рівноваги в цьому випадку набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}^0}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - 2\mu \left[\frac{\partial \varepsilon_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} (\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) \right] &= 0, \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}^0}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо компоненти тензора ε_{ij}^0 можна прийняти незалежними від координати z , то в цьому випадку систему рівнянь (4) запишемо так

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u - 2\mu \text{grad } \omega^0 = 0, \quad (5)$$

де

$$\omega^0 = \varepsilon_{rr}^0 + \varphi^0(r), \quad \varphi^0(r) = \int \frac{1}{r} (\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\varphi\varphi}^0) dr. \quad (6)$$

Частинний розв'язок рівнянь (5) зобразити у вигляді $u_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$, $u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$,

тоді для визначення скалярної функції Ψ отримаємо рівняння

$$\nabla^2 \Psi = m_1 \omega^0, \quad m_1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}. \quad (7)$$

Компоненти напруженого стану $\bar{\sigma}_{ij}$, які відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги (4), зображаються через функцію Ψ так:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla^2\Psi - 2G\varepsilon_{ij}^0. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення (6)-(8), отримаємо різні варіанти формул для визначення компонентів тензора напружень, що відповідають частинному розв'язку системи рівнянь (4):

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \lambda \nabla^2 \Psi - 2G \varepsilon_{rr}^0 = -2G \left(\nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) + 2G \varphi^0(r); \\
\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= 2G \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \lambda \nabla^2 \Psi - 2G \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = -2G \left(\nabla^2 \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + 2G (\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + \varphi^0(r)); \\
\bar{\sigma}_{rz} &= 2G \varepsilon_{rz} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}, \quad \bar{\sigma}_{zz} = -2G \left(\nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + 2G (2\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + \varphi^0(r)).
\end{aligned} \quad (9)$$

Формули (9) доцільно подати також у вигляді, коли в правій частині буде вираз $r^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ або $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$, оскільки вираз $r^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ легко одержується інтегруванням рівняння (7), а $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$ у випадку сталого за товщиною поля власних деформацій.

Запишемо ще такі вирази для напружень $\bar{\sigma}_{ij}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr} &= -2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \varphi^0(r) \right), \quad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2G \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + 2G \left[\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{rr}^0 + \varphi^0(r)) - \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 \right], \\
\bar{\sigma}_{zz} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2G \left[\frac{1}{1-\nu} \varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \varphi^0(r) \right], \quad \bar{\sigma}_{rz} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}.
\end{aligned} \quad (10)$$

На основі експериментальних даних встановлено [7], що поле залишкових пластичних деформацій, викликане зосередженим нагріванням пластини, можна описати виразами:

$$\varepsilon_{rr}^0 = -\varepsilon_0^* (1 - \omega p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = -\varepsilon_0^* (1 + \omega p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2), \quad (11)$$

де параметри ε_0^* , ω , p знаходять на основі експериментальних даних.

Функція Ψ , яка визначає частинний розв'язок рівнянь тривимірної теорії пружності з власними деформаціями, у цьому випадку задовольняє рівняння (7), яке з врахуванням поля (11) набуде вигляду

$$\nabla^2 \Psi = -m_1 \varepsilon_0^* (1 - \omega p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2) + m_1 \varphi^0(r), \quad (12)$$

$$\text{де } \varphi^0(r) = -\varepsilon_0^* \omega \exp(-p^2 r^2). \quad (13)$$

Оскільки права частина (12) не залежить від z , то

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (14)$$

і рівняння (12) прийме форму

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = -m_1 \varepsilon_0^* (1 + \omega - \omega p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2) \quad (15)$$

або

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = -m_1 \varepsilon_0^* ((1 + \omega)r - \omega p^2 r^3) \exp(-p^2 r^2). \quad (16)$$

Інтегруючи (16), отримаємо

$$r \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -m_1 \varepsilon_0^* \left[\frac{1}{2} \left(\omega r^2 - \frac{1}{p^2} \right) \exp(-p^2 r^2) + C_1 \right], \quad (17)$$

звідки

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -m_1 \varepsilon_0^* \left[\frac{1}{2} \left(\omega r - \frac{1}{r p^2} \right) \exp(-p^2 r^2) + \frac{C_1}{r} \right]. \quad (18)$$

Права частина (18) при $r = 0$ повинна бути обмеженою внаслідок обмеженості переміщень і тому, що $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = u_r$. З врахуванням цього отримуємо

$$C_1 = \frac{1}{2p^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\varepsilon_0^*}{1-\nu} \left[F(r) - \frac{1-2\nu}{2} \omega \exp(-p^2 r^2) \right], \quad (19)$$

$$F(r) = \frac{1-2\nu}{p^2 r^2} [1 - \exp(-p^2 r^2)].$$

Формули (10) для компонентів напружень $\bar{\sigma}_{ij}$, що відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги, з врахуванням (19), набудуть вигляду:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \varepsilon_0^* \frac{G}{1-\nu} [F(r) - \omega \exp(-p^2 r^2)],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -\varepsilon_0^* \frac{G}{1-\nu} [F(r) - 2(1-2\nu - \omega/2 + \omega p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2)], \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\varepsilon_0^* \frac{G}{1-\nu} [2 - \nu + \nu \omega (1 - p^2 r^2) \exp(-p^2 r^2)], \quad \bar{\sigma}_{rz} = 0.$$

Подано напруження $\bar{\sigma}_{zz}$ у вигляді інтеграла Ганкеля

$$\bar{\sigma}_{zz} = 2G \frac{\varepsilon_0^*}{1-\nu} \int_0^\infty \frac{\alpha}{2p^2} \left[\nu - 2 - \frac{\nu \omega \alpha^2}{4p^2} \right] \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (21)$$

Формули для визначення напружень у шарі запишемо так:

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}, \quad (22)$$

де складові $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ виражаються через функцію Лява L , яку у випадку осової симетрії зручно подати через інтеграл Ганкеля

$$L = \int_0^\infty \alpha^{-2} \{A(\alpha) \operatorname{sh} \alpha z + B(\alpha) \operatorname{ch} \alpha z + \alpha z [C(\alpha) \operatorname{sh} \alpha z + D(\alpha) \operatorname{ch} \alpha z]\} J_0(\alpha z) d\alpha. \quad (23)$$

Запишемо формули для напружень $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ через інтеграли Ганкеля

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha \{2\nu (C \operatorname{sh} \alpha z + D \operatorname{ch} \alpha z) J_0(\alpha r) + [(A + D + \alpha z \cdot C) \operatorname{ch} \alpha z +$$

$$+ (B + C + \alpha z \cdot D) \operatorname{sh} \alpha z] \times \left[J_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} J_1(\alpha r) \right]\} d\alpha; \quad (24)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha \{[(1-2\nu)C - B - \alpha z \cdot D] \operatorname{sh} \alpha z + [(1-2\nu)D - A - \alpha z \cdot C] \operatorname{ch} \alpha z\} J_0(\alpha r) d\alpha$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha \{[2\nu C + B + \alpha z \cdot D] \operatorname{ch} \alpha z + [2\nu D + A + \alpha z \cdot C] \operatorname{sh} \alpha z\} J_1(\alpha r) d\alpha.$$

Вертикальне зміщення $\bar{\bar{u}}_z$ зобразиться так:

$$\bar{\bar{u}}_z = \frac{1}{1-2\nu} \int_0^\infty \{[2(1-2\nu)C - B - \alpha z \cdot D] \operatorname{ch} \alpha z + [2(1-2\nu)D - A - \alpha z \cdot C] \operatorname{sh} \alpha z\} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{rz} = 0$ при $z = 0$ і $z = h$ та $u_z = 0$ при $z = h$, одержимо систему трьох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2\nu C + B = 0 \\ [2\nu C + B + \alpha h D] \operatorname{ch} \alpha h + [2\nu D + A + \alpha h C] \operatorname{sh} \alpha h = 0 \\ [2(1-2\nu)C - B - \alpha h D] \operatorname{ch} \alpha h + [2(1-2\nu)D - A - \alpha h C] \operatorname{sh} \alpha h = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

Система (25) дає можливість виразити функції $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $D(\alpha)$ через $C(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \frac{\alpha h + \nu \operatorname{sh} 2\alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h} C(\alpha); \quad B(\alpha) = -2\nu C(\alpha); \quad D(\alpha) = -\operatorname{cth} \alpha h C(\alpha). \quad (26)$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{zz} = 0$ при $0 \leq r \leq a, r \geq b$ та $u_z = w(r)$ при $a \leq r \leq b$, приходимо до потрібних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty C(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{m_1}{2} w(r), \quad a \leq r \leq b; \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \alpha \left[-\frac{2G}{1-2\nu} \cdot \frac{C(\alpha)}{\Delta(\alpha)} + 2G\varepsilon_0^* f_1(\alpha) \right] J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq a, r \geq b. \quad (28)$$

Тут

$$\Delta(\alpha) = \frac{sh^2 \alpha h}{sh \alpha h ch \alpha h + \alpha h}; \quad f_1(\alpha) = \frac{m_2}{2} \left[\frac{\nu-2}{p^2} - \frac{\nu \omega \alpha^2}{4p^4} \right] \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}; \quad m_2 = \frac{1}{1-\nu}.$$

Рівняння (28) запишемо у вигляді

$$\int_0^\infty \alpha \left\{ -\frac{2G}{1-2\nu} \cdot \frac{C(\alpha)}{\Delta(\alpha)} + 2G\varepsilon_0^* f_1(\alpha) \right\} J_0(\alpha r) d\alpha = X(r) [u(r-a) - u(r-b)], \quad 0 \leq r < \infty, \quad (29)$$

де $u(x)$ - одинична функція Хевісайда.

Застосуємо до співвідношення (29) теорему обернення інтегрального перетворення Ганкеля

$$-\frac{2G}{1-2\nu} \cdot \frac{C(\alpha)}{\Delta(\alpha)} + 2G\varepsilon_0^* f_1(\alpha) = \int_a^b r X(r) J_0(\alpha r) dr = \Psi(\alpha). \quad (30)$$

Візьмемо функцію $X(r)$ у вигляді:

$$X(r) = \sum_{n=1}^N a_n \left[J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \cdot N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) \cdot N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \right], \quad (31)$$

де γ_n - додатні корені рівняння, a_n - невідомі поки що коефіцієнти,

$$J_0\left(\frac{b}{a} z\right) \cdot N_0(z) - J_0(z) \cdot N_0\left(\frac{b}{a} z\right) = 0, \quad (32)$$

$N_0(x)$ - функція Неймана.

Відзначимо, що функція $X(r)$ визначає шукані контактні напруження під штампом.

Обчислимо інтеграл (30), враховуючи вираз (31) для функції $X(r)$

$$\Psi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} \left\{ \frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R(\gamma_n) \right\}, \quad (33)$$

$$R(\gamma_n) = \frac{b}{a} \gamma_n \left[N_0(\gamma_n) J_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) \right].$$

З (30) знайдемо

$$C(\alpha) = -\frac{1-2\nu}{2G} \Delta(\alpha) \Psi(\alpha) + (1-2\nu) \Delta(\alpha) \varepsilon_0^* f_1(\alpha). \quad (34)$$

Підставимо (34) в (27)

$$\int_0^\infty \left[-\frac{1-2\nu}{2G} \Delta(\alpha) \Psi(\alpha) + (1-2\nu) \varepsilon_0^* \Delta(\alpha) f_1(\alpha) \right] J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{m_1}{2} w(r), \quad a \leq r \leq b. \quad (35)$$

З врахуванням (35) та (33), співвідношення (1), після переходу до безрозмірних величин $\rho = \frac{r}{b}$, $\varepsilon = \frac{a}{b}$, $\alpha = \frac{\beta}{b}$, $S_1 = b^2 p^2$, $c_1 = \frac{c}{b}$, $k_2 \beta = \alpha h$, $k_2 = \frac{h}{b}$, набуває вигляду:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \frac{\Delta(\beta)}{\beta^2 - \frac{\gamma_n^2}{\varepsilon^2}} \left[\frac{2}{\pi} J_0(\varepsilon\beta) - J_0(\beta) R_n(\gamma_n) \right] \left\{ \begin{matrix} J_0(\rho\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho\beta) - J_0(\beta) \end{matrix} \right\} d\beta =$$

$$= -\frac{Gb}{1-\nu} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2R_1} [(x_1 - \varepsilon)^2 - (x_1 - \rho)^2], & \varepsilon \leq \rho < x_1; \\ \frac{1}{2R_1} (x_1 - a)^2, & x_1 \leq \rho \leq c_1; \\ \frac{1}{2R_2} (1 - x_2)^2, & c_1 < \rho \leq x_2; \\ \frac{1}{2R_2} [(1 - x_2)^2 - (x_2 - \rho)^2], & x_2 < \rho < 1. \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \frac{G\varepsilon_0^* m_2}{S_1} \int_0^{\infty} \Delta(\beta) \left(\nu - 2 - \frac{\nu \omega \beta^2}{4S_1} \right) \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4S_1}} \left\{ \begin{matrix} J_0(\rho\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho\beta) - J_0(\beta) \end{matrix} \right\} d\beta$$
(36)

і є основною рівністю для визначення невідомих коефіцієнтів a_n ($n = \overline{1, N}$).

Для побудови розв'язку задачі покладемо

$$a_n = -\frac{Gb}{(1-\nu)2R_1} y_n^{(1)} - \frac{Gb}{(1-\nu)2R_2} y_n^{(2)} + \frac{\varepsilon_0^* G}{(1-\nu)} y_n^{(3)} \quad (37)$$

та використаємо метод суперпозиції для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Будемо вимагати виконання рівності (36) в точках

$$\rho_1 = \varepsilon + \Delta\rho, \quad \rho_2 = \varepsilon + 2\Delta\rho, \quad \dots, \quad \rho_{n-1} = \varepsilon + (n-1)\Delta\rho, \quad \rho_N = 1, \quad \Delta\rho = \frac{1-\varepsilon}{N}.$$

Отже, системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $y_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) набудуть вигляду

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{jn}^* \cdot y_n^{(i)} = F_i^*(\rho_j), \quad (j = \overline{1, N}) \quad (i = 1, 2, 3),$$

де

$$\alpha_{jn}^* = \int_0^{\infty} \Delta(\beta) \frac{\varepsilon^2}{\beta^2 \varepsilon^2 - \gamma_n^2} \left[\frac{2}{\pi} J_0(\varepsilon\beta) - J_0(\beta) R_n(\gamma_n) \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} J_0(\rho_j\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho_j\beta) - J_0(\beta) \end{matrix} \right\} d\beta,$$

$$F_1^*(\rho_j) = \begin{cases} (x_1 - \varepsilon)^2 - (x_1 - \rho_j)^2, & \varepsilon \leq \rho_j < x_1, \\ (x_1 - \varepsilon)^2, & x_1 \leq \rho_j < c_1, \\ 0, & c_1 < \rho_j \leq 1; \end{cases} \quad F_2^*(\rho_j) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \rho_j < c_1, \\ (1 - x_2)^2, & c_1 < \rho_j \leq x_2, \\ (1 - x_2)^2 - (\rho_j - x_2)^2, & x_2 < \rho_j \leq 1; \end{cases}$$

$$F_3^*(\rho_j) = \frac{1}{S_1} \int_0^{\infty} \Delta(\beta) \left(\nu - 2 - \frac{\nu \omega \beta^2}{4S_1} \right) \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4S_1}} \left\{ \begin{matrix} J_0(\rho_j\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho_j\beta) - J_0(\beta) \end{matrix} \right\} d\beta.$$

Враховуючи (37), формулу для обчислення контактних напружень під штампом запишемо так:

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{G}{1-\nu} \cdot z_1 \sum_{n=1}^N y_n^{(1)} \chi(\rho, \gamma_n) - \frac{G}{1-\nu} \cdot z_2 \sum_{n=1}^N y_n^{(2)} \chi(\rho, \gamma_n) + \frac{G\varepsilon_0^*}{1-\nu} \sum_{n=1}^N y_n^{(3)} \chi(\rho, \gamma_n), \quad (38)$$

тут

$$z_1 = \frac{b}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{b}{2R_2}, \quad \chi(\rho, \gamma_n) = J_0\left(\frac{p}{\varepsilon} \gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{p}{\varepsilon} \gamma_n\right).$$

Вимагаючи виконання умови рівноваги штамп та умови рівності вертикальних переміщень точок області контакту при $r = r_1$ та $r = r_2$

$$2\pi \int_a^1 \rho \sigma_{zz}(\rho, 0) d\rho = -P, \quad W(r_1) = W(r_2)$$

одержимо систему двох рівнянь відносно z_1 та z_2 , розв'язавши яку одержимо:

$$z_1 = -\frac{P}{2\pi b} z_1^{(p)} + \frac{\varepsilon_0 G}{1-\nu} z_1^{(c)}, \quad z_2 = -\frac{P}{2\pi b^2} z_2^{(p)} + \frac{\varepsilon_0 G}{1-\nu} z_2^{(c)}. \quad (39)$$

Підставляючи (16) в (15), знайдемо $\sigma_{zz}(\rho, 0) = \sigma_{zz}^{(p)}(\rho) + \sigma_{zz}^{(*)}(\rho)$, де

$$\sigma_{zz}^{(p)}(\rho) = -\frac{P}{2\pi b^2} \left[z_1^{(p)} \sum_{n=1}^N y_n^{(1)} \chi(\rho, \gamma_n) + z_2^{(p)} \sum_{n=1}^N y_n^{(2)} \chi(\rho, \gamma_n) \right],$$

$$\sigma_{zz}^{(*)}(\rho) = -\varepsilon_0 \left[z_1^{(c)} \sum_{n=1}^N y_n^{(1)} \chi(\rho, \gamma_n) + z_2^{(c)} \sum_{n=1}^N y_n^{(2)} \chi(\rho, \gamma_n) - \sum_{n=1}^N y_n^{(3)} \chi(\rho, \gamma_n) \right].$$

Розглянуто приклад розв'язування систем N лінійних алгебраїчних рівнянь з N невідомими $x_n^{(i)}$. Числовий аналіз виконано для $N = 20$. На рисунках 2-3 подано результати розподілу безрозмірних складових σ_{zz}^P - крива 1 і σ_{zz}^* - криві 2 вздовж радіальної координати ρ .

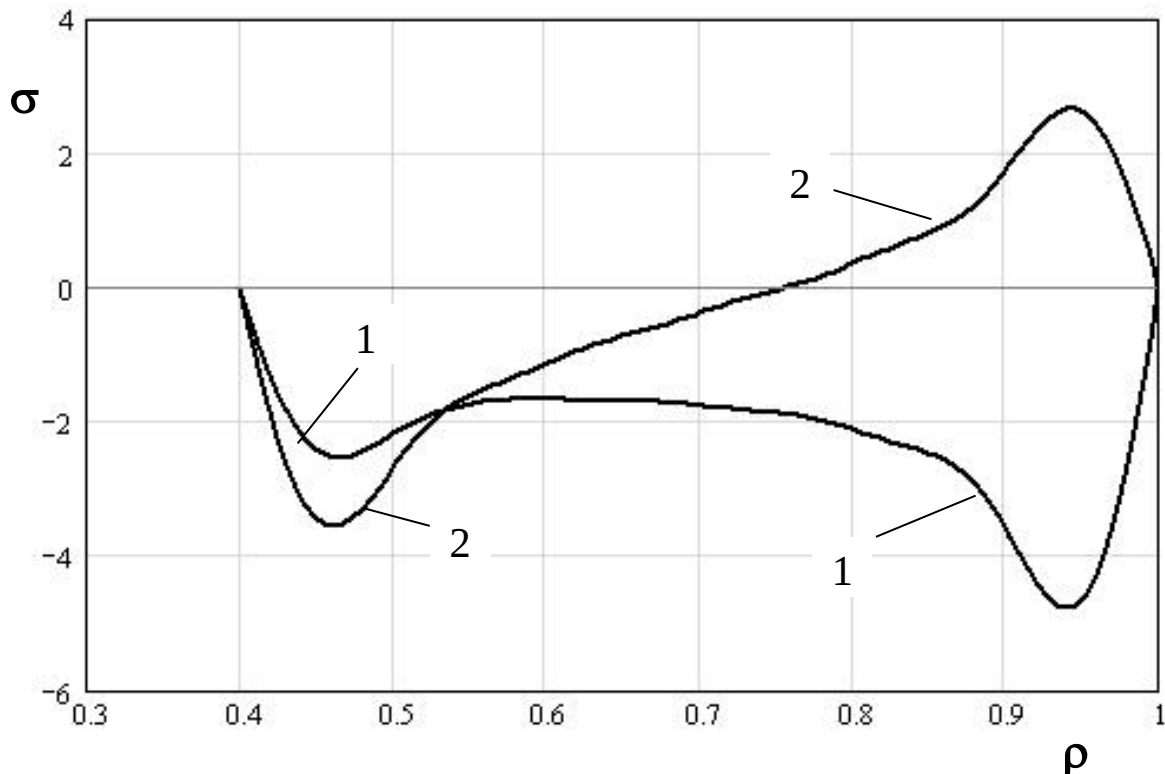


Рис. 2. Розподіл складових напружень під штампом для значень параметрів

$$x_1 = 0.5, \quad x_2 = 0.9, \quad \varepsilon = 0.4, \quad k_2 = 2, \quad \nu = 0.3, \quad \omega = \frac{2}{3}, \quad S_1 = 1.6.$$

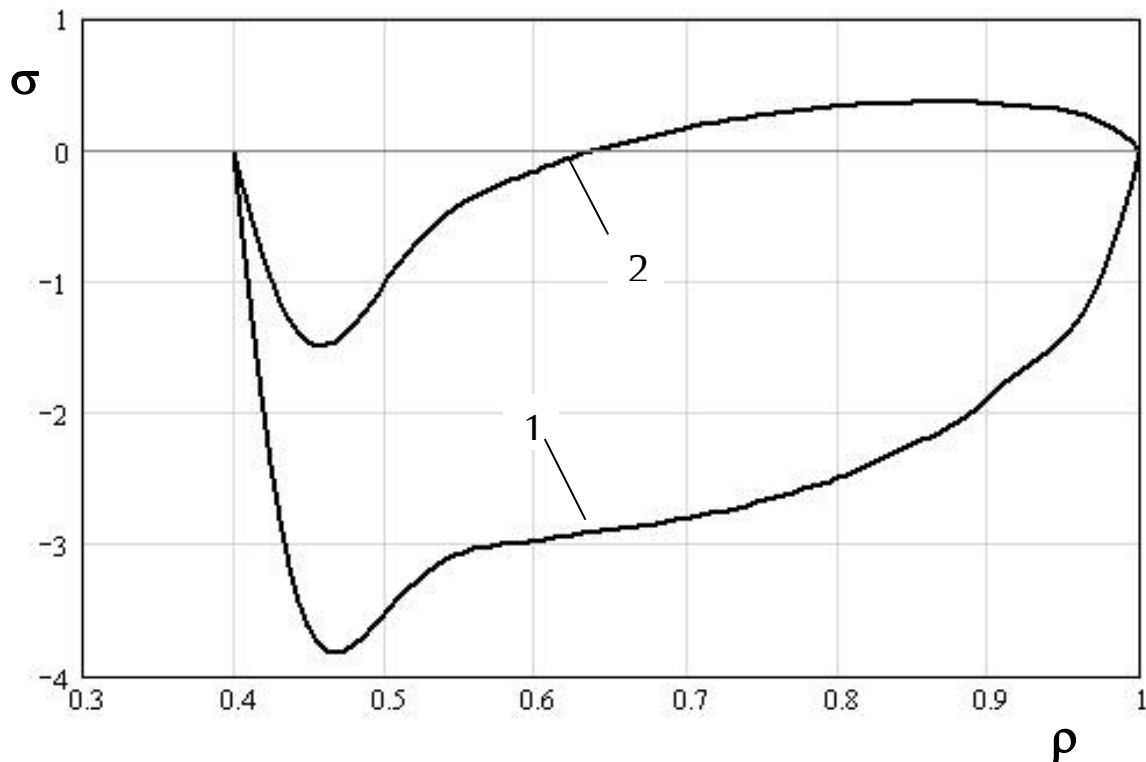


Рис. 3. Розподіл складових напружень під штапом для значень параметрів

$$x_1 = x_2 = 0.5, \varepsilon = 0.4, k_2 = 2, \nu = 0.3, \omega = \frac{2}{3}, S_1 = 0.4.$$

Висновки

З наведених результатів видно, що геометрія штапа та залишкові напруження в шарі суттєво впливають на контактні напруження під штапом. Складові контактних напружень σ_{zz}^* змінює знак і в першій зоні під штапом збільшує сумарні контактні напруження, а в другій – зменшує, що значно впливає на величину і характер розподілу контактних напружень.

Formulae for determination of the contact tensiles in the ball with the residual stresses, caused by the localized heating while welding, in which absolutely smooth annular punch is faced, were obtained. Numerical example is presented. It is shown that the punch geometry as well residual stresses influence sufficiently on the value and characteristic of the contact tensiles distribution.

Література

1. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.И. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135 с.
2. Гузь А.І., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища школа, 1995. – 305 с.
3. Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 296 с.
4. Цимбалюк Л. Тривимірний розподіл зварювальних залишкових напружень у пластині з круговим швом // Машинознавство. – 2001. - №2. – С.18-21.
5. Шелестовський Б. Контактна взаємодія кругового штапа з шаром із залишковими деформаціями, що зумовлені зосередженням нагрівом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. – Т.7, №4. – С. 13-20.
6. Шелестовський Б., Габрусев Г. Контактна взаємодія штапа з шаром із залишковими деформаціями, зумовленими кільцевим зварним швом // Машинознавство. – 2003. - №2. – С. 9-12.
7. Недосека А.Я. Основы расчета сварных конструкций. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1998. – 263 с.

Одержано 25.12.03 р.