

УДК.539.3

М.Сухорольський, докт.фіз.-мат.наук; Н.Тимошенко, канд.фіз.-мат. наук; С.Томецька, канд.фіз.-мат.наук; Л.Швець, канд.фіз.-мат.наук
Національний університет "Львівська політехніка"

КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ШАРУ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглядається задача про усталені коливання ізотропного шару під дією поверхневого навантаження, довільно розподіленого на ділянці чи зосередженого у точці. Побудова розв'язку задачі ґрунтується на поєднанні методу Фур'є і методу послідовнісного подання узагальнених функцій.

Розв'язки задач про локальне навантаження пружних тіл використовуються як безпосередньо в інженерних розрахунках, так і є основою формулювання числових методів розв'язування задач механіки суцільного середовища. Ефективними такі розв'язки можуть бути тільки у випадку їх подання в явному вигляді або з поданими в явному вигляді сингулярними їх частинами [1-3]. Побудова розв'язків задач такого типу ґрунтується на використанні інтегральних перетворень, методу Фур'є, методів теорії функцій комплексної змінної та асимптотичних методів. У даній роботі розглядається задача про усталені коливання ізотропного шару під дією поверхневого навантаження, довільно розподіленого на ділянці чи зосередженого у точці. Побудова розв'язку задачі ґрунтується на поєднанні методу Фур'є і методу послідовнісного подання узагальнених функцій. Узагальнений розв'язок задачі (про дію на шар сили, зосередженої у точці) подається у вигляді границь послідовностей узагальнених часткових сум рядів Фур'є за системами тригонометричних функцій.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ізотропного шару постійної товщини $2h$ під дією поверхневого динамічного навантаження в обмеженій області D лицьової поверхні S^+ . На іншій лицьовій поверхні S^- шар взаємодіє з абсолютно жорсткою основою при умовах ідеального контакту.

Для випадку усталених коливань з частотою ω напружено-деформований стан шару описується рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_3} + \rho \omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ii} &= 2G \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \right), \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = G \left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - прямокутні координати (координатна площина $\alpha_3 = 0$ є серединною площиною S , площини $\alpha_3 = \pm h$ є відповідно лицьовими площинами $S^\pm$); u_i - амплітуди коливань переміщень; σ_{ij} - амплітуди коливань компонент тензора напружень; λ, G - пружні сталі; ρ - густина матеріалу.

На лицьовій поверхні S^- задаються амплітуди переміщень

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, -h) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

На лицьовій поверхні S^+ задаються амплітуди компонент вектора поверхневого навантаження

$$\sigma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \begin{cases} \sigma_i^+(\alpha_1, \alpha_2), & (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin D, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

де $\sigma_i^+(\alpha_1, \alpha_2)$ - задані функції.

2. Побудова узагальнених сингулярних розв'язків. Спочатку шукаємо розв'язки трьох задач про дію на шар поверхневих напружень (з ненульовою однією з компонент), локалізованих у квадраті $\Pi_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : |\alpha_i - \alpha_i^0| < \varepsilon; \alpha_3 = h\}$ ($i=1,2$) з центром в точці $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h)$ і сторонами довжини 2ε . Амплітуди поверхневих напружень задаємо у вигляді [4]

$$\sigma_{31}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \sigma_{31}^i, \quad \sigma_{32}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \sigma_{32}^i, \quad \sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \sigma_{33}^i \quad (i=1,2,3), \quad (4)$$

де

$$\sigma_{3j}^i = P^i \delta_{ij} \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon) \delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon) \quad (i, j=1,2,3); \quad (5)$$

$$\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\alpha_i - \alpha_i^0|}{\varepsilon}\right), & |\alpha_i - \alpha_i^0| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\alpha_i - \alpha_i^0| > \varepsilon; \end{cases} \quad (6)$$

дельтоподібна функція з граничною δ -функцією (у розумінні слабкої збіжності) [5]; $g(t) = 1 + \cos \pi t$ ($0 \leq t \leq 1$); P_i - рівнодійні навантаження за координатними напрямками; $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$.

Розв'язок задачі (1) за умов (2), (4) шукаємо у вигляді сум подвійних рядів Фур'є за системами тригонометричних функцій у паралелепіпеді $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : 0 < \alpha_i < l_i; |\alpha_3| < h\}$ ($i=1,2$), продовживши невідомі функції за бокові грані ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_1 = l_1$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_2 = l_2$) як періодичні функції. При цьому вважаємо, що центри прямокутника Π^0 і верхньої основи паралелепіпеда Π збігаються ($\alpha_1^0 = l_1/2$, $\alpha_2^0 = l_2/2$).

Для періодичної дельтоподібної функції (6), продовженої відповідно на інтервал $(-l, 0)$ як парної і непарної функції, маємо ряди, які рівномірно збігаються при $\varepsilon \neq 0$,

$$\delta(\alpha, \alpha^0, \varepsilon) = \frac{2}{l} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \cos \lambda_k \alpha^0 \cos \lambda_k \alpha \right),$$

$$\delta(\alpha, \alpha^0, \varepsilon) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \sin \lambda_k \alpha^0 \sin \lambda_k \alpha,$$

$$\text{де } \varphi(\lambda_k \varepsilon) = \int_0^1 g(t) \cos(\lambda_k \varepsilon t) dt = \frac{\sin(\lambda_k \varepsilon)}{\lambda_k \varepsilon} \frac{1}{1 - (\lambda_k \varepsilon / \pi)^2}.$$

Врахувавши ці подання, одержимо з (5) такі формули для амплітуд компонент локального поверхневого навантаження (4):

$$\sigma_{3j}^i = P^i \delta_{ij} \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^i(\alpha) \quad (i, j=1,2,3), \quad (7)$$

де

$$\Phi_{km}^1(\alpha) = \cos \lambda_{k1} \alpha_1 \sin \lambda_{m2} \alpha_2; \quad \Phi_{km}^2(\alpha) = \sin \lambda_{k1} \alpha_1 \cos \lambda_{m2} \alpha_2;$$

$$\Phi_{km}^3(\alpha) = \sin \lambda_{k1} \alpha_1 \sin \lambda_{m2} \alpha_2; \quad \Phi_{km}^4(\alpha) = \cos \lambda_{k1} \alpha_1 \cos \lambda_{m2} \alpha_2; \quad \lambda_{k1} = \frac{k\pi}{l_1}; \quad \lambda_{m2} = \frac{m\pi}{l_2}.$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{2}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{k1} \varepsilon), \text{ якщо } m=0, k=\overline{1, \infty}, \quad c_{km}(\varepsilon) = \frac{2}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{m2} \varepsilon), \text{ якщо } k=0, m=\overline{1, \infty},$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{k1} \varepsilon) \varphi(\lambda_{m2} \varepsilon), \text{ якщо } m=\overline{1, \infty}, k=\overline{1, \infty}.$$

Невідомі функції системи рівнянь (1) для кожної з трьох задач шукаємо у вигляді сум рядів

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u_1^i \\ \sigma_{31}^i \end{Bmatrix} &= \frac{P^i}{2G} \sum_{k=0, m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{1km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{31km}^i(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^1(\alpha), \\
\begin{Bmatrix} u_2^i \\ \sigma_{32}^i \end{Bmatrix} &= \frac{P^i}{2G} \sum_{k=0, m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{2km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{32km}^i(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^2(\alpha), \\
\begin{Bmatrix} u_3^i \\ \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \sigma_{33}^i \end{Bmatrix} &= \frac{P^i}{2G} \sum_{k=1, m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{3km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{11km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{22km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{33km}^i(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^3(\alpha), \\
\sigma_{12}^i &= \frac{P^i}{2G} \sum_{k=0, m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) \sigma_{12km}^i(\alpha_3) \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^4(\alpha).
\end{aligned} \tag{8}$$

Підставивши ряди (8) у рівняння системи (1), прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів цих рядів, звідки знайдемо

$$\begin{aligned}
u_{1km}^i(\alpha_3) &= \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{k1}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ c_{3km}^i ch(\omega_{2km} \alpha_3) + c_{4km}^i sh(\omega_{2km} \alpha_3), \\
u_{2km}^i(\alpha_3) &= \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{2m}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ c_{5km}^i ch(\omega_{2km} \alpha_3) + c_{6km}^i sh(\omega_{2km} \alpha_3), \\
u_{3km}^i(\alpha_3) &= \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\omega_{1km}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ \frac{1}{\omega_{2km}} (c_{3km}^i \lambda_{k1} + c_{5km}^i \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} \alpha_3) + \frac{1}{\omega_{2km}} (c_{4km}^i \lambda_{k1} + c_{6km}^i \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} \alpha_3), \\
-\frac{\sigma_{11km}^i(\alpha_3)}{2G} &= \left(\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{k1}^2}{\omega_0^2} \right) (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ c_{3km}^i \lambda_{k1} ch(\omega_{2km} \alpha_3) + c_{4km}^i \lambda_{k1} sh(\omega_{2km} \alpha_3), \\
-\frac{\sigma_{22km}^i(\alpha_3)}{2G} &= \left(\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{m2}^2}{\omega_0^2} \right) (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ c_{5km}^i \lambda_{m2} ch(\omega_{2km} \alpha_3) + c_{6km}^i \lambda_{m2} sh(\omega_{2km} \alpha_3), \\
\frac{\sigma_{33km}^i(\alpha_3)}{2G} &= \left(-\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\omega_{1km}^2}{\omega_0^2} \right) (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) + \\
&+ (c_{3km}^i \lambda_{k1} + c_{5km}^i \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} \alpha_3) + (c_{4km}^i \lambda_{k1} + c_{6km}^i \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} \alpha_3), \\
\frac{\sigma_{12km}^i(\alpha_3)}{2G} &= \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{k1} \lambda_{m2}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3)) +
\end{aligned} \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{2} (c_{3km}^i \lambda_{m2} + c_{5km}^i \lambda_{k1}) ch(\omega_{2km} \alpha_3) + \frac{1}{2} (c_{4km}^i \lambda_{m2} + c_{6km}^i \lambda_{k1}) sh(\omega_{2km} \alpha_3),$$

$$\frac{\sigma_{13km}^i(\alpha_3)}{2G} = \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{1k} \omega_{1km}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3)) +$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} (c_{3km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{k1}^2) + c_{5km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} \alpha_3) +$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} (c_{4km}^i (\omega_{1km}^2 + \lambda_{k1}^2) + c_{6km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} \alpha_3)$$

$$\frac{\sigma_{23km}^i(\alpha_3)}{2G} = \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{m2} \omega_{1km}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i sh(\omega_{1km} \alpha_3) + c_{2km}^i ch(\omega_{1km} \alpha_3)) +$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} [c_{5km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{m2}^2) + c_{3km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}] sh(\omega_{2km} \alpha_3) +$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} [c_{6km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{m2}^2) + c_{4km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}] ch(\omega_{2km} \alpha_3),$$

де $\omega_{1km}^2 = \lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \frac{G}{2G + \lambda} \omega_0^2$; $\omega_{2km}^2 = \lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \omega_0^2$; $\omega_0^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}$; c_{ikm} ($i = \overline{1,6}$) - сталі інтегрування.

Підставивши відповідні формули (8) в умови (2) і (4) з урахуванням формул (9), одержимо три ($i = 1, 2, 3$) послідовності систем шести лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих c_{jkm}^i ($j = \overline{1,6}$)

$$\frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{k1}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} h) - c_{2km}^i sh(\omega_{1km} h)) + c_{3km}^i ch(\omega_{2km} h) - c_{4km}^i sh(\omega_{2km} h) = 0,$$

$$\frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{m2}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} h) - c_{2km}^i sh(\omega_{1km} h)) + c_{5km}^i ch(\omega_{2km} h) - c_{6km}^i sh(\omega_{2km} h) = 0,$$

$$\frac{2G + \lambda}{G} \frac{\omega_{1km}}{\omega_0^2} (-c_{1km}^i sh(\omega_{1km} h) + c_{2km}^i ch(\omega_{1km} h)) -$$

$$- \frac{1}{\omega_{2km}} (c_{3km}^i \lambda_{k1} + c_{5km}^i \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} h) + \frac{1}{\omega_{2km}} (c_{4km}^i \lambda_{k1} + c_{6km}^i \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} h) = 0,$$

$$\frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{1k} \omega_{1km}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i sh(\omega_{1km} h) + c_{2km}^i ch(\omega_{1km} h)) + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} (c_{3km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{k1}^2) + c_{5km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} h) +$$

$$+ \frac{1}{2\omega_{2km}} (c_{4km}^i (\omega_{1km}^2 + \lambda_{k1}^2) + c_{6km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} h) = \delta_{1i},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\lambda_{m2} \omega_{1km}}{\omega_0^2} (c_{1km}^i sh(\omega_{1km} h) + c_{2km}^i ch \lambda_{km} h) + \\
& + \frac{1}{2\omega_{2km}} [c_{5km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{m2}^2) + c_{3km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}] sh(\omega_{2km} h) + \\
& + \frac{1}{2\omega_{2km}} [c_{6km}^i (\omega_{2km}^2 + \lambda_{m2}^2) + c_{4km}^i \lambda_{k1} \lambda_{m2}] ch(\omega_{2km} h) = \delta_{2i}, \\
& \left(-\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G + \lambda}{G} \frac{\omega_{1km}^2}{\omega_0^2} \right) (c_{1km}^i ch(\omega_{1km} h) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km} h)) + \\
& + (c_{3km}^i \lambda_{k1} + c_{5km}^i \lambda_{m2}) ch(\omega_{2km} h) + (c_{4km}^i \lambda_{k1} + c_{6km}^i \lambda_{m2}) sh(\omega_{2km} h) = \delta_{3i}.
\end{aligned}$$

Розв'язки систем рівнянь (10) існують за умови нерівності нулю визначника системи (нерівності значень частоти вимушуючої сили і власних частот коливань шару). З рівностей нулю визначників систем одержуємо рівняння для визначення власних частот коливань шару.

Підставивши числові значення сталих інтегрування у формули (9), а потім, - у формули (8), одержимо відповідні розв'язки задачі. Ряди (8) при $\varepsilon > 0$ рівномірно збігаються внаслідок порядку росту гіперболічних функцій і рівномірної збіжності рядів (7).

Границя при $\varepsilon \rightarrow 0$ сумм рядів (8) називається узагальненим в розумінні слабкої збіжності [5] розв'язком задачі про навантаження шару зусиллями, зосередженими у точці $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h)$. Наприклад, для компонент переміщень маємо такі зображення:

$$U_j^i = \frac{P^i}{2G} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3) \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^j(\alpha) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

які ще можна записати у вигляді границь узагальнених часткових сум рядів

$$U_j^i = \frac{P^i}{2G} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k,m=0}^n c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3) \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^j(\alpha) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (11)$$

де $\varepsilon = \varepsilon(n) = \varepsilon_0 / n^\gamma$, $\varepsilon_0 = const$, $0 < \gamma < 1$.

Зауважимо, що послідовності (11) збігаються рівномірно в будь-якій області, що лежить у паралелепіпеді Π і не містить точки $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h)$.

3. Побудова розв'язку задачі. Розв'язок задачі (1) – (3) запишемо у вигляді інтегральних згорток сингулярних розв'язків (11) з функціями (3). Для переміщень довільної точки шару маємо такі вирази:

$$\begin{aligned}
u_j(\alpha, \alpha_3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \sum_{i=1}^3 \sum_{k,m=0}^n c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3) \Phi_{km}^i(\alpha^0) \Phi_{km}^j(\alpha) \sigma_i^+(\alpha^0) ds(\alpha^0) \\
(j = 1, 2, 3),
\end{aligned} \quad (12)$$

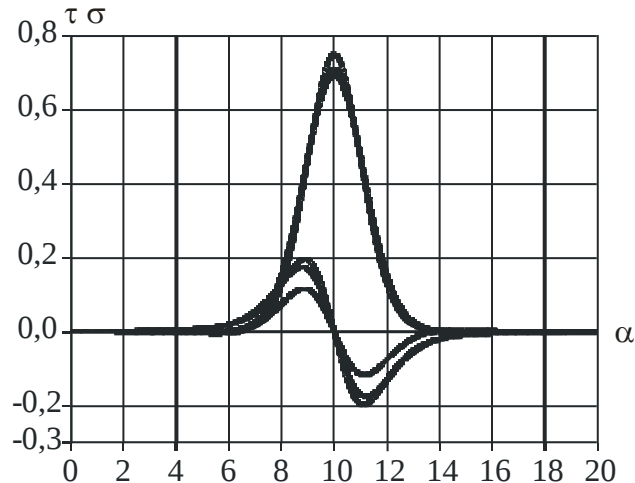
де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $ds(\alpha^0)$ - елемент площі поверхні D . При цьому послідовності відповідних часткових сум рядів збігаються рівномірно для неперервних функцій і слабо збігаються для узагальнених функцій $\sigma_i^+(\alpha^0)$.

Вирази для напружень одержимо підстановкою формул (12) у відповідні співвідношення (1).

4. Числовий приклад. Висновки. Досліджено розв'язок плоскої задачі про дію на ізотропний шар ($\nu = 0,3$) нормального поверхневого навантаження $\sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_3)|_{\alpha_3=h} = \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)$, $\sigma_{31}(\alpha_1, \alpha_3)|_{\alpha_3=h} = 0$, локалізованого в області $|\alpha_1 - \alpha_1^0| \leq \varepsilon$,

ширина якої співмірна з товщиною шару.

На рисунку наведено розподіл контактних нормальних та дотичних напружень $\sigma = \sigma_{33}(\alpha_1, -h)/(2G)$ (симетричні криві), $\tau = \sigma_{31}(\alpha_1, -h)/(2G)$ (несиметричні криві) в залежності від координати $\alpha = \alpha_1/h$. Графіки побудовано для значення параметра $l_1/h = 20$ і різних значень параметра $\varepsilon/h = 0,1; 1; 1,5$.



Якщо ширина області локалізації менша від товщини шару ($2\varepsilon < 2h$), то закон розподілу навантаження в цій області практично не впливає на розподіл напружень на поверхні контакту шару з абсолютно жорсткою основою (на площадках, що знаходяться на відстані, більшій ніж $2h$ від області локалізації зовнішнього навантаження). Розглянутий приклад ілюструє принцип Сен-Венана для локально навантаженого шару.

The problem of stable oscillations of the isotropic layer under the surface loading, which is arbitrarily distributed on the plot or concentrated in the point, is considered. The constructing of the problem solution is based on the combination of the Fourier method and the method of the sequential presentation of the generalized functions.

Література

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука. 1980. – 304 с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности (в 6 томах). Том 3. Равновесие упругих тел канонической формы / Под общ. ред. акад. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
4. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Сухорольський М.А. та інші. – Львів: Національний ун-т „Львівська політехніка”, 2002. – 226 с.
5. Сухорольський М. А. Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення // Укр. мат. журн. – 1997. - № 5. – С. 706 – 714.

Одержано 05.04.04 р.