

УДК 539.3

А.Сяський, докт.техн.наук; Ю.Батишкіна

Рівненський державний гуманітарний університет

ЧАСТКОВЕ СИМЕТРИЧНЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНЦІ

Розглянуто особливості напруженого стану на контурі криволінійного отвору, який частково підсилений двома симетричними пружними стрижнями змінного поперечного перерізу, в нескінченній ізотропній пластинці. Використовуючи подання компонент деформації контура отвору пластинки у вигляді інтегральних співвідношень, задача зведена до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно контактних зусиль. Для її наближеного розв'язку використано метод граничної колокації. Досліджується вплив на напружений стан пластинки геометрії і фізичних параметрів підсилювальних стрижнів та форми отвору.

Умовні позначення

$T_p, S_{p\lambda}, T_\lambda$	- зусилля (нормальні, дотичні та кільцеві) на контурі отвору;
V_λ	- поздовжня сила в підсилювальному стрижні;
ϵ_λ	- відносна осьова пружна деформація контура отвору;
V	- кут пружного повороту нормалі до контура отвору;
E, ν	- модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;
$E_0 F(s)$	- змінна жорсткість стрижня на розтяг або стиск;
s	- дуга на контурі отвору;
$\tilde{\rho}$	- радіус кривини контура отвору.

В судно-авіабудуванні, машинобудуванні та інших галузях інженерної практики широке застосування знаходять пластинчасті деталі, які послаблені отворами. З метою зменшення концентрації напружень в пластинках, а також збільшення їх жорсткості, отвори підсилюють тонкими пружними елементами.

Певна завершеність при вивченні цієї проблеми досягнута при підсиленні отворів в пластинках замкненими пружними елементами, рівновага яких описується теорією малих деформацій тонких криволінійних стрижнів [1, 2]. Контактна взаємодія пластин з отворами, які підсилені симетричними відносно осі розіmkненими пружними ребрами, досліджується в [3, 4]. Задача часткового підсилення криволінійного отвору в пластинці одним пружним стрижнем загального положення розглянута в [5]. Значний інтерес становлять задачі часткового підсилення отворів в пластинках системою пружних стрижнів змінної жорсткості, що дає змогу оптимізувати напружений стан в пластинці і зменшити її металомісткість.

В даній роботі пропонується розв'язок задачі про часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці двома пружними стрижнями змінної жорсткості.

1. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, обмеженим гладким контуром L у вигляді правильного N -кутника із заокругленими кутами (гіпотрохоїди). Пластинку віднесемо до полярної системи координат (r, δ) з полюсом в центрі отвору. Із серединною площиною пластинки

сумістимо комплексну площину $z = x + iy$. Декартову систему координат Ox виберемо так, як показано на рис. 1.

Нехай контур L на двох симетричних відносно осі Ox проміжках $L_1 = [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ та $L_2 = [-\beta_0^*; -\alpha_0^*]$ підсилений однаковими тонкими пружними стрижнями змінного поперечного перерізу, де α_0^*, β_0^* – полярні кути торців підсилення.

Стрижні будемо моделювати тонкими пружними лініями, наділеними змінною жорсткістю на розтяг або стиск в своїй площині. Жорсткістю стрижнів на згин нехтуємо.

На “нескінченності” до пластинки прикладені рівномірно розподілені зусилля розтягу або стиску p і q , що діють в напрямках координатних осей (рис. 1). Зовнішнє навантаження на підсилювальні стрижні відсутнє.

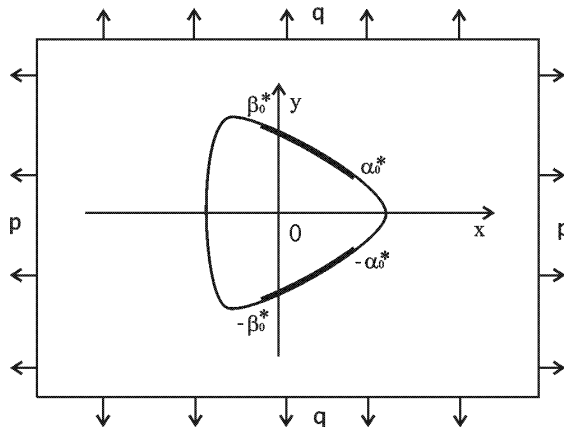


Рис. 1. Розрахункова схема задачі у випадку осової симетрії

Розв’язування задачі полягає у визначенні контактних T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ зусиль в зоні підсилення, кільцевих зусиль T_λ на контурі отвору та поздовжніх зусиль V_λ у підсилювальних стрижнях.

Нехай функція

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z = x + iy$.

Тут R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, вважаємо $R_0 = 1$); ε – параметр, який визначає відхилення форми многокутника від кола; $N = 2, 3$; $i = \sqrt{-1}$.

Деформації контура отвору пластинки при заданому навантаженні визначаються співвідношеннями [4, 6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_1 \right]; \\ V^*(\lambda) &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} S_{\rho\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} T_\rho^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_2 \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{де } \varepsilon_\lambda^* + iV^* = (\varepsilon_\lambda + iV) \omega'(\sigma); \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda};$$

$\gamma_1 = [-\beta_0^*; -\alpha_0^*] \cup [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ – образ зони підсилення $L_2 \cup L_1$ при відображенні (1);

$$P_1 = (p+q)(1+(N-1)\varepsilon \cos N\lambda) - 2(p-q) \cos 2\lambda; \quad (3)$$

$$P_2 = -(p+q)(N-1)\varepsilon \sin N\lambda + 2(p-q) \sin 2\lambda.$$

Враховуючи симетричність підсилення відносно осі Ox , $T_\rho^*(\lambda) = T_\rho^*(-\lambda)$; $S_{\rho\lambda}^*(-\lambda) = -S_{\rho\lambda}^*(\lambda)$, перейдемо в (2) до проміжку інтегрування $[\alpha_0^*; \beta_0^*]$ за формулами

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} T_\rho^*(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0^*}^{\beta_0^*} T_\rho^*(t) dt; \quad \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} T_\rho^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0^*}^{\beta_0^*} T_\rho^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} S_{\rho\lambda}^*(t) dt = 0; \quad \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} S_{\rho\lambda}^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \left(ctg \frac{\lambda-t}{2} - ctg \frac{\lambda+t}{2} \right) dt.$$

Граничні умови задачі на ділянці $[\alpha_0; \beta_0]$ запишемо у вигляді [5]

$$T_\rho = \frac{1}{\tilde{\rho}} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} T_\rho), \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \quad (5)$$

де $\frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{\Omega}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \Omega = (\alpha^2 + \beta^2)(1-N) + \alpha N; \quad \omega'(\sigma) = \alpha + i\beta;$

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\alpha \varepsilon_\lambda^* + \beta V^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad V = \frac{\alpha V^* - \beta \varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Підстановка (2), (3), (4) в (5) приводить до системи двох інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль в зоні підкріплення

$$T_\rho(\lambda) - \frac{\Omega}{|\omega'(\sigma)|^5} \frac{E_0 F(s)}{2Eh} \left[(1-\nu) T_\rho(\lambda) |\omega'(\sigma)|^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_4(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_3(\lambda, t) T_\rho(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) T_\rho(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \alpha(\lambda) P_1 + \beta(\lambda) P_2 \right] = 0; \quad (6)$$

$$S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{\Omega(\lambda)} + \frac{T_\rho(\lambda) ((\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)) (1-2N) + 3\alpha(\lambda)N) \beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)} = 0,$$

$$\lambda \in [\alpha_0; \beta_0].$$

Тут $K_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \alpha(t) + \beta(\lambda) \beta(t); K_2(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \beta(t) - \beta(\lambda) \alpha(t);$

$$K_3(\lambda, t) = -2\alpha(\lambda) \alpha(t) - (\alpha(\lambda) \beta(t) + \beta(\lambda) \alpha(t)) ctg \frac{\lambda+t}{2}; \quad (7)$$

$$K_4(\lambda, t) = 2\alpha(\lambda) \beta(t) - (\alpha(\lambda) \alpha(t) - \beta(\lambda) \beta(t)) ctg \frac{\lambda+t}{2}.$$

Крім системи (6), повинна виконуватися умова рівноваги стрижня [5]

$$\int_{\alpha_0^*}^{\beta_0^*} (T_\rho + i S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0, \quad (8)$$

де θ - кут між нормаллю до контура L та полярною віссю. Після її інтегрування по s знаходимо з врахуванням другої граничної умови (5)

$$T_\rho(\beta_0^*) = T_\rho(\alpha_0^*) = 0. \quad (9)$$

Кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки визначаємо за формулою [4, 5]

$$T_\lambda(\lambda) = T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_3(\lambda, t) T_\rho(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_4(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_1(\lambda, t) T_\rho(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \alpha(\lambda) P_1 + \beta(\lambda) P_2 \right]. \quad (10)$$

Поздовжня сила V_λ в перерізах стрижня визначається із співвідношення [1, 4]

$$V_\lambda = \frac{E_0 F(s)}{2Eh} (T_\lambda - \nu T_\rho). \quad (11)$$

Точне розв'язання системи (6), (7) пов'язане із значними математичними труднощами. Наближений розв'язок задачі знайдемо методом граничної колокації Мультіпа-Каландія [3, 4, 7].

З цією метою перейдемо від проміжку інтегрування $[\alpha_0; \beta_0]$ до стандартного проміжку $[-1; 1]$ за допомогою заміни змінних:

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 S + b_0); \quad t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 x + b_0), \quad (12)$$

$$\text{де} \quad a_0 = \frac{tg \frac{\beta_0}{2} - tg \frac{\alpha_0}{2}}{2}; \quad b_0 = \frac{tg \frac{\beta_0}{2} + tg \frac{\alpha_0}{2}}{2}.$$

На підставі (9) функція $T_p(\lambda)$ обмежена на кінцях зони підсилення, а $S_{p\lambda}(\lambda)$ має кореневу особливість, тому наближений розв'язок системи (6) має вигляд

$$T_p = \sqrt{1-x^2} \Phi_1(x); \quad S_{p\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Phi_2(x), \quad (13)$$

де $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ - обмежені і неперервні на $[-1; 1]$ функції. Ввівши нові змінні $x = \cos \varphi$; $S = \cos \tau$ шукані контактні зусилля (13) подамо співвідношеннями [7]

$$[T_p(\lambda), S_{p\lambda}(\lambda)] = \sum_{n=1}^{N_0} \left[A_n \sin \varphi_n, \frac{B_n}{\sin \varphi_n} \right] \Phi(\varphi, \varphi_n). \quad (14)$$

$$\text{Тут } \Phi(\varphi, \varphi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos N_0 \varphi \sin \varphi_n}{N_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_n)}; \quad \lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \varphi + b_0); \quad t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \tau + b_0);$$

N_0 - число точок колокації; $\varphi_m = \frac{2m-1}{2N_0} \pi$, $(m = \overline{1, N_0})$ - вузли Чебишева для інтерполяційного многочлена Лагранжа; $\tau_n = \varphi_n$.

Квадратурні формули для сингулярних інтегралів, які входять в (6), в точках колокації при $\varphi = \varphi_k$ запишемо у вигляді [4-6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_p(t) K_2(\lambda_k, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} A_n \sin \varphi_n K_2(\lambda_k, t_n) \left(q_n (a_0 \cos \varphi_n + b_0) - \right. \\ \left. - (\operatorname{ctg} \psi \sin \varphi_k - \cos \varphi_n - \cos \varphi_k) \frac{1}{\sin \varphi_n} \right); \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{p\lambda}(t) K_1(\lambda_k, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{B_n}{\sin \varphi_n} K_1(\lambda_k, t_n) (q_n (a_0 \cos \varphi_n + b_0) - \operatorname{ctg} \psi \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k}).$$

Регулярні інтеграли на підставі [4-6] обчислюємо за формулами

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_p(t) K_4(\lambda_k, t) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} A_n \sin \varphi_n K_4(\lambda_k, t_n) q_n; \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{p\lambda}(t) K_3(\lambda_k, t) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{B_n}{\sin \varphi_n} K_3(\lambda_k, t_n) q_n,$$

$$\text{де } q_n = \frac{a_0 \sin \varphi_n}{1 + (a_0 \cos \varphi_n + b_0)}, \quad \psi = \frac{\varphi_k + (-1)^{n+k} \varphi_n}{2}.$$

Вирази для $T_p(\lambda)$, $S_{p\lambda}(\lambda)$, $\frac{d}{d\lambda}(T_p(\lambda))$ в точках колокації мають вигляд [6]

$$T_p(\lambda_k) = A_k \sin \varphi_k; S_{p\lambda}(\lambda_k) = \frac{B_k}{\sin \varphi_k};$$

$$\frac{d}{d\lambda}(T_p(\lambda))_{\lambda=k} = -\frac{q_k}{2} \sum_{n=1}^{N_0} A_n a_{kn},$$

$$a_{kn} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_n}, & k = n; \\ \frac{(-1)^{n+k} \sin \varphi_k}{\cos \varphi_n - \cos \varphi_k}, & k \neq n. \end{cases} \quad (17)$$

Підставляючи формули (15) – (17) в систему (6) і надаючи φ, λ послідовно значення φ_k, λ_k ($k = \overline{1, N_0}$) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_k \sin \varphi_k, \frac{B_k}{\sin \varphi_k}$. Якщо ці сталі стануть відомі, то компоненти напруженого стану на лінії розмежування матеріалу пластинки і підсилювальних стрижнів визначимо за формулами (10, 11, 17).

Розглянемо можливі часткові випадки задачі (6)-(7).

Нехай підсилювальні стрижні і пластинка виготовлені з одного матеріалу і мають однакову товщину ($\frac{E_0}{E} = \frac{h_0}{h} = 1$). У цьому випадку приходимо до задачі визначення напруженого стану в пластинці з вільним криволінійним отвором, що має кутові точки, а на ділянках $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ і $[-\beta_0^*; 2\pi - \beta_0^*]$ – виточки глибиною b_0 .

При $\alpha_0^* \rightarrow 0$ або $\beta_0^* \rightarrow \pi$ система (6), (7) визначає розв'язок задачі для пластинки, на криволінійному отворі якої є виточка і фізичний розріз глибиною b_0 .

У випадку $\alpha_0^* \rightarrow 0$ і $\beta_0^* \rightarrow \pi$ на контурі отвору є два симетричні фізичні розрізи.

Для нескінченної ізотропної пластинки з еліптичним отвором ($N = 2, \varepsilon = 0,2$) досліджено вплив на її напружений стан жорсткості підсилювальних стрижнів сталого прямокутного поперечного перерізу. На рис. 2, 3 наведені результати розрахунку напруженого стану пластинки і стрижня при $\alpha_0 = 45^\circ; \beta_0 = 135^\circ; p = 0; q = 1; \nu = 0,3; h_0/h = 1; b_0/\rho = 0,05$.

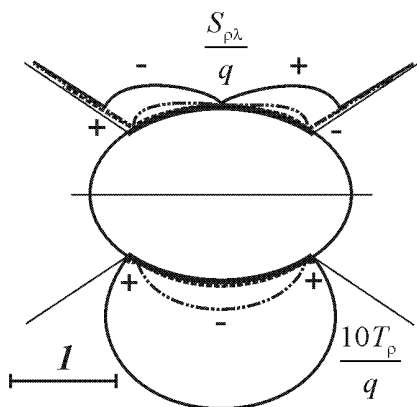


Рис. 2. Графіки розподілу нормальних і дотичних зусиль в зоні підсилення

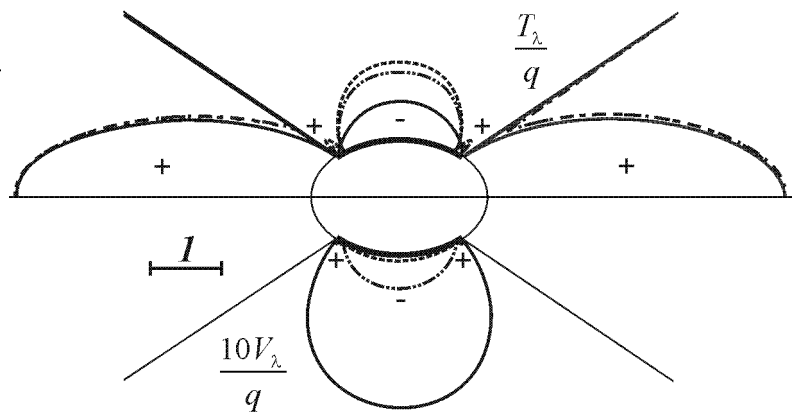


Рис. 3. Графіки розподілу кільцевих зусиль по контуру отвору та поздовжніх сил в зоні підсилення

Штрихові лінії відповідають $E_0/E = 0,1$, штрихпунктирні – $E_0/E = 1$, суцільні – $E_0/E = 10$.

В наведеному прикладі при збільшенні жорсткості підсилення збільшуються контактні зусилля, залишаючись значно меншими від кільцевих. Так як підсилювальні елементи розміщені перпендикулярно до лінії дії зовнішніх зусиль, то їх вплив на кільцеві зусилля проявляється лише в безпосередній близькості від торців.

На рис. 4, 5 подано результати розрахунку напруженого стану на контурі трикутного ($N=3$, $\varepsilon=0,2$) отвору в пластинці при $\alpha_0=80^\circ$; $\beta_0=120^\circ$; $p=1$; $q=0$; $\nu=0,3$; $h_0/h=1$; $b_0/\rho=0,05$. Штрихові лінії відповідають $E_0/E=0,1$, штрихпунктирні – $E_0/E=1$, суцільні – $E_0/E=10$.

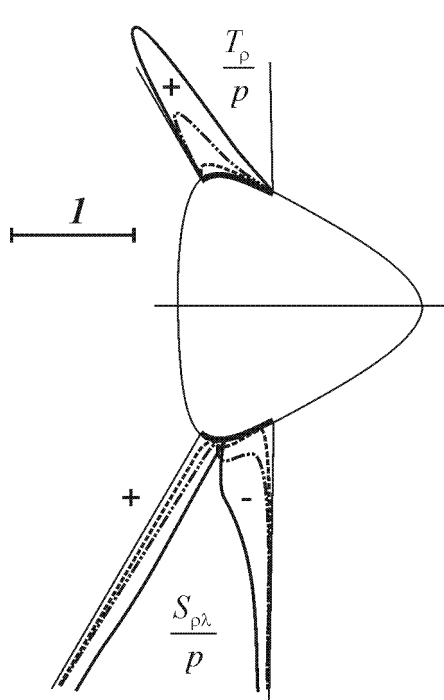


Рис. 4. Графіки розподілу нормальних і дотичних зусиль в зоні підсилення

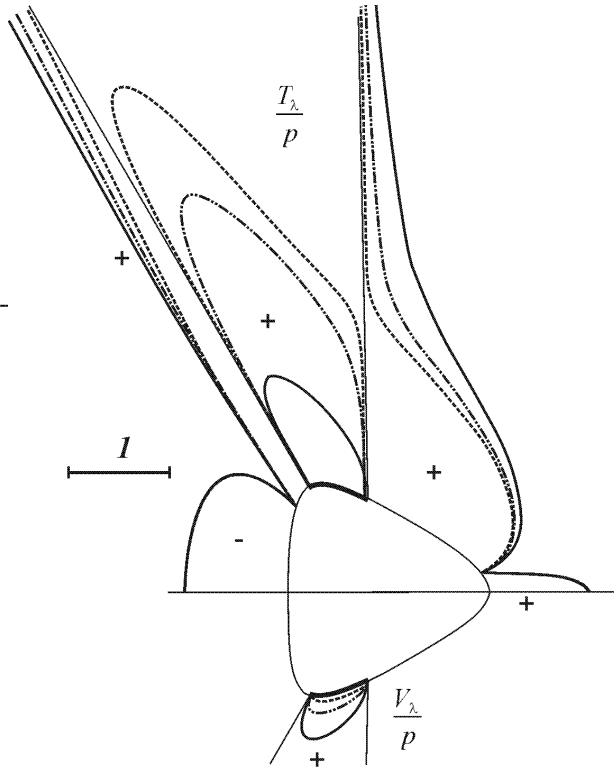


Рис. 5. Графіки розподілу кільцевих зусиль по контуру отвору та поздовжніх сил в зоні підсилення

Результати розрахунку показують, що у випадку розміщення підсилювальних стрижнів у напрямку дії зовнішніх сил їх вплив в зоні підсилення суттєвий. Із збільшенням відносної жорсткості стрижнів на розтяг або стиск поздовжні сили V_λ збільшуються.

2. Допустимо, що контур еліптичного отвору в пластинці ($N=2$) підсилений на проміжках $L_1=[\alpha_0^*; \beta_0^*]$, $L_2=[\pi+\beta_0^*; \pi+\alpha_0^*]$ двома однаковими центрально-симетричними стрижнями змінної жорсткості на розтяг або стиск (рис. 6).

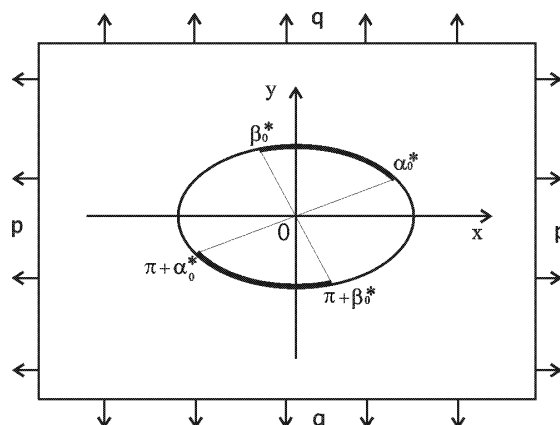


Рис. 6. Розрахункова схема задачі у випадку центральної симетрії

Зовнішнє навантаження таке ж, як і в попередній задачі.

Деформації контура отвору визначаються формулами (2), для яких з врахуванням умов центральної симетрії задачі

$$\begin{aligned} T_\rho(\lambda + \pi) &= T_\rho(\lambda), \\ S_{\rho\lambda}(\lambda + \pi) &= S_{\rho\lambda}(\lambda) \end{aligned}$$

мають місце співвідношення

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} T_p(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_p(t) dt; \quad \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} T_p(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_p(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} - \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} \right) dt; \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} S_{p\lambda}(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{p\lambda}(t) dt; \quad \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} S_{p\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{p\lambda}(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} - \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} \right) dt.$$

Граничні умови задачі ті ж, що й (5), а система сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення контактних зусиль $T_p(\lambda)$, $S_{p\lambda}(\lambda)$ має вигляд (6), де слід покласти

$$K_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \alpha(t) + \beta(\lambda) \beta(t); \quad K_2(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \beta(t) - \beta(\lambda) \alpha(t);$$

$$K_3(\lambda, t) = -2(\alpha(\lambda) \alpha(t) + \beta(\lambda) \beta(t)) - (\alpha(\lambda) \beta(t) - \beta(\lambda) \alpha(t)) \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad (19)$$

$$K_4(\lambda, t) = 2(\alpha(\lambda) \beta(t) - \beta(\lambda) \alpha(t)) - (\alpha(\lambda) \alpha(t) + \beta(\lambda) \beta(t)) \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2}.$$

Кільцеві зусилля $T_\lambda(\lambda)$ на контурі отвору знаходимо з врахуванням (19) за формулою (10).

Оскільки система (6), (19) має таку ж структуру, як і система (6), (7), тому метод колокації наближеного числового розв'язку переноситься без змін. На рис. 7, 8 показано вплив центральносиметричного підсилення на напружений стан нескінченної ізотропної пластинки з еліптичним ($N=2$, $\varepsilon=0,2$) отвором стрижнями змінного поперечного перерізу.

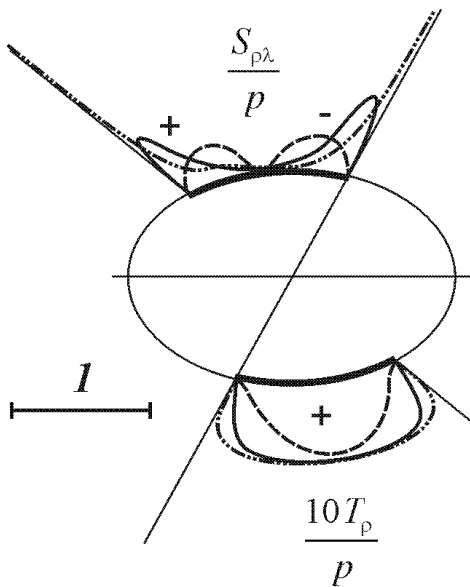


Рис. 7. Графіки розподілу нормальних і дотичних зусиль в зоні підсилення

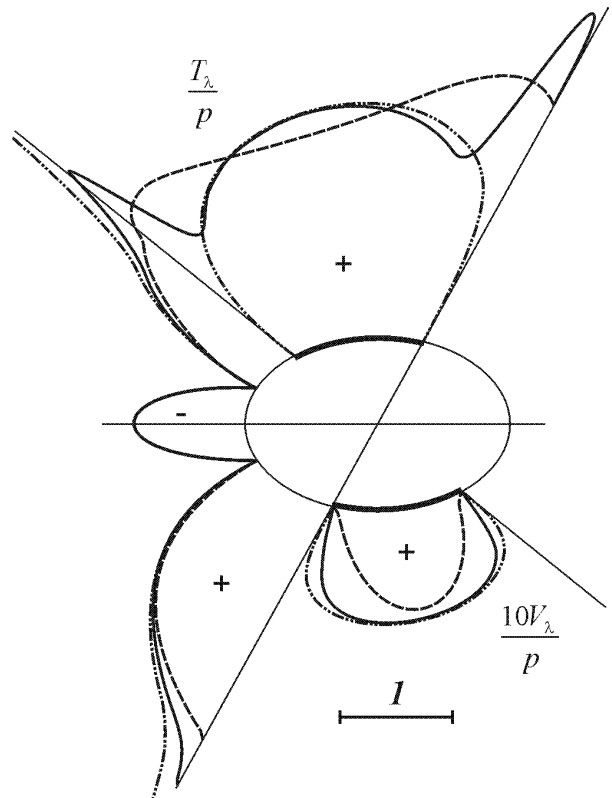


Рис. 8. Графіки розподілу кільцевих зусиль по контуру отвору та поздовжніх сил в зоні підсилення

Числові розрахунки проведені при $\alpha_0 = 70^\circ$; $\beta_0 = 130^\circ$; $p = 1$; $q = 0$; $\nu = 0,3$; $E_0/E = 1$; $h_0/h = 1$; $b_0/p = 0,05$, якщо ширина стрижнів $b(\lambda)$ змінюється за законом

$$b(\lambda) = \frac{b_0}{2} \begin{cases} 2 & \text{при } \lambda \in [\alpha'_0; \beta'_0]; \\ 1 + \sin \pi \frac{\lambda - \frac{\alpha'_0 + \alpha_0}{2}}{\alpha'_0 - \alpha_0} & \text{при } \lambda \in [\alpha_0; \alpha'_0]; \\ 1 - \sin \pi \frac{\lambda - \frac{\beta'_0 + \beta_0}{2}}{\beta_0 - \beta'_0} & \text{при } \lambda \in [\beta'_0; \beta_0], \end{cases} \quad (20)$$

де $[\alpha_0; \alpha'_0]$ і $[\beta'_0; \beta_0]$ – зони змінної жорсткості підсилення.

Штрихпунктирні лінії побудовано для випадку стрижня сталого поперечного перерізу $\alpha'_0 = \alpha_0$; $\beta_0 = \beta'_0$, суцільні – $\alpha'_0 - \alpha_0 = \beta_0 - \beta'_0 = 10^\circ$, пунктирні – $\alpha'_0 - \alpha_0 = \beta_0 - \beta'_0 = 30^\circ$.

Наведені графіки показують, що при підсиленні отвору стрижнями змінної жорсткості кільцеві і дотичні зусилля в околі торців приймають скінченні значення.

Числові розрахунки для обох задач проводились для різних значень N_0 до $N_0 = 48$ і практично не змінюються, починаючи з $N_0 = 24$, що свідчить про задовільну збіжність методу граничної колокації.

Висновки

У результаті числового експерименту встановлено:

- Вплив підсилювальних стрижнів на напружений стан пластинки спостерігається в зоні підсилення. При незначному віддаленні від цієї зони їх вплив зникає.
- Якщо підсилювальні стрижні розміщені перпендикулярно до лінії дії зовнішніх сил, то їх вплив незначний.
- Для зменшення концентрації напружень в околі торців підсилення доцільно використовувати стрижні змінної жорсткості.

The state of stress is surveyed on a contour of a curvilinear orifice, partially reinforced by two symmetric elastic rods of variable cross section, in an infinite isotropic plate. Using representations of components of a contour strain of a plate orifice by the way of integrated relations, the problem is shown to a system of two integrally - differential equations with cores of Hilbert concerning contact gains. The system is resolved by a method of boundary collocation. The influence of the shape of a plate orifice, geometry and physical properties of substantiating rods on a state of stress of a plate is explored.

Література

1. Мартинович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
2. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964. – 384 с.
3. Сяський А.А. Термоупругая задача для пластинки с частично подкрепленным круговым отверстием // Прикл. механика, 1984, 20, №10. – С. 75-79.
4. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикладная механика, 1983, 19, № 5. – С. 94 – 99.
5. Батишкіна Ю.В., Сяський А.О. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем // Волинський математичний вісник. – 2002. – Випуск 9. С. 4 – 11.
6. Сяський А.О. Тиск жорсткого диска на еліптичний отвір ортотропної полімерної пластинки // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – 1999. – Вип. 7. – С.46 – 50.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304с.

Одержано 17.03.04 р.