

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 517.944

С.Хома-Могильська

Тернопільська академія народного господарства

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ. ОСНОВНА ТЕОРЕМА

На основі зображення розв'язку крайової періодичної задачі $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$ у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, де $u^0(x, t)$ – розв'язок відповідної однорідної задачі, а $\tilde{u}(x, t)$ – точний розв'язок неоднорідного рівняння такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$, одержано умови розв'язності крайової неоднорідної періодичної задачі для конкретних значень періоду ω . Показано, що у знайдений формулі розв'язку містяться відомі раніше результати.

Умовні позначення

- N – множина натуральних чисел;
 - Q – множина раціональних чисел;
 - R – множина дійсних чисел;
 - C_π – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times R$;
 - $C_\pi^{k,l}$ – простір таких функцій $u \in C_\pi$, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$;
 - $G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times R$ разом з похідною по t ;
 - Q_ω – простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times R$ співвідношення $g(x, t + \omega) = g(x, t)$, тобто Q_ω – простір ω -періодичних функцій по змінній t .
- Сюди будемо включати і ω -періодичні функції $\mu = \mu(t)$ однієї змінної.

Вступ. Мета даного дослідження – уточнити двоїстість результатів відносно існування єдиного розв'язку крайової періодичної задачі $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u)$, встановлених П. Рабіновичем [1] і О. Вейводою та М. Штедри [2]. Природно виникають запитання: у якому ж вигляді існує єдиний розв'язок вказаної задачі? А можливо, справедливі обидва результати? (Результат П. Рабіновича – єдиний розв'язок має вигляд $u = u^0 + \varepsilon w$, а результат О. Вейводи – $u = \varepsilon w$ і лише у спеціально введеному ним класі функцій A_3 [2]). Слід зазначити, що вивчення вказаної нелінійної задачі тісно пов'язане з існуванням єдиного класичного розв'язку відповідної лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R, \quad (1)$$

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in R, \quad (2)$$

при $\omega = 2\pi$.

Нами встановлено, що спеціально введений клас функцій A_3 є додатковою умовою існування єдиного класичного розв'язку задачі (1), (2). У цьому класі функцій розв'язок відповідної однорідної задачі $u^o(0, t) = u^o(\pi, t) = 0$, $u^o(x, t + 2\pi) = u^o(x, t)$, $u_{tt}^o - u_{xx}^o = 0$ завжди тривіальний ($u^o(x, t) \equiv 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$), у той час, як відомо, що вказана однорідна задача має незчисленну множину розв'язків ($\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \sin kx$). Однак нами встановлено і ряд нових результатів, ще неопублікованих у літературі.

1. Частинні розв'язки періодичної задачі. Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості такого твердження.

Теорема 1 [2,3]. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap Q_{\omega}$, то функція $u = Sg$, яка визначена формулою

$$u(x, t) = (Sg)(x, t) \equiv -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (3)$$

є класичним ω -періодичним розв'язком задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

2. Умови розв'язності періодичної задачі. Встановимо умови існування розв'язку лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (1), (2) у припущенні, що $g(x, t + \omega) = g(x, t)$.

Методом Фур'є легко доводиться, що загальним розв'язком однорідної ω -періодичної задачі

$$u_{tt}^o - u_{xx}^o = 0, \quad u^o(x, t + \omega) = u^o(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

$$u^o(0, t) = u^o(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

є функція

$$u^o(x, t) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k x + A_k^2 \sin \nu_k x) \cos \nu_k t + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos \nu_k x + A_k^4 \sin \nu_k x) \sin \nu_k t, \quad (7)$$

де $\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega}$, $A, B, A_k^1, A_k^2, A_k^3, A_k^4, k \in \mathbf{N}$ – довільні сталі.

Припустимо, що відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ неоднорідного рівняння (4) такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$.

Такий розв'язок дійсно існує, і при $g \in G_{\pi t} \cap Q_{\omega}$ задається формулою (3).

Тепер, використовуючи формулу (7), ми будемо шукати розв'язок крайової періодичної задачі $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$ для неоднорідного лінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^o(x, t) + \tilde{u}(x, t) \equiv \\ &\equiv Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k x + A_k^2 \sin v_k x) \cos v_k t + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos v_k x + A_k^4 \sin v_k x) \sin v_k t + \tilde{u}(x, t), \end{aligned} \quad (8)$$

де $v_k = \frac{2\pi k}{\omega}$, A , B , A_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in N$ – довільні сталі, $\tilde{u}(x, t)$ – частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (4), такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$. Наприклад, він може бути визначений за формулою (3).

Очевидно, що розв'язок (8) буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (1), (2), якщо при врахуванні крайових умов $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ зчислена система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k t + A_k^3 \sin v_k t) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k \pi + A_k^2 \sin v_k \pi) \cos v_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos v_k \pi + A_k^4 \sin v_k \pi) \sin v_k t + \tilde{u}(\pi, t) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

відносно невідомих коефіцієнтів A , B , A_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in N$, має єдиний розв'язок.

Проведене нами дослідження системи (9) в залежності від конкретно вибраного періоду ω показало, що ряд результатів, одержаних нами раніше і нових, міститься у формулах (8), (9).

4. Основна теорема. Нехай $v_k = \frac{2\pi k}{\omega} \notin Q$, $k \in N$, тобто, $\omega \neq \frac{2\pi p}{q}$, $p, q \in N$.

Припустимо, що ω -періодичні функції $\tilde{u}(0, t)$ і $\tilde{u}(\pi, t)$ розкладаються у такі рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\tilde{u}(0, t) = \frac{a_o^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos v_k t + b_k^0 \sin v_k t); \quad (10)$$

$$\tilde{u}(\pi, t) = \frac{a_o^\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^\pi \cos v_k t + b_k^\pi \sin v_k t). \quad (11)$$

Тоді система (9) має єдиний розв'язок, а отже, крайова періодична задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок.

Доведення. Справді, при виконанні умов основної теореми, підставляючи ряди (10) і (11) у систему (9), одержуємо, що

$$\begin{aligned} B &= -\frac{a_o^0}{2}; \quad A_k^1 = -a_k^0; \quad A_k^3 = -b_k^0, \quad k \in N; \\ A\pi + B &= -\frac{a_o^\pi}{2}; \quad A_k^1 \cos \nu_k \pi + A_k^2 \sin \nu_k \pi = -a_k^\pi, \\ A_k^3 \cos \nu_k \pi + A_k^4 \sin \nu_k \pi &= -b_k^\pi, \quad k \in N. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки $\nu_k \notin \mathbf{Q}$, то $\sin \nu_k \pi \neq 0$. Отже, згідно рівностей (12), коефіцієнти A , B , A_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in N$ визначаються однозначно, що треба було довести.

Висновки:

1) Необхідно зазначити, що дане твердження основної теореми давно відоме у літературі і було одержане іншими методами дослідження [4]. Наші дослідження направлені на більш детальне вивчення умов існування єдиного розв'язку крайової періодичної задачі (1), (2) і можемо запевнити, що для розглянутого випадку $\frac{2\pi}{\omega} \notin \mathbf{Q}$ ми одержали вперше формулу для відшукування єдиного формального розв'язку цієї крайової задачі у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^o(x, t) + \tilde{u}(x, t) \equiv \\ &\equiv Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k x + A_k^2 \sin \nu_k x) \cos \nu_k t + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos \nu_k x + A_k^4 \sin \nu_k x) \sin \nu_k t + (Sg)(x, t), \end{aligned} \quad (13)$$

де функція Sg визначена формулою (3), а невідомі коефіцієнти A , B , A_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$ – за формулою (12).

2) У випадку $\omega = 2\pi$ на основі системи розв'язності (9) встановлено давно відомий результат Митропольського [3, с.60] (аналог результату О.Вейводи), а також новий результат [5] (аналог результату П. Рабіновича), який формулюється так:

Теорема 2 [1,5]. Нехай $g \in G_\pi \cap Q_{2\pi}$. Тоді для кожної функції $\mu(t) \in C^1(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}$, яка задовольняє рівняння

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (14)$$

функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv u^o(x, t) + \tilde{u}_1(x, t) \quad (15)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 2\pi$.

3) Отже, на нашу думку, сформульована теорема 2 підтверджує результат роботи [1] (результат П. Рабіновича) про можливість існування класичних 2π -періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (1), (2) у вигляді $u(x, t) = u^o(x, t) + \tilde{u}_1(x, t)$, де $u^o(x, t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$, а $\tilde{u}_1(x, t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (1). Більше того, рівність (14) є рівнянням (умовою) відшукування невідомої функції $\mu(t)$, оскільки дане рівняння означає рівність двох функцій однієї змінної t . З іншого боку, рівність (14) є умовою виділення класу функцій $g(x, t)$, для яких справедлива теорема 2. Так мають місце наступні твердження.

Лема 6. Для кожної непарної функції $\mu(t) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}$ виконується умова

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = 0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Теорема 3. Нехай $g \in G_{\pi t} \cap Q_{2\pi}$ і функція $g(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (16)$$

Тоді для кожної непарної функції $\mu(t) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}$ функція $u(x, t)$, яка визначена формулою (15), є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 2\pi$.

We obtained conditions of solubility of boundary value non-homogeneous periodical problem for concrete value of period ω on base of solution of boundary value periodical problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$. This solution is represented by formula $u(x, t) = u^o(x, t) + \tilde{u}(x, t)$. Here $u^o(x, t)$ – solution corresponding homogeneous problem and $\tilde{u}(x, t)$ – exactly solution non-homogeneous equation, moreover $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$. We demonstrated that in obtained solution formula conclude results that know before.

Література

1. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Comm. Pure Appl. Math.–1967.–20, №1.–P.145–205.
2. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений //Дифференц. уравнения.–1984.–20, №10.–С.1733–1739.
3. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования уравнений гиперболического типа.– К.: Наук.думка, 1991.–232с.
4. Пташник Б. Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. –К.:Наук.думка, 1984.–264 с.
5. Хома Г. П., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Про розв'язки періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку //ІІІ Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (9–12 вересня 2003 року, Івано-Франківськ).–Тези доповідей.–С.108.

Одержано 22.01.04 р.