

УДК 319.216

С. Лупенко, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПЕРІОДИЧНІСТЬ ЗМІШАНИХ ВИЩИХ МОМЕНТНИХ ФУНКЦІЙ СТОХАСТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ПОЛІНОМУ ВОЛЬТЕРРА ДРУГОГО ПОРЯДКУ НЕЛІНІЙНОСТІ

В роботі доведено теорему про стохастичну періодичність функціонального часоінваріантного поліному Вольтерра другого порядку нелінійності відносно його змішаних вищих ($k > 2$) моментних функцій за умови періодичності його породжуючого процесу. На основі доведеної теореми обґрунтовано методи статистичного оцінювання змішаних моментних функцій вихідного процесу нелінійної динамічної системи, якщо на її вхід діє періодичний білий шум.

1. Вступ

Нелінійні системи становлять широкий клас реальних систем [1, 2]. Результати нелінійних перетворень випадкових процесів опубліковані в ряді робіт, зокрема, Бойка І., Деча Р., Вінера Н., Левіна Б., Мармареліса П., Мармареліса В., Малахова А., Марченка Б. [2-7]. Проте більшість із них розглядали лише випадки, коли вхідний сигнал нелінійної системи є стаціонарним випадковим процесом, тому актуальною науково-технічною проблемою є дослідження проходження нестационарних, зокрема, стохастично періодичних випадкових процесів через нелінійні динамічні системи.

Задачі аналізу перетворень стохастично періодичних процесів розв'язані в основному лише для випадку лінійної динамічної системи, зокрема, в роботах [8, 9, 10]. В роботах [11, 12] досліджено властивості вихідного процесу нелінійної динамічної системи другого порядку, зокрема, було доведено періодичність початкових та

центральної моментних функцій та кореляційної функції стохастичного функціоналу Вольєрра другого порядку, за умови періодичності породжуючого випадкового процесу – періодичного білого шуму.

Метою даної роботи є розширення та узагальнення результатів попередніх праць шляхом доведення періодичності змішаних вищих моментних функцій стохастичного нелінійного функціоналу Вольєрра другого порядку, якщо його породжуючий процес є періодичним білим шумом.

2. Основна частина

Будемо вважати, що вихідний процес нелінійної стаціонарної (часоінваріантної) системи, коли на її вхід діє періодичний білий шум, може бути поданий у вигляді стохастичного функціонального поліному Вольєрра другого порядку

$$y(\omega, t) = \varphi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t - \tau) d\eta(\omega, \tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\eta(\omega, \tau_1) d\eta(\omega, \tau_2), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

де $\{\varphi_0, \varphi_1(t - \tau), \varphi_2(t - \tau_1, t - \tau_2), \dots\}$ – множина дійсних не випадкових інтегровних з квадратом функцій, що називаються ядрами Вольєрра, $\eta(\omega, \tau)$ – стохастично неперервний сепарабельний випадковий процес з незалежними T -періодичними приростами [13], $\omega \in \Omega$ – елементарна випадкова подія. Стохастичний функціональний поліном (1) є математичною моделлю вихідного процесу нелінійної динамічної системи другого порядку, коли на її вхід діє T -періодичний білий шум $\zeta(\omega, \tau)$, що є узагальненою похідною від процесу із незалежними T -періодичними приростами $\eta(\omega, \tau)$.

Враховуючи взаємозв'язок через оператор узагальненої похідної між білим шумом $\zeta(\omega, \tau)$, який ще називають породжуючим процесом, та процесом із незалежними приростами $\eta(\omega, \tau)$, вираз (1) можна подати так:

$$y(\omega, t) = \varphi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t - \tau) \zeta(\omega, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \zeta(\omega, \tau_1) \zeta(\omega, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2)$$

Відмітимо, що, згідно з [14], для випадкового процесу з незалежними T -періодичними приростами має місце така властивість: моментні функції приростів процесу з незалежними T -періодичними приростами T -періодичні, тобто

$$\mathbf{M}\{d\eta(\omega, \tau_1) \dots d\eta(\omega, \tau_n)\} = \mathbf{M}\{d\eta(\omega, \tau_1 + T) \dots d\eta(\omega, \tau_n + T)\}. \quad (3)$$

Сформулюємо і доведемо теорему.

Теорема 1. Якщо для стохастичного функціонального поліному (1) другого порядку нелінійності його породжуючий процес є T -періодичним білим шумом, то змішані моментні функції вищого порядку поліному (1) також будуть періодичними за сукупністю аргументів з цим же періодом T .

Доведення. Для зручності та спрощення подальших викладок змінну $\omega \in \Omega$ будемо опускати, а поліном (1) перепишемо у вигляді

$$y(t) = \varphi_0 + N_1\{t\} + N_2\{t\}, \quad (4)$$

$$\text{де } N_1\{t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t - \tau_1) d\eta(\omega, \tau_1), \quad N_2\{t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\eta(\omega, \tau_1) d\eta(\omega, \tau_2). \quad (5)$$

Для (1) його змішана моментна функція порядку $\sum_{i=1}^m k_i$, $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} = \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m (\varphi_0 + N_1\{t_i\} + N_2\{t_i\})^{k_i}\right\}. \quad (6)$$

Застосувавши формулу бінома Ньютона до кожного із співмножників, отримаємо

$$\mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} = \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m \sum_{l_i=0}^{k_i} C_{k_i}^{l_i} \cdot (\varphi_0 + N_1\{t_i\})^{l_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i}\right\}. \quad (7)$$

Застосувавши ще раз формулу бінома Ньютона, отримаємо

$$\mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} = \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m \left[\sum_{l_i=0}^{k_i} C_{k_i}^{l_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i} \cdot \left[\sum_{r_i=0}^{l_i} C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \right] \right]\right\}.$$

Проведемо наступні перетворення останнього виразу.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} &= \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m \sum_{l_i=0}^{k_i} \sum_{r_i=0}^{l_i} C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i}\right\} = \\ &= \mathbf{M}\left\{\sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m (C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i})\right\} = \\ &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m (C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i})\right\} = \\ &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \prod_{i=1}^m (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i}\right\}. \end{aligned}$$

Оскільки випадкові елементи згруповані в другому операторі множення, то оператор математичного сподівання застосуємо лише до другого оператора множення:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} &= \\ &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m (N_1\{t_i\})^{l_i-r_i} \cdot (N_2\{t_i\})^{k_i-l_i}\right\}. \end{aligned}$$

Врахуємо в останньому виразі позначення для $N_1\{t_i\}$ та $N_2\{t_i\}$, згідно з (5). При цьому змішана моментна функція буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m)\} &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\ &\cdot \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t_i - \tau_1) d\eta(\tau_1) \right)^{l_i-r_i} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t_i - \tau_2, t_i - \tau_3) \eta(\tau_2) d\eta(\tau_3) \right)^{k_i-l_i} \right)\right\} = \\ &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t_i - \tau_i) \prod_{j=1}^{l_i-r_i} \varphi_1(t_i - \tau_j) \prod_{j=1}^{k_i-l_i} d\eta(\tau_j) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t_i - \tau_{l_i-r_i+2j-1}, t_i - \tau_{l_i-r_i+2j}) \prod_{j=l_i-r_i+1}^{2k_i-l_i-r_i} d\eta(\tau_j) \right)\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\
&\cdot \mathbf{M} \left\{ \prod_{i=1}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} (2k_i - l_i - r_i) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l_i-r_i} \varphi_1(t_i - \tau_j) \cdot \prod_{j=1}^{k_i-l_i} \varphi_2(t_i - \tau_{l_i-r_i+2j-1}, t_i - \tau_{l_i-r_i+2j}) \right) \prod_{j=1}^{2k_i-l_i-r_i} d\eta(\tau_j) \right\} = \\
&= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\
&\cdot \mathbf{M} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m 2k_j - l_j - r_j \right) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l_j-r_j} \varphi_1(t_i - \tau_j) \cdot \prod_{j=1}^{k_i-l_i} \varphi_2 \left(t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j - 1}, t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j} \right) \cdot \prod_{j=1}^{\sum_{i=1}^m 2k_i - l_i - r_i} d\eta(\tau_j) \right\}.
\end{aligned}$$

Внівши оператор математичного сподівання під знак інтегралу, маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \{ y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m) \} &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m 2k_j - l_j - r_j \right) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l_j-r_j} \varphi_1(t_i - \tau_j) \cdot \prod_{j=1}^{k_i-l_i} \varphi_2 \left(t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j - 1}, t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j} \right) \cdot \mathbf{M} \left\{ \prod_{j=1}^{\sum_{i=1}^m 2k_i - l_i - r_i} d\eta(\tau_j) \right\}.
\end{aligned}$$

Врахувавши вираз (3), остання рівність буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \{ y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m) \} &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m 2k_j - l_j - r_j \right) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l_j-r_j} \varphi_1(t_i - \tau_j) \cdot \prod_{j=1}^{k_i-l_i} \varphi_2 \left(t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j - 1}, t_i - \tau_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j} \right) \cdot \mathbf{M} \left\{ \prod_{j=1}^{\sum_{i=1}^m 2k_i - l_i - r_i} d\eta(\tau_j + T) \right\}.
\end{aligned}$$

В останньому виразі зробимо заміни $\tau_j + T = \tilde{\tau}_j$, $j = 1, \sum_{i=1}^m 2k_i - l_i - r_i$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \{ y^{k_1}(t_1) \cdot y^{k_2}(t_2) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m) \} &= \sum_{l_0=0}^{k_0} \dots \sum_{l_m=1}^{k_m} \sum_{r_0=0}^{l_0} \dots \sum_{r_m=0}^{l_m} \prod_{i=1}^m C_{k_i}^{l_i} \cdot C_{l_i}^{r_i} \cdot \varphi_0^{r_i} \cdot \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m 2k_j - l_j - r_j \right) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l_j-r_j} \varphi_1(t_i + T - \tilde{\tau}_j) \cdot \prod_{j=1}^{k_i-l_i} \varphi_2 \left(t_i + T - \tilde{\tau}_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j - 1}, t_i + T - \tilde{\tau}_{\sum_{i=1}^m l_i - r_i + 2j} \right) \cdot \\
&\cdot \mathbf{M} \left\{ \prod_{j=1}^{\sum_{i=1}^m 2k_i - l_i - r_i} d\eta(\tilde{\tau}_j) \right\} = \mathbf{M} \{ y^{k_1}(t_1 + T) \cdot y^{k_2}(t_2 + T) \cdot \dots \cdot y^{k_m}(t_m + T) \}.
\end{aligned}$$

Порівнюючи початок та кінець цього виразу, видно, що змішані моментні функції скінченного порядку стохастичного функціонального поліному (1) періодичні. Отже, теорему доведено.

Отримані результати можуть бути поширені і на випадки, коли вхідний процес нелінійної безінерційної системи другого порядку в загальному випадку не є білим шумом, а є корельованим випадковим процесом, тобто випадковим процесом із

довільною, не обов'язково δ -подібною кореляційною функцією. Проте такий вхідний випадковий процес повинен бути T -періодичним.

Покажемо, що зображення вихідного процесу нелінійної безінерційної системи у випадку, коли на її вхід діє корельований випадковий процес, який подамо у вигляді лінійного T -періодичного випадкового процесу, буде аналогічне зображенню (1).

Як відомо, лінійним випадковим процесом є стохастичний інтеграл [5]

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\omega, \tau), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \tag{8}$$

де $\varphi(t - \tau) \in L_2$ - не випадкова числова функція, яка для кожного $t \in [0, \infty)$ приймає скінченні значення рівномірно по τ ; $\eta(\omega, \tau)$ - стохастично неперервний сепарабельний випадковий процес з незалежними приростами, який задовольняє умови $P\{\eta(\omega, \tau) = -\eta(\omega, -\tau)\} = 1$ і $P\{\eta(\omega, 0) = 0\} = 1$. В роботах [8, 9, 10] показано, що даний процес буде стохастично T -періодичним, якщо його породжуючий процес є узагальненою похідною від процесу із незалежними T -періодичними приростами, тобто T -періодичним білим шумом.

Нехай нелінійна безінерційна система другого порядку перетворює лінійний випадковий процес (8) згідно з співвідношенням, що описується поліномом

$$g(x) = \sum_{n=0}^2 c_n \cdot x^n, \tag{9}$$

де $\{c_0, c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$ - множина деяких числових коефіцієнтів.

Формування лінійного T -періодичного випадкового процесу можна інтерпретувати як перетворення лінійною часоінваріантною динамічною системою періодичного білого шуму. Формування ж вихідного процесу нелінійної динамічної системи у такому разі можна інтерпретувати як перетворення послідовно з'єднаних лінійної динамічної ланки та нелінійної безінерційної ланки періодичного білого шуму. Отже, нелінійну динамічну систему подамо у вигляді послідовно з'єднаних лінійної інерційної (динамічної) ланки та нелінійної безінерційної (статичної) ланки, як показано на рисунку 1

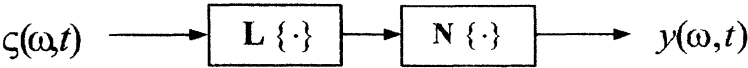


Рис. 1. Структура нелінійної динамічної системи

Відгук на виході такої нелінійної динамічної системи можна подати так:

$$y(\omega, t) = N[L(\zeta(\omega, t))], \tag{10}$$

де $L\{\cdot\}$ - лінійний оператор, що описує лінійну ланку з імпульсною реакцією $\varphi(t - \tau)$; $N\{\cdot\}$ - нелінійний оператор, який описується поліномом $g(x)$.

Розписавши оператори $L\{\cdot\}$ та $N\{\cdot\}$, відгук (10) запишемо у вигляді:

$$y(\omega, t) = \sum_{n=0}^2 c_n \cdot \xi^n(\omega, t) = \sum_{n=0}^2 c_n \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\omega, \tau) \right]^n, \tag{11}$$

або в більш розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_0 + c_1 \xi(\omega, t) + c_2 \xi^2(\omega, t) = \\
&= c_0 + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) d\eta(\omega, \tau) + c_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) d\eta(\omega, \tau) \right)^2 = \\
&= c_0 + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) d\eta(\omega, \tau) + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau_1) \varphi(t-\tau_2) d\eta(\omega, \tau_1) d\eta(\omega, \tau_2).
\end{aligned} \quad (12)$$

Введемо позначення:

$$\varphi_0 = c_0, \quad \varphi_1(t-\tau) = c_1 \varphi(t-\tau), \quad \varphi_2(t-\tau_1, t-\tau_2) = c_2 \varphi(t-\tau_1) \varphi(t-\tau_2). \quad (13)$$

Як бачимо, з врахуванням вище наведених позначень (13), ряд (12) є стохастичним функціональним поліномом Вольтерра другого порядку (1).

На основі доведеної теореми можливо розробити статистичні методи обробки та аналізу випадкового процесу, що спостерігається на виході нелінійної динамічної системи другого порядку, коли на її вхід діє T -періодичний білий шум або коли на вхід нелінійної безінерційної системи другого порядку діє лінійний T -періодичний випадковий процес (18).

Для стохастично T -періодичних процесів у вузькому розумінні характерна така властивість: відліки процесу, взяті через період T утворюють стаціонарні та стаціонарно пов'язані у вузькому розумінні випадкові послідовності. Іншими словами, задана на гратці з кроком T і будь-якою початковою фазою $\varphi \in [0, T]$ вкладена послідовність

$$\{y(\varphi + i \cdot T), \quad i \in \mathbf{Z}\} \quad (14)$$

є стаціонарною, а будь-які дві такі послідовності з різними початковими фазами є стаціонарно пов'язаними у вузькому розумінні. Саму послідовність (14) в [8] названо φ -серією. Стаціонарність та стаціонарність пов'язаність φ -серій означає наступне.

Нехай крок дискретизації стохастично періодичного у вузькому розумінні процесу $y(\omega, t)$ визначається як

$$h = \frac{T}{L}, \quad L > 0, \quad (16)$$

де L - кількість відліків продискретизованого процесу $y(\omega, t)$, що припадає на період T , а початкова фаза рівна $\varphi_j = j \cdot h$, $j = \overline{0, L-1}$. Тоді для кожної з φ_j -серій

$$\left\{ y_j(i) = y(jh + iLh), \quad j = \overline{0, L-1}, \quad i \in \mathbf{Z} \right\}, \quad (17)$$

k -вимірна інтегральна функція розподілу не залежить від будь-якого зсуву s за сукупністю аргументів

$$\begin{aligned}
&F_{j_k}(x_1, \dots, x_k; jh + i_1 Lh, \dots, jh + i_k Lh) = \\
&F_{j_k}(x_1, \dots, x_k; jh + i_1 Lh + sLh, \dots, jh + i_k Lh + sLh), \quad i_1, \dots, i_k \in \mathbf{Z}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \quad (18)$$

Взаємна $k+m$ -вимірна інтегральна функція розподілу для φ_j і φ_p -серій також не залежить від будь-якого зсуву s за сукупністю аргументів

$$\begin{aligned}
&F_{j\rho_{k+m}}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m; jh + i_1 Lh, \dots, jh + i_{k+m} Lh) = \\
&= F_{j\rho_{k+m}}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m; jh + i_1 Lh + sLh, \dots, jh + i_{k+m} Lh + sLh), \quad i_1, \dots, i_{k+m} \in \mathbf{Z}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \quad (19)$$

Якщо існують змішані моментні функції стохастичного T -періодичного випадкового процесу, то вони є T -періодичні, тобто сам процес є стохастично

T -періодичним відносно змішаних моментних функцій скінченного порядку за сукупністю аргументів.

Розглянуті вище властивості φ_j -серій стохастично T -періодичних випадкових процесів дають можливість розробити статистичні методи їх обробки з метою оцінювання змішаних моментних функцій таких процесів.

Розглянемо питання статистичного оцінювання змішаних моментних функцій стохастичного функціонального поліному (1).

Нехай маємо реалізацію $\{x(t_i), t_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, N}\}$ стохастично T -періодичного дискретного випадкового процесу, який спостерігається на виході нелінійної динамічної часоінваріантної системи другого порядку, на вхід якої діє періодичний білий шум. Оскільки випадковий процес є стохастично T -періодичним, то оцінки його імовірнісних характеристик отримуються шляхом усереднення відліків реалізації випадкового процесу, взятих через період T . Отже, оцінка змішаних моментних функцій порядку $k = \sum_{i=1}^m k_i, m \in \mathbf{N}$ рівна

$$\hat{a}_k(t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{Z} \cdot \sum_{j=0}^{Z-1} \left[x^{k_1}(t_1 + j \cdot \hat{T}) \cdot \dots \cdot x^{k_m}(t_p + j \cdot \hat{T}) \right]. \quad (20)$$

де Z - рівне цілій частині від ділення $\frac{N}{T}$; $\hat{T}$ - оцінка періоду T досліджуваного процесу. При імітаційному моделюванні стохастично T -періодичного процесу його період є відомим, заданим, тому у такому випадку в (20) оцінка $\hat{T}$ приймається рівною T . У випадку, коли $m = 2$ та $k = 2$, $\hat{a}_2(t_1, t_2)$ - є оцінкою коваріаційної функції.

3. Висновок

В роботі доведено теорему про стохастичну періодичність функціонального поліному Вольєрра другого порядку нелінійності відносно його змішаних моментних функцій скінченного порядку за умови, що його породжуючий процес є періодичним білим шумом. Теорема узагальнює результати попередніх праць, де встановлено періодичність лише початкових, центральних моментних функцій та кореляційної функції стохастичного функціоналу Вольєрра другого порядку, за умови періодичності його породжуючого випадкового процесу. Отримані результати дають підстави застосовувати статистичні методи обробки і аналізу стохастично періодичних сигналів, які мають місце в нелінійних системах в рамках вищих змішаних моментних функцій випадкових процесів, а також дозволяють проводити імітаційне моделювання на ЕОМ перетворень стохастично періодичних процесів в нелінійних динамічних системах.

The theorem of stochastic periodicity of functional time-invariant Volterra polinom of second order nonlinearity in relation to its mixed higher ($k > 2$) momentns functions in condition of periodicity of its generative process is proved in this paper. On the basis of the proved theorem the methods of statistical evaluation of the mixed moments functions of output process of the nonlinear dynamic system in condition of input periodic white noise are substantiated

Література

1. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей.- Л.: Энергоатомиздат, 1990. - 256 с.
2. Мармарелис П., Мармарелис В. Анализ физиологических систем. Метод белого шума. - М.: Мир, 1981. - 480 с.
3. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1965. - 208 с.

4. Ку И.Х., Вольф А.А. Применение функционалов Вольтерра-Винера для анализа нелинейных систем // Техническая кибернетика за рубежом / Под. ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1968. - С. 145-165.
5. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. - К.: Наукова думка, 1973. - 192 с.
6. Бойко І., Марченко Б. Ортогональні стохастичні функціонали в теорії нелінійних радіотехнічних кіл // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя. - 1997. - Т.2, Ч.2. - С. 5-12.
7. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов. Радио.- Т.1, 1974. - 552 с.
8. Приймак Н.В. Оценка периода корреляции и ее использование при исследовании стохастически периодических радиотехнических сигналов: Автореф. дис. канд.техн.наук: 05.12.01/ МЭИ. М., 1987. - 18 с.
9. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Пр. Ін.-ту електродинаміки НАН України. Електротехніка. - 1999. - С. 165-182.
10. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис. докт.техн.наук:05.13.06/ Київ, НАУ,2001.-34 с.
11. Лупенко С.А., Приймак М.В., Щербак Л.М. Поліноміальний стохастично періодичний функціонал другого порядку як модель циклічних випадкових сигналів в нелінійних системах // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.- Хмельницький: Навчальна книга. - 2000. - №1. - С. 134-137.
12. Лупенко С.А., Приймак М.В. Стохастично періодичний функціональний ряд Вольтерра другого порядку // Праці Інституту електродинаміки НАН України. Збірник наукових праць. -Київ, 2003.- №1(4).- С. 126-128.
13. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. - 1996. -Вип. 10. - С. 22-27.
14. Приймак М.В. Аналіз енерговантажень із використанням лінійних випадкових процесів // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. -1999.- Том 4.- Число 1. - С.84-87.

Одержано 07.22.03 р.