

УДК 62-504.462

Я. Проць, канд. техн.наук; С. Мовчан

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ У ПЛОЩИНІ ПАРАМЕТРІВ, ЯКІ НЕЛІНІЙНО ВХОДЯТЬ В КОЕФІЦІЄНТИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто питання побудови областей стійкості лінійних неперервних систем в просторі параметрів, які нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння. Завдяки використанню методу D-розбиття та розробленого алгоритму, отримано область стійкості реальної динамічної системи.

Вступ. Розв'язок задачі визначення стійкості фіксованої лінійної неперервної системи є недостатнім для дослідження реальних систем автоматичного керування. Це зумовлено тим, що параметри реального об'єкта керування можуть в процесі роботи змінюватись. Тому важливою є задача побудови області стійкості (ОС) в просторі параметрів, вплив яких на систему досліджується.

Досить зручним методом побудови області стійкості лінійних неперервних систем в площині двох параметрів є метод D-розбиття [1, 2], який дозволяє визначити області, що відповідають заданому числу коренів характеристичного рівняння, розташованих зліва від уявної осі, коли параметри системи входять в коефіцієнти характеристичного полінома лінійно. В цьому випадку рівняння границі D-розбиття можна привести до вигляду

$$G(j\omega) = \nu P(j\omega) + \mu Q(j\omega) + L(j\omega) = 0,$$

де ν і μ – параметри, що змінюються і вплив яких на стійкість нас цікавить.

В деяких випадках для неперервних систем, для яких параметри входять нелінійно в характеристичне рівняння у вигляді їх добутку, задачу вдається звести до лінійної в просторі двох параметрів. Але часто нелінійна залежність коефіцієнтів характеристичного рівняння від параметрів об'єкта носить такий характер, що звести визначення області стійкості системи в просторі двох, а тим більше трьох таких параметрів до чисто лінійної задачі не вдається.

Коли система має високий порядок і параметри, в просторі яких визначаються границі області стійкості (ГОС), входять нелінійно в коефіцієнти характеристичного рівняння, використовують чисельні методи з використанням ЕОМ [3, 4, 5, 6]. Ці методи дозволяють розв'язати задачу побудови області стійкості лінійних систем шляхом

перебору великої кількості точок на площині параметрів з використанням принципу взаємоперпендикулярної орієнтації (при цьому напрям зміни параметрів відбувається в чотирьох можливих напрямках: вгору, вниз, вліво, вправо, тобто по сторонах квадрата) [4, 5], "гусеничного методу" (послідовне просування вздовж границі ОС за допомогою поступальних переміщень і поворотів) і симплексного методу слідкування [4]. При цьому обчислювальну процедуру визначення стійкості або нестійкості системи для різних значень параметрів, які відповідають розглядуваним точкам, пропонується проводити за одним із відомих алгоритмів (Гурвіца, Рауса, Лєснара-Шипара і т.д.) або шляхом обчислення коренів характеристичного рівняння.

В роботі [3] перебір точок в площині параметрів цифрової системи проводять шляхом обертання по еліпсу навколо відомої точки границі ОС вектора, кінець якого визначає нові значення кривої цієї границі шляхом розв'язку характеристичного рівняння.

Очевидно, що метод перебору параметрів, будучи найбільш загальним, неекономічний з точки зору кількості обчислень при збільшенні точності визначення ГОС і не гарантує коректності результату.

Постановка задачі. Ставиться задача побудови області стійкості в просторі параметрів лінійних неперервних систем, характеристичне рівняння яких в загальному випадку має вигляд

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (1)$$

де всі коефіцієнти дійсні і нелінійно залежать від параметрів об'єкта керування. При розв'язуванні даної задачі, на відміну від відомих чисельних методів, виключається перебір по одному із параметрів тих точок площини параметрів, які не належать області стійкості.

Для побудови області стійкості на площині двох параметрів, один із яких нелінійно, а другий лінійно входять в коефіцієнти рівняння (1), використаємо рівняння границі D-розбиття по одному параметру

$$D(j\omega) = kH(j\omega) + L(j\omega) = 0, \quad (2)$$

де k – параметр, що входить лінійно в коефіцієнти.

На відміну від робіт [3, 4], де D-розбиття використовується для визначення стійкості або нестійкості системи при параметрах, які відповідають різним точкам в площині двох параметрів, в даній роботі розглянемо задачу аналітичного визначення за допомогою рівняння (2) множини значень параметра k , що входить лінійно, для відповідної множини наперед заданих значень деякого параметра V ($V_{\min} < V < V_{\max}$), який входить нелінійно. Ці параметри разом із обчисленими значеннями параметра k визначають точки точної (з похибкою обчислень) границі області стійкості в площині параметрів k і V .

Таким чином, задача побудови ГОС в площині двох параметрів зводиться до знаходження розв'язку задачі дискретного D-розбиття по одному параметру.

Обчислення значень параметру k і побудову границі ОС будемо здійснювати без побудови кривих D-розбиття, а використовуючи розв'язки рівнянь, які визначають ці криві.

Розглядається задача використання даного підходу для побудови ОС в площині двох параметрів, що нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, і в просторі двох параметрів, що входять нелінійних і одного – лінійно.

Розв'язок поставленої задачі. Для визначення границі області стійкості дискретної лінійної системи в площині параметрів, один із яких лінійно, а другий нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, рівняння границі D-

розбиття по одному параметру подамо у вигляді $D(j\omega) = k(H_1(\omega) + jH_2(\omega)) - (L_1(\omega) + jL_2(\omega)) = 0$, де в загальному випадку

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= c_n \omega^n - c_{n-2} \omega^{n-2} + \dots - c_2 \omega^2 + c_0, \\ L_2(\omega) &= -c_{n-1} \omega^{n-1} + c_{n-3} \omega^{n-3} - \dots - c_3 \omega^3 + c_1 \omega, \\ H_1(\omega) &= d_r \omega^r - d_{r-2} \omega^{r-2} + \dots - d_2 \omega^2 + d_0, \\ H_2(\omega) &= -d_{r-1} \omega^{r-1} + d_{r-3} \omega^{r-3} - \dots - d_3 \omega^3 + d_1 \omega, \end{aligned} \quad (3)$$

r і n – парні числа.

Звідси отримуємо вираз для визначення параметра k , який входить лінійно

$$k = \frac{L_1(\omega)H_1(\omega) + L_2(\omega)H_2(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)} + j \frac{L_2(\omega)H_1(\omega) - L_1(\omega)H_2(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \text{ Т}$$

ак як параметр k є дійсною, фізично реальною величиною, то задачу визначення границі області стійкості D-розбиття можна перевести в задачу визначення відрізка стійкості, яким є відрізок дійсної вісі, що лежить в області стійкості площини k .

Обчислення граничних значень параметра k відрізка стійкості будемо здійснювати без побудови кривих D-розбиття із виразу

$$k = \frac{L_1(\omega)H_1(\omega) + L_2(\omega)H_2(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}. \quad (4)$$

Чисельник виразу (4), після деяких перетворень, з врахуванням (3), можна подати в загальному вигляді

$$L_1(\omega)H_1(\omega) + L_2(\omega)H_2(\omega) = \sum_{i=0}^r c_{2i} \sum_{k=0}^r d_{2k} \omega^{2(k+i)} + \sum_{i=0}^l c_{2i+1} \sum_{k=0}^l d_{2k+1} \omega^{2(k+i+1)},$$

де $r = \frac{n-1}{2}, l = \frac{m-1}{2}$, якщо n непарне і $r = \frac{n}{2}, l = \frac{m}{2} - 1$, якщо n парне. Крім того, перед добутком $c_{2i}d_{2k}$ ставиться знак "+", якщо $(k+l)$ парне, і знак "-", якщо $(k+l)$ непарне. Перед добутком $c_{2i+1}d_{2k+1}$ ставиться знак "+", якщо значення $(k+l+1)$ парне, і знак "-", якщо значення $(k+l+1)$ непарне.

Знаменник виразу (4) після аналогічних перетворень приводиться до вигляду

$$H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega) = \sum_{i=0}^n d_i^2 \omega^{2i} + \sum_{i=0}^{n-2} d_i \sum_{k=1}^l d_{2k+i} \omega^{2(k+i)}.$$

При цьому, якщо значення n непарне, то $l = \frac{n-i-1}{2}$ для парних значень i і $l = \frac{n-i}{2}$ для непарних значень i . Якщо ж значення n парне, то $l = \frac{n-i}{2}$ для парних значень i і $l = \frac{n-i-1}{2}$ для непарних значень i .

Враховуючи вищевказане, вираз (4) набуває вигляду:

$$k = \frac{\sum_{i=0}^r c_{2i} \sum_{k=0}^r d_{2k} \omega^{2(k+i)} + \sum_{i=0}^l c_{2i+1} \sum_{k=0}^l d_{2k+1} \omega^{2(k+i+1)}}{\sum_{i=0}^n d_i^2 \omega^{2i} + \sum_{i=0}^{n-2} d_i \sum_{k=1}^l d_{2k+i} \omega^{2(k+i)}}. \quad (5)$$

Значення частоти ω , що відповідають граничним значенням k , визначаються із рівняння $L_2(\omega)H_1(\omega) - L_1(\omega)H_2(\omega) = 0$, яке, з врахуванням (3), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=0}^l c_{2i+1} \sum_{k=0}^r d_{2k} \omega^{2(k+i)+1} + \sum_{i=0}^r c_{2i} \sum_{k=0}^l d_{2k+1} \omega^{2(k+i)+1} = 0, \quad (6)$$

де $r = \frac{n-1}{2}$ і $l = \frac{m-i}{2}$, якщо значення n непарне; $r = \frac{n}{2}$ і $l = \frac{m}{2} - 1$, якщо значення n парне. Крім того, перед добутком $c_{2i+1}d_{2k}$ ставиться знак "+", якщо $(k+l+1)$ непарне, і знак "-", якщо $(k+l+1)$ парне. Перед добутком $c_{2i}d_{2k+1}$ ставиться знак "+", якщо значення $(k+l+1)$ парне, і знак "-", якщо значення $(k+l+1)$ непарне.

Відрізок стійкості, що відповідає числу n коренів характеристичного рівняння, розташованих зліва від уявної осі (n – порядок системи), містить номінальне значення k_n , тобто $k' < k_n < k''$, де k' і k'' – граничні значення відрізка при номінальних значеннях інших параметрів. Тому, використовуючи вищенаведену нерівність, співвідношення (5) і рівняння (6), можна отримати границі відрізка стійкості параметра k лінійної неперервної системи без побудови границі D-розбиття.

Очевидно, що граничні значення параметра k' і k'' відрізка стійкості, які обчислюються за формулою (5) для конкретно заданого нелінійного параметра ν і для значень ω , що визначаються з рівняння (6), в площині параметрів ν і k є точками точної (з похибкою обчислень) границі області стійкості в цій площині (рис. 1).

Змінюючи значення параметра ν від $\nu_{\min}$ до $\nu_{\max}$ із заданим кроком $\Delta \nu$ і, аналогічно як і для номінального значення ν_n , з використанням рівняння (6) і формули (5), отримуємо сукупність граничних точок відрізків стійкості параметра k , які в площині параметрів ν і k , сумісно із відповідними значеннями $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$, визначають точну границю області стійкості (рис. 1).

Використовуючи цей підхід, можна отримати область стійкості в площині параметра k , що лінійно, і іншого параметра μ , що нелінійно входить в коефіцієнти характеристичного рівняння.

По цих областях можна визначити область в просторі трьох параметрів k , ν і μ , в якій всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини. Змінюючи інші параметри системи, можна виділити область стійкості в просторі параметрів k , ν і μ при деякій невизначеності інших параметрів.

Для визначення границі області стійкості в площині двох параметрів, що

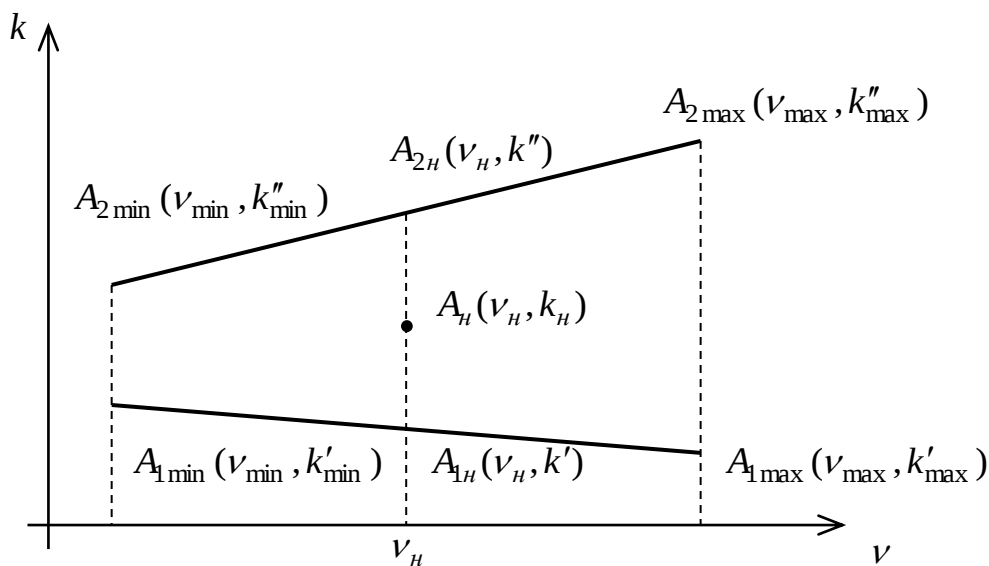


Рис. 1. Границя області стійкості в площині параметрів ν і k

нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння, необхідно для заданих значень $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$ одного із параметрів обчислити відповідні їм значення параметра μ . Для цього необхідно відповідну кількість разів розв'язати відносно ω і μ таку систему трансцендентних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\sum_{i=0}^r c_{2i} \sum_{k=0}^r d_{2k} \omega^{2(k+i)} + \sum_{i=0}^l c_{2i+1} \sum_{k=0}^l d_{2k+1} \omega^{2(k+i+1)}}{\sum_{i=0}^n d_i \omega^{2i} + \sum_{i=0}^{n-2} d_i \sum_{k=1}^l d_{2k+i} \omega^{2(k+i)}} \\ \sum_{i=0}^l c_{2i+1} \sum_{k=0}^r d_{2k} \omega^{2(k+i)+1} + \sum_{i=0}^r c_{2i} \sum_{k=0}^l d_{2k+1} \omega^{2(k+i)+1} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Отримані в результаті розв'язку системи (7) значення нелінійного параметра μ , сумісно із відповідними їм значеннями параметра ν , визначають границю області стійкості в площині параметрів $[\nu, \mu]$.

Для знаходження розв'язку системи рівнянь звичайно використовується чисельний метод ітерацій. При цьому виникає питання вибору початкових наближень. Задача вибору початкових наближень практично складна і в кожному випадку вимагає індивідуального підходу. Успіх не гарантується навіть тоді, коли розв'язок системи існує, тим більше, що наперед може бути невідомо про існування розв'язку.

Для побудови ОС в площині параметрів, що нелінійно входять в коефіцієнт характеристичного рівняння, можна використати запропонований вище підхід, розв'язуючи обернену задачу. Очевидно, що сукупність значень нелінійних параметрів ν_i, μ_i , які відповідають одному і тому ж значенню лінійного параметра k , отриманого з рівнянь (5) і (7), визначає точки границі області стійкості в площині цих параметрів. Визначення границі області стійкості в площині параметрів ν і μ для заданого значення k_3 починаємо з визначення за допомогою вищеописаного підходу початкового значення μ_0 границі ОС при $\nu_0 = \nu_{\min}$. Далі, для наступного значення $\nu = \nu_0 + \Delta \nu$ ГОС, шляхом перебору параметра μ із змінним кроком $\Delta \mu$ визначаємо таке значення μ , при якому має місце нерівність $|k_3 - k| \leq \Delta k$, де Δk – наперед задане значення точності побудови ГОС. Напрямок перебору визначається характером зміни параметра k границі області стійкості при зміні параметра μ . Таким чином, на відміну від відомих чисельних методів, виключається перебір точок по одному з параметрів, що зменшує кількість точок перебору, і відсутня процедура визначення стійкості або нестійкості системи, що скорочує час визначення границі області стійкості.

Приклад. Для ілюстрації можливості практичного застосування запропонованого підходу розглянемо побудову границі області стійкості замкнутої динамічної системи, передаточна функція якої в розімкнутому стані має вигляд

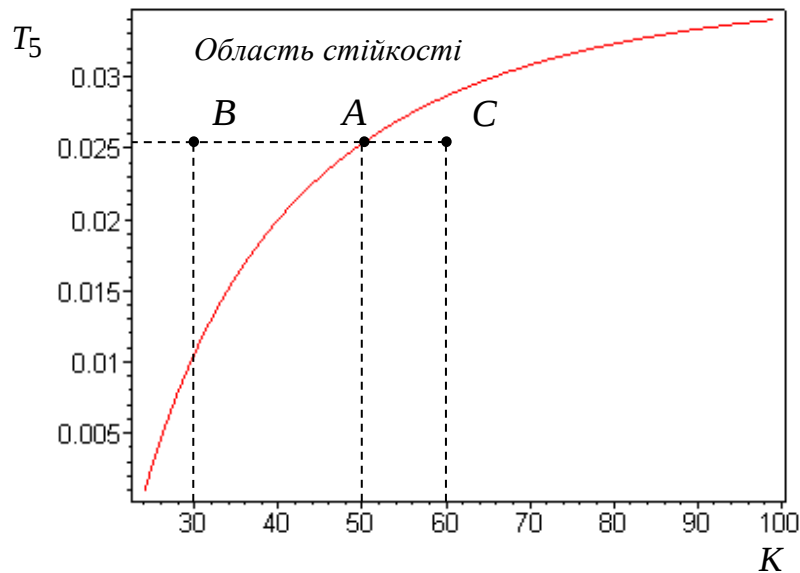
$$W(s) = K \frac{(T_4 s + 1)(T_5 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

де $T_1 = 1c, T_2 = 0,2c, T_3 = 0,1c, T_4 = 0,01c, T_5 = 0,005 \div 0,04c, K = 10 \div 90 \partial B$.

Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$0,02s^3 + (0,32 + 0,01KT_5)s^2 + [1,3 + K(T_5 + 0,01)]s + K + 1 = 0.$$

На рис.2 зображена побудована запропонованим підходом область стійкості даної системи в площині параметрів T_5 і K .

Рис. 2. Границя області стійкості в площині параметрів T_5 і K

В контрольних точках A ($T_5 = 0,02532354729с$, $K = 50дБ$), B ($T_5 = 0,02532354729с$, $K = 30дБ$) і C ($T_5 = 0,02532354729с$, $K = 60дБ$) корені характеристичного рівняння відповідно рівні:

$$A: \begin{aligned} s_1 &= -16,632987836; \\ s_2 &= -,608187222 \times 10^{-5} - j12,381833373; \\ s_3 &= -,608187222 \times 10^{-5} + j12,381833373; \end{aligned}$$

$$B: \begin{aligned} s_1 &= -15,292618467; \\ s_2 &= -,543690766 - j10,052884633; \\ s_3 &= -,543690766 + j10,052884633; \end{aligned}$$

$$C: \begin{aligned} s_1 &= -17,156287098; \\ s_2 &= ,198393549 - j13,331842834; \\ s_3 &= ,198393549 + j13,331842834. \end{aligned}$$

На обчислення 400 точок границі області стійкості було затрачено близько 4 секунд.

Висновок. Наведені результати свідчать про можливість ефективного практичного застосування розглянутого підходу для визначення границі області стійкості лінійних неперервних систем в площині двох параметрів, один із яких входить лінійно, а другий – нелінійно в коефіцієнти характеристичного рівняння.

The problems of construction of stability regions of linear continuous systems in space of parameters which nonlinearly go into coefficients of a secular equation are considered. Due to usage of a D-partition and designed algorithm, the stability region of a real dynamic system is obtained.

Література

1. Неймарк Ю.Н. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИЛ, 1949.–140 с.
2. Петров Н.П., Поляк В.Т. Робастное Д- разбиение // АиТ, 1991, №5, с.41-53.
3. Гостев В.Н., Стеклов В.К. Системы автоматического управления с цифровым регулятором. – К.: Радиоаматор, 1998. – 704 с.
4. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. – Л, 1983.
5. Топчеев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г. Системы стабилизации. – М.: Машиностроение, 1974. – 248 с.
6. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования.–М.: Машиностроение, 1989.–751 с.

Одержано 02.02.04 р.