

УДК 536.2

Островський О. - ст.гр. КТ-41

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРОХОДЖЕННЯ СТРУМУ В КАБЕЛІ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Ostrovskiy O.

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF CURRENT FLOW IN THE CABLE

Supervisor: Shelestovskyi B.

Ключові слова: диференціальне рівняння, струм, граничні умови

Key words: differential equation, flow, boundary condition

Моделювання процесу приводить до інтегрування системи рівнянь

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = GV + C \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1)$$

де V та I потенціал і сила струму в момент часу t , у точці кабелю з абсцисою x ; R – опір; L – самоіндукція; C – ємність; G – провідність ізоляції на одиницю довжини кабелю.

Виключивши з рівнянь (1) невідому функцію I , отримаємо для визначення V рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (CK + LG) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV, \quad (2)$$

якщо позначити

$$LC = a^2, \quad CR + LG = 2h, \quad RG = b^2, \quad (3)$$

то рівняння (2) набуде вигляд

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0. \quad (4)$$

Граничні умови:

$$V(0, t) = E, \quad V(l, t) = 0. \quad (5)$$

Початкові умови:

$$V(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l. \quad (6)$$

Покладемо

$$V = v + F(x), \quad (7)$$

та визначимо $F(x)$ так, щоб вона задовольняла рівнянню (4) і наступним граничним умовам:

$$F(0, t) = E, \quad F(l, t) = 0. \quad (8)$$

тоді функція v буде задовольняти рівняння та граничні і початкові умови:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = 0, \quad (9)$$

$$v(0, t), \quad v(l, t) = 0, \quad (10)$$

$$v(x, 0) = -F(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Для знаходження функції E маємо рівняння

$$F'' - b^2 F = 0, \quad (12)$$

з якого, з врахуванням умов (8), отримаємо

$$F(x) = E \frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}} = E \frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}. \quad (13)$$

Функцію v знаходимо методом відокремлення змінних

$$v = \sum X(x) \cdot T(t). \quad (14)$$

Тоді

$$X(x) = C \cos mx + D \sin mx, \quad T(t) = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t}, \quad (15)$$

$$\alpha = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}, \quad \beta = -\frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2} \sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}.$$

Граничні умови дають:

$$C = 0, \quad D \sin ml = 0, \quad m = \frac{k\pi}{l}, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

Отже

$$X_k = D_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad T_k = A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t}, \quad (16)$$

$$\alpha_k = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2 l} \sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = -\mu + n_k, \quad (17)$$

$$\beta_k = -\frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2 l} \sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = -\mu - n_k.$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t}) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (18)$$

Задовольняючи початкові умови, отримаємо шукану функцію $v(x, t)$:

$$V = E \frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2E e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left[ch n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right] \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (19)$$