

Секція:

Математика та статистика

УДК 517.9

Горват М. – ст. гр. ЕТ-31

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ПРОВЕДЕННІ РОЗРАХУНКІВ НА ЖОРСТКІСТЬ

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Horvat M.

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WHEN CARRYING OUT STIFFNESS CALCULATIONS

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: чисельний метод, диференціальне рівняння, розрахунок на жорсткість.

Keywords: numerical method, differential equation, stiffness calculation

Розв'язування диференціальних рівнянь є ключовим для розуміння та моделювання складних систем у природі та техніці. Це дозволяє не тільки описувати, але й прогнозувати їх поведінку. Вибір методу відіграє критичне значення для точності моделювання реальних процесів. При цьому важливо враховувати тип рівняння, точність методу, чутливість до вихідних умов, можливості апроксимації та потреби валідації результатів.

Розглянемо застосування обчислювального середовища MATHCAD для побудови чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь на прикладі задачі про знаходження прогину консольної балки довжиною L , що навантажена на кінці зосередженою силою P (рис. 1).

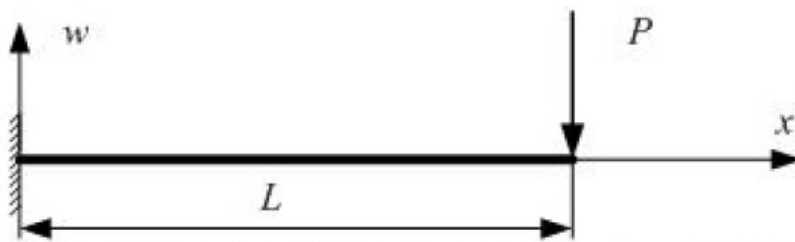


Рис. 1. Схема навантаження балки

Початок координат виберемо в точці закріплення балки. Тут переміщення w та кут повороту балки $\theta = w'$ рівні нулю. Диференціальне рівняння пружної лінії балки, як відомо, має вигляд $EIw''_{xx} = M(x)$, де EI – жорсткість перерізу балки, E – модуль пружності матеріалу балки, I – момент інерції перерізу балки відносно осі, $M(x)$ – функція згинального моменту від координати. Для вибраної системи координат $M(x) = -P(L - x)$. Ввівши функцію кута повороту $\theta(x)$ зведемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку до системи лінійних рівнянь першого.

$$\begin{cases} w'_x = \theta, \\ EI\theta'_x = -P(L-x). \end{cases} \quad (1)$$

Знайдемо її розв'язок із використанням чисельного методу Рунге-Кутти четвертого порядку в середовищі MATCAD та проведемо порівняння із відомим точним розв'язком

$$w = \frac{PL^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} - \frac{P(L-x)^3}{6EI}, \quad \theta = \frac{Px(x-2L)}{2EI}. \quad (2)$$

Код програми із реалізацією чисельного методу наведено на рис. 2.

```

Значення фізичних сталіх
L:=1 d:=0.1 l:=pi*d^4/64 E:=200*10^9 P:=10^4 M(x):=-P*(L-x)
Початкові умови w_0:=0 theta_0:=0
Права частина системи диференціальних рівнянь F(x,w,theta):=
  (theta, M(x)/(E*l))
Розбиття x_0:=0 x_1:=L N:=10 h:=(x_1-x_0)/N i:=0..N x_i:=i*h
Метод Рунге-Кутти 4-го порядку:
F2(x,w,theta,h):=F(x+h/2,w+h/2*F(x,w,theta)_0,theta+h/2*F(x,w,theta)_1)
F3(x,w,theta,h):=F(x+h/2,w+h/2*F2(x,w,theta,h)_0,theta+h/2*F2(x,w,theta,h)_1)
F4(x,w,theta,h):=F(x+h/2,w+h/2*F3(x,w,theta,h)_0,theta+h/2*F3(x,w,theta,h)_1)
RK_i:=
  (w_0, theta_0) if i=0
  RK_{i-1} + h*[F[x_{i-1},(RK_{i-1})_0,(RK_{i-1})_1] + 2F2[x_{i-1},(RK_{i-1})_0,(RK_{i-1})_1,h] + 2F3[x_{i-1},(RK_{i-1})_0,(RK_{i-1})_1,h] + F4[x_{i-1},(RK_{i-1})_0,(RK_{i-1})_1,h]] otherwise
  
```

Рис.2. Вікно робочого середовища MATHCAD

На рис. 3 для порівняння наведено графіки побудованого наближеного розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) – пунктирна крива та відомого точного розв'язку (2).

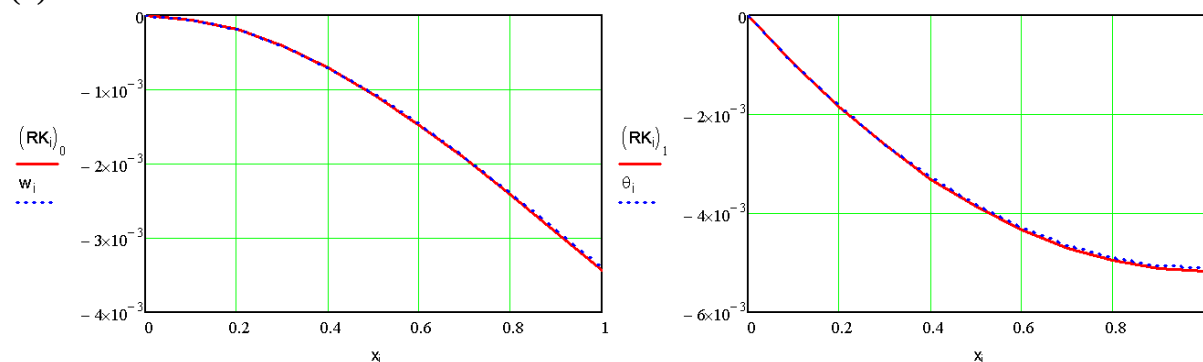


Рис.3. Порівняння побудованого наближено розв'язку із точним

Як видно із рисунків, розв'язок одержаний числовим методом Рунге-Кутти практично співпадає із точним розв'язком. Тому його можна використовувати для вирішення складніших інженерних задач, точний розв'язок яких не відомий.

Література

1. Габрусев Г. В. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник / Г. В. Габрусев, О. М. Самборська. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.
2. Самборська О. М. Числові методи: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. М. Самборська, Б. Г. Шелестовський. - Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140 с.