УДК 539.431

О.Ясній; Ю.Пиндус, канд.техн.наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИН ЗА ЗМІННОЇ АМПЛІТУДИ НАВАНТАЖЕННЯ В СПЛАВІ Д16ЧТ

На основі поєднання детерміністичного та ймовірнісного підходів запропоновано методику прогнозування росту втомної тріщини (РВТ) за випадкового змінного навантаження. РВТ моделюється методом лінійного підсумовування приросту тріщини за цикл з використанням детерміністичних моделей Уокера та NASGRO, параметри яких визначаються як випадкові змінні.

O.Yasniy; Yu.Pyndus

MODELLING OF FATIGUE CRACK GROWTH UNDER VARIABLE AMPLITUDE LOADING IN D16chT ALUMINUM ALLOY

On the basis of combination of deterministic and probabilistic approaches the technique of fatigue crack growth propagation (FCG) under variable amplitude loading in D16chT aluminum alloy is offered. FCG is propagated by mean of cycle-by-cycle linear calculation using Walker and NASGRO models. Parameters of these models were taken into account as random variables.

Вступ

Більшість тримких елементів конструкцій за час їхньої експлуатації піддаються дії випадкових експлуатаційних навантажень змінної амплітуди. Методи аналітичної оцінки надійності та живучості елементів конструкцій, зокрема, їх імовірнісний аналіз, часто застосовуються у випадках коли є мало випробувань або взагалі відсутні повномасштабні випробування; при масовому виробництві деталей, коли затрати на гарантійне обслуговування є обмеженими або неприйнятними; у випадках масового виробництва, коли незначні зміни у технології виробництва призводять до значної економії коштів.

Для оцінки втомної довговічності та прогнозування росту втомної тріщини (РВТ) необхідно враховувати ймовірнісний розкид параметрів навантаження та властивостей матеріалу, що є досить складною задачею. Для детерміністичного опису швидкості втомної тріщини відомо багато різних підходів. В переважній більшості моделей швидкість РВТ є функцією від коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) [1-5].

За останні 30 років запропоновано багато моделей, які описують швидкість РВТ, наприклад [1,2]. Ці моделі переважно ґрунтуються на підходах лінійної механіки руйнування і їх можна записати у загальній формі

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, K_{\max}, R, \sigma_{\max}, a), \tag{1}$$

де $f(\Delta K, K_{max}, R, \sigma_{max}, a)$ - невід'ємна функція; N – кількість циклів навантаження; a – довжина тріщини як функція від N; $\Delta K=K_{max}-K_{min}$ – розмах КІН; K_{min}, K_{max} – мінімальний і максимальний КІН; $R=K_{min}/K_{max}$ - коефіцієнт асиметрії циклу навантаження; σ_{max} – максимальне напруження.

Для прогнозування швидкості росту втомної тріщини на середньоамплітудній ділянці кінетичної діаграми втомного руйнування (КДВР) найбільш використовуваним є рівняння Періса-Ердогана [2]

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n, \tag{2}$$

та рівняння Уокера [3], яке враховує асиметрію циклу навантаження

$$\frac{da}{dN} = C\frac{1}{(1-R)^{(1-m)n}}\Delta K^{n} \qquad (3)$$

де C, m і n – сталі, визначені з експерименту.

Недоліком моделі Уокера є те, що вона не враховує низькоамплітудну та високоамплітудні ділянки діаграми втомного руйнування (ДВР). Для прогнозування РВТ за змінного навантаження широкого застосування набула модель Формана [5]

$$\frac{da}{dN} = \left(C\Delta K^{n}\right)/\left[(1-R)(K_{fc}-K_{\max})\right] \qquad (4)$$

котра задовільно описує середньоамплітудну та високоамплітудну ділянки ДВР.

Для опису всіх ділянок ДВР широко використовується модель NASGRO, яка записується у вигляді рівняння [6]:

$$\frac{da}{dN} = C_1\left[\Delta K_{eff}\right]^{n_1}\frac{\left[1-\dfrac{\Delta K_{th}}{\Delta K_{eff}}\right]^{p}}{\left[1-\dfrac{K_{\max}}{K_{Jc}}\right]^{q}}, \qquad (5)$$

де C_1, n_1, m, p, q – сталі, які визначаються з експерименту; K_{Jc} – критичний КІН за статичного навантаження, який визначають через критичний J_{Ic}-інтеграл; K_{fc} – в'язкість руйнування при циклічному навантаженні; ΔK_{th} – пороговий КІН; $\Delta K_{eff}=K_{max}-K_{op}$ – ефективний розмах КІН; K_{op}- КІН розкриття тріщини.

Слід зауважити, що всі описані вище моделі є детермінованими і не відображають фізичної суті процесів, які відбуваються у вістрі втомної тріщини при поширенні тріщин. Крім того, експериментально визначені сталі у цих залежностях можуть змінюватись у залежності від багатьох випадкових факторів – атмосферних умов випробувань, розкиду параметрів прикладеного навантаження, термомеханічної обробки, виплавки, допустимого розкиду компонентів хімічної композиції тощо. Очевидно, що для адекватної оцінки РВТ треба враховувати випадковий розкид детерміністичних параметрів, що описують РВТ. Зокрема, для врахування статистичного розкиду швидкості РВТ, Yang запропонував рівняння у наступному вигляді [7]

$$\frac{da}{dt} = X(t)f(\Delta K, K_{\max}, R, \sigma, a), \qquad (6)$$

де додатковий множник $X(t)$ - невід'ємний стаціонарний процес із середнім рівним одиниці. Таким чином, детермінована функція $f(\Delta K, K_{max}, R, \sigma, a)$ описує середню швидкість РВТ, а випадковий процес $X(t)$ враховує її статистичний розкид.

Стохастична модель РВТ, яка отримується при розв'язанні рівняння Фокера-Планка, що відповідає Марківському процесу для віднайдення статистичних параметрів росту тріщини запропонована Lin [8,9]. Теорія Марківських ланцюгів для аналізу проблем зародження та росту тріщин була застосована в [10]. Були також запропоновані декілька моделей росту тріщини, які містять у собі дискретні та випадкові процеси [11]. Слід відзначити працю [12], де була застосована апроксимація другого порядку для опису стохастичного росту тріщини.

Проте, незважаючи на значну кількість наукових праць у даному напрямку, актуальною є задача комплексного поєднання ймовірнісного та детерміністичного підходів для оцінки РВТ.

Методика експериментальних досліджень

Швидкість РВТ досліджували на електрогідравлічній машині СТМ-100 на плоских прямокутних зразках з центральною тріщиною, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16чТ. Умовна границя текучості за кімнатної температури $\sigma_{0.2}$ = 300 МПа, границя міцності σ_B= 430 МПа. Конструкція зразків розроблена згідно з ГОСТ 25.506-85 [13]. Товщина пластини b = 4 *мм*, ширина W = 100 *мм*, діаметр центрального отвору – 5 *мм*. Детально методика дослідження циклічної тріщиностійкості описана в [14].

Коефіцієнт інтенсивності напруження обчислювали за формулою [16]

$$K_{max} = \sigma_{max}\sqrt{\pi l} \times Y, \tag{7}$$

$$Y = \left[1 - 0{,}025\left(\frac{l}{W/2}\right)^2 + 0{,}06\left(\frac{l}{W/2}\right)^4\right]\sqrt{\sec\frac{\pi l}{W}} \tag{8}$$

де Y - поправочна функція; $l=a/2$ – половина довжини тріщини; W – ширина зразка.

Швидкість РВТ за сталої амплітуди навантаження

Експериментальні залежності швидкості РВТ в сплаві Д16чТ від розмаху КІН за різної асиметрії циклу навантаження взяті з праці [14].

Для апроксимації експериментальних даних використовували модель Уокера (3) та модель NASGRO (5). На рис 1а). подано експериментальні та розрахункові залежності швидкості РВТ від розмаху ΔK, обчислені за моделлю Уокера.

Відомо, що в ефективних координатах швидкість росту втомної тріщини не залежить від коефіцієнта асиметрії циклу навантаження. Ефективні КІН з урахуванням асиметрії циклу навантаження обчислювали за формулою $\Delta K_{eff} = U\Delta K$. Для сплаву Д16чТ величину U обчислювали за формулою Елбера для сплаву 2024-Т3, який є аналогом Д16чТ [15].

$$U = 0{,}5 + 0{,}4R - 0{,}1R^2, \tag{9}$$

Вказане рівняння справедливе для діапазону -0,1<R<0,7

Діаграма втомного руйнування сплаву Д16чТ в ефективних координатах зображена на рис. 1б). Рівняння (9) задовільно описує експериментальні дані на середньоамплітудній і високоамплітудній ділянках діаграми, за винятком даних при R=0,7. Проте швидкість РВТ на припороговій ділянці в ефективних координатах не є інваріантною до асиметрії циклу навантаження. Дані по швидкості РВТ при різних асиметріях циклу навантаження були апроксимовані рівнянням NASGRO (5) з урахуванням (9).

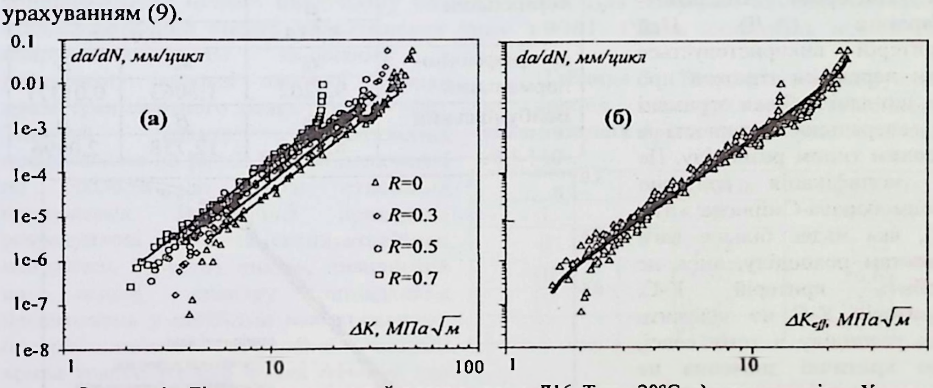

Рисунок 1 - Діаграми втомного руйнування сплаву Д16чТ при 20°С: а) апроксимація за Уокером, б) апроксимація за NASGRO.

Статистичний опис розкиду властивостей матеріалу

Для того, щоб побудувати функції розподілу параметра C, використовували наступну схему. Випадковим чином за допомогою генератора псевдовипадкових чисел вибирали число k, $5 \le k \le 20$, k належить множині натуральних чисел. Далі випадковим чином вибирали із середньоамплітудної ділянки ДВР k точок. Параметр n рівняння (2) фіксували. Його значення n=3,578 визначили методом найменших квадратів для точок, котрі входять у середньоамплітудну ділянку кінетичної діаграми втомного руйнування сплаву Д16чТ при R=0. Для фіксованого значення n по k точках, методом найменших квадратів визначали значення С. Описану процедуру повторювали 100 разів. У результаті отриманий масив значень використовували як вхід програми для оцінки значень найбільш поширених типів розподілів.

На рис 2. представлено кумулятивні функції розподілу коефіцієнта lg$C$ рівняння Періса (2) для сплаву Д16чТ. Для врахування розкиду властивостей матеріалу параметр C рівняння (2) розглядався як випадкова змінна.

Для опису параметра lg$C$ сплаву Д16чТ використовувалися функції розподілу:

нормальну

$$F(\lg C)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lg C}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x_0}{\sigma}\right)^2\right)dz \qquad (10)$$

логарифмічно-нормальну

$$F(\lg C)=\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{\lg C-x_0}{m}\right)}{\sigma}\right) \qquad (11)$$

та Вейбулівську

$$F(\lg C)=1-\exp\left[-\left(\frac{\lg C-x_0}{\eta}\right)^{\beta}\right], \qquad (12)$$

де Φ – нормальна функція розподілу із середнім рівним 0 і стандартним відхиленням рівним 1.

Параметри розподілу lg$C$, отримані внаслідок розрахунків, представлені в табл.1.

Припущення щодо типів розподілу перевіряли за критерієм Андерсона-Дарлінга (А-Д). Цей критерій використовується для перевірки гіпотези про те, що дані вибірки отримані із генеральної сукупності із певним типом розподілу. Це є модифікація критерію Колмогорова-Смірнова (К-С), яка надає більше ваги хвостам розподілу, аніж це робить критерій К-С. Критерій К-С не залежить від розподілу в тому сенсі, що критичні значення не залежать від конкретного розподілу, гіпотеза про який перевіряється. У А-Д критерії для конкретного розподілу обчислюються свої критичне значення. Перевагою цього є

Таблиця 1 - Параметри функцій розподілу lg$C$

Тип розподілу	Параметри розподілу		
нормальний	μ	σ	
	8,014	0,0179	
логарифмічно-нормальний	x_0	m	σ
	9,3202	1,3063	0,01371
Вейбулівський	x_0	β	η
	8,2165	12,758	2,0996

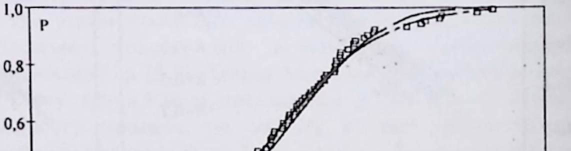

Рисунок 2 - Кумулятивні функції розподілу lg C на середньоамплітудній ділянці КДВР сплаву Д16чТ при R=0, n=3,578.

можливість більш чутливого тестування, а недоліком той факт, що критичні значення потрібно обчислювати для кожного розподілу.

Критерій А-Д є альтернативою критеріям χ^2 та К-С.

Статистичне значення критерію Андерсона-Дарлінга визначається за формулою

$$AD = -M - \sum_{i=1}^{M} \frac{2i-1}{M} \{\ln(F_0[z_{(i)}]) + \ln(1 - F_0[z_{(M-i+1)}])\}. \quad (13)$$

де F_0 - кумулятивна функція розподілу, що тестується, із відповідними параметрами; $z_{(i)}$ – i-те сортоване, стандартизоване значення вибірки; M - кількість елементів вибірки. Зокрема, для нормального розподілу стандартизація здійснюється наступним чином

$$z_{(i)} = \frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}, \quad (14)$$

Гіпотеза щодо розподілу із вказаними параметрами відкидається при певному рівні значущості α (зазвичай α=0.05) для вибірки розміру M, якщо статистичне значення А-Д критерія більше, аніж критичне значення (CV), тобто AD>CV. Критичні значення також залежать від рівня значущості α.

А-Д критерій виконується для усіх трьох функцій розподілу. Статистичні та критичні значення А-Д критерію подані в табл. 2.

Як випливає з рис. 2, дані функції досить добре описують експериментальні дані. Для подальшого моделювання використовували трьохпараметричну Вейбулівську функцію розподілу. Параметр місцезнаходження цієї функції дає змогу уникнути генерації значень, що відповідає фізичній суті випадкової змінної lg$C$.

Таблиця 2 - Статистичні та критичні значення критерія А-Д

Тип розподілу	AD	CV
нормальний	0,4256	0,754
логарифмічно-нормальний	0,4801	0,754
Вейбулівський	0,5093	0,757

Моделювання спектру навантаження

Пластини з шириною робочої ділянки 100 мм і товщиною 4 мм із центральною тріщиною були піддані циклічному навантаженню. Для симуляції використовувався стандартизований спектр навантаження типу TWIST. Рівень напружень відповідав напруженням, які виникають в кореневому перерізі нижньої кромки крила транспортного літака типу АН-140. Типовий спектр навантаження представлено на рис.3. При моделюванні не бралися до уваги стискаючі напруження. В табл.3 приведено розрахункові значення експлуатаційних напружень (брутто) циклів, визначених на основі спектру випадкових навантажень у найбільш навантаженому перерізі нижньої кореневої частини крила транспортного літака АН-140, що виникають внаслідок турбулентності атмосфери при крейсерському польоті.

Таблиця 3 - Розрахункові напруження циклів спектру експлуатаційного навантаження крила транспортного літака АН-140

	σ_{max}, МПа	σ_{min}, МПа
I	161,20	-14.05(0)
II	145,42	1,43
III	120,47	26,68
IV	103,55	43,31
V	91,79	55,36

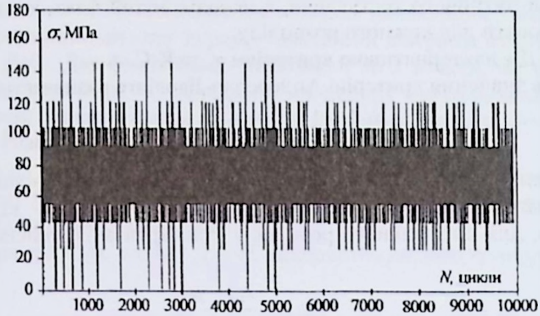

Рисунок 3 - Фрагмент випадкової послідовності навантаження крила транспортного літака.

Імовірніснe моделювання росту втомних тріщин

Для імовірнісного прогнозування росту втомної тріщини використовували рівняння Уокера (3) та рівняння NASGRO (5). Коефіцієнти вказаних рівнянь для сплаву Д16чТ представлені в табл.4.

Коефіцієнти C та C_1 рівнянь (3) та (5) розглядалися як випадкові змінні. Отримані за допомогою методу Левенберга-Марквардта значення параметрів розподілів lg C закладалися в програму обчислення росту втомної тріщини. Для імовірнісного обчислення кінцевої довжини тріщини за блок навантажень проводили 100 випадкових симуляцій росту втомної тріщини. В i-тій симуляції генерувалося випадкове число p_i ($0 \le p_i < 1$, $i = 1,2,...,100$), по якому обчислювалися значення C_i за формулою $C_i = 10^{F^{-1}(p_i)}$, де $F^{-1}(p_i)$ – обернена функція до *F(lgC)*. Отримане значення C_i закладали в рівняння (3). Аналогічну процедуру здійснювали і тоді, коли моделювали ріст тріщини за рівнянням (5).

Таблиця 4 - Коефіцієнти рівнянь Уокера (3) та NASGRO (5)

n	n_1	p	q
3,578	3,7627	0,25	0,25

Навантаження вибиралося випадковим чином із стандартизованого спектру навантаження типу TWIST. В результаті відпрацювання заданої кількості циклів навантаження на виході програми отримували текстовий файл із значеннями кінцевої довжини тріщини. Далі значення кінцевої довжини тріщини описувалися різними типами розподілів. На рис. 8 та 9 зображені залежності довжини тріщин від кількості циклів навантаження. Як видно із цих рисунків, при моделювання як за рівнянням Уокера (3), так і за рівнянням NASGRO (5) отримуються приблизно однакові результати.

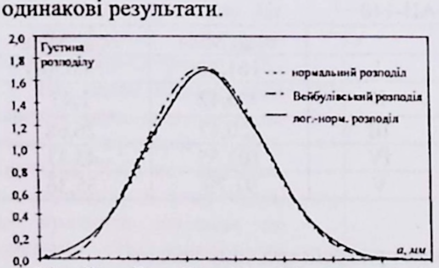

Рисунок 4 - Густини розподілів кінцевих довжин тріщин, моделювання за Уокером.

Рисунок 5 - Кумулятивні функції розподілу кінцевих довжин тріщин, моделювання за Уокером.

Функції густин розподілів та кумулятивні функції розподілів при моделюванні за Уокером представлені на рис 4. та 5. Як видно із рис. 4, густини розподілу є майже симетричні. Максимальне значення функцій густин розподілу (мода), досягається при a=20,7 *мм* і вона співпадає із медіаною, тобто, значенням, на якому кумулятивна функція розподілу досягає значення 0,5. Випадкова змінна визначається як функціонал із імовірнісного простору (простору випадкових подій) на якийсь n-вимірний простір (зазвичай на простір дійсних чисел). Цей n-вимірний простір є простором можливих значень змінної, які є часто нічим іншим, як дійсними числами. Це мається на увазі далі, якщо не вказане щось інше.

Випадкова змінна повністю описується густиною ймовірності або кумулятивною функцією розподілу. Функцією густини імовірності $f(x)$ випадкової змінної X є неперервна функція, що задовольняє умови:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) \ge 0, \forall x \in R$$

для двох дійсних чисел a і b, де $a \le b$.

Таким чином, імовірність, що випадкова змінна X приймає значення з інтервалу $[a, b]$ є площа під функцією густини від a до b.

Кумулятивна функція $F(x)$ є функцією випадкової змінної X, і визначається для x як

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (15)$$

Тобто, для заданої величини x, $F(x)$ є ймовірність того, що значення X буде менше чи рівне за x. Наприклад, для величини a=20,6 мм ймовірність того, що довжина тріщини буде менша чи рівна за 20,6 мм становить приблизно 0,35. Ймовірність того, що розмір тріщини перевищить значення 21,1 дорівнює 0,08.

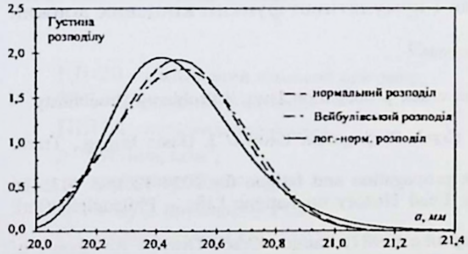

Рисунок 6 - Густини розподілів кінцевих довжин тріщин, моделювання за NASGRO.

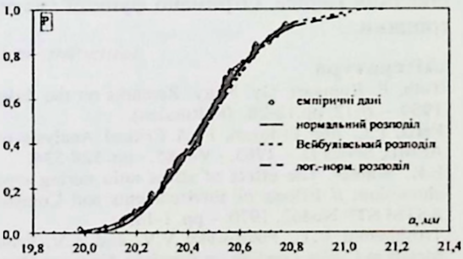

Рисунок 7 - Кумулятивні функції розподілу кінцевих довжин тріщин, моделювання за NASGRO.

При використанні моделі NASGRO отримали густини розподілів та кумулятивні функції, зображені на рис. 6. та 7. Функції густини розподілу, отримані при моделюванні РВТ за NASGRO, володіють незначною асиметрією, а, отже, середнє значення не збігається із модою і медіаною. Мода у випадку Вейбулівської функції розподілу досягається в точці a=20,48 мм.

Кумулятивні функції розподілу, отримані за рівнянням NASGRO, зміщені вліво відносно кумулятивних функцій розподілу, котрі побудовані моделюванням за Уокером приблизно на 0.2 мм. Загалом, ці функції розподілу виглядають майже однаковими. Це свідчить про те, що моделювання за Уокером співпадає із моделюванням за NASGRO через те, що модельовані напруження відповідали середньоамплітудній ділянці ДВР.

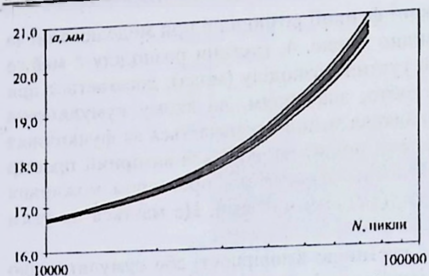

Рисунок 8 - Залежність довжини тріщини від кількості циклів навантажування, розрахунок за моделлю Уокера, a_0=16 мм.

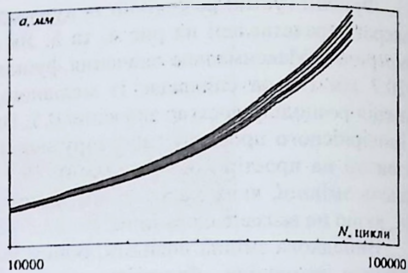

Рисунок 9 - Залежність довжини тріщини від кількості циклів навантажування, розрахунок за моделлю NASGRO, a_0=16 мм.

Розкид кінцевої довжини тріщини, отриманий за моделлю Уокера, лежить в межах від 20,40 мм до 20,98 мм, що дорівнює відповідно ймовірностям 11,6% та 89%. Як видно із рис. 9, розкид кінцевої довжини тріщини при моделюванні за NASGRO міститься в діапазоні від 20,31 мм до 20,94 мм, це відповідає ймовірностям 21% та 95%.

Висновки

1. Побудовано кумулятивні функції розподілу характеристик циклічної тріщиностійкості (параметра lgC рівняння Періса) алюмінієвого сплаву Д16чТ у припущенні нормального, логарифмічно-нормального та Вейбулівського законів розподілу.
2. Базуючись на моделі Уокера та NASGRO, розроблено методику моделювання росту втомної тріщини при випадковому навантаженні з урахуванням статистичного розкиду характеристик механічних властивостей.
3. Промодельовано ріст втомних тріщин в пластині з центральним отвором із сплаву Д16чТ при випадковому навантаженні з урахуванням розкиду параметра C рівняння Періса. Отримано функції густини і кумулятивні функції кінцевих довжин тріщини.

Література

1. Toth, P. Romvari, Gy. Nagy. Remarks on the fatigue crack propagation laws // Problemy Prochnosty. – 1980. – №12, pp.18-28. (in Russian).
2. Paris, P.C. and Erdogan, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws // J. Basic Engng., Trans. ASME, Series D. – 1963. - Vol.85. - pp. 528-534.
3. E.K. Walker. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminium // Effects of Environments and Complex Load History on Fatigue Life. – Philadelphia(Pa): ASTM STP No462, 1970. – pp. 1-14.
4. Troshhenko V.T., Pokrowsky V.V. and A.V. Prokopenko (1987) Fatigue Crack Growth Resistance of Metals at Cyclic Loading (in Russian). Naukova Dumka, Kiev.
5. R.G. Forman, V.E. Kearney, R.M. Engle. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures // Basis. Eng. Trans. ASME D 89, 1967. – P.459
6. Fatigue crack growth computer program 'NASGRO' version 3.0 – Reference Manual. NASA Technical Report JSC-22267B, 2001. Available from: www.nasgro.swri.org
7. Yang J.N., Salivar G.C., and Annis C.G. Jr., Statistics of Crack Growth in Engine Materials – Volume I: Constant Amplitude Fatigue Crack Growth at Elevated Temperatures, Materials Laboratory, Air Force Wright Aueronautical Laboratories, Technical Report AFWAL-TR-82-4040 (1982)
8. Lin YK, Yang JN. On statistical moments of fatigue crack propagation. // Engineering Fracture Mechanics 1983. – № 18. p.243-262.
9. Lin YK, Yang JN. A stochastic theory of fatigue crack propagation. // AIAA J 1985.- № 23.-p.117-124.
10. Bogdanoff JL, Kozin F. Probabilistic models of cumulative damage. New York: Wiley; 1985.
11. Sobczyk K, Spencer BF. Random fatigue: from data to theory. Boston: Academic Press; 1992.
12. Yang JN, Manning SD. A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis// Engineering Fracture Mechanics. 1996.№ 53 p. 677-686.
13. ГОСТ 25.506-85
14. Пиндус Ю. І. Вплив асиметрії циклу навантаження на циклічну тріщиностійкість алюмінієвого сплаву Д16чТ // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2001.-Т.6, - №3. - С. 18 - 22.
15. Mechanics of Fatigue Crack Closure. (1988) Edited by J.C. Newman and W. Elber, ASTM STP 982.
16. ASTM, Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates. In: 1992 Annual Book of ASTM Standards, E647-00, Vol 03.01, W. Conshohocken, PA, 674-701.

Одержано 21.01.2007 р.