

Висновки

Отримані результати можна застосовувати при побудові зображень тривимірних об'єктів, коли приймач розташований на невеликій відстані від об'єкта, що не дає можливості використовувати ортогональне проєктування, зокрема, при відновленні форми тривимірного об'єкта за напівтонами і в системах розпізнавання зображень. Зображення, побудовані на основі цієї моделі, є більш реальними, оскільки враховано залежність освітленості від відстані.

Література

1. Frank Losasso. Surface Reflection Models, Proceedings of European Conference on Computer Vision (ECCV 2001), Copenhagen, 27 May - 2 June 2002. – P. 754 – 761.
2. Jiahua Wu. Rotation Invariant Classification of 3D Surface Texture Using Photometric Stereo. Edinburg, Heriot-Watt University, 2003. – 256 p.
3. Бертольд Хорн. Определение формы по данным о полутонах. Психология машинного зрения / под ред. П. Уинстона, М.: Мир, 1978. – 344 с.
4. Ruo Zhang, Ping-Sing Tsai, James Edwin Cryer and Mubarak Shah. Shape from Shading: A Survey. Technical Report, Computer Vision Lab School of Computer Science University of Central Florida. 1999. – 41 p.
5. L. B. Wolff, S. K. Nayar and M. Oren. Improved Diffuse Reflection Models for Computer Vision// International Journal of Computer Vision, Vol 30, October 1998, – P. 55 – 71.
6. Forey, J., van Dam, A., Feiner, S., and Hughes, J. Computer Graphics, Principles and Practice. Addison-Wesley, Reading, MA. 1990. – 1175 p.
7. E. Prados, O. Faugeras "Perspective Shape from Shading" and Viscosity Solution. Nine IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2003), Nice, France, October 2003, 2-volume set, – P. 826 – 831.
8. У. Претт. Цифровая обработка изображений, М.: Мир, 1982. – 794 с.
9. Purdue University. Thermophysical Properties of Matter, vol. 7-8-9, 1970. – 320 p.

Одержано 14.05.2006 р.

УДК 517.52/524: 517.58/589

М.Ленюк¹, докт.фіз.-мат.наук; М.Шелестовська², канд.техн.наук

¹Чернівецький факультет Національного технічного університету
"Харківський політехнічний інститут"

²Тернопільський національний економічний університет

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННОГО ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ – ФУР'Є – (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЕДЄВА)

Методом порівняння розв'язку крайової задачі на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку – методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Фур'є – (Конторовича-Лєбєдєва), підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за системою власних елементів даного гібридного диференціального оператора.

M. Lenyuk; M. Shelestovska

SUMMARISING OF THE FUNCTIONAL SERIES BY THE METHOD OF FINATE HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE 2-ND LEVEL LEGENDRE – FURIER – (KONTOROVICH-LEBEDYEV) TYPE

Using the compasion method of solving the boundary task on the polar axis $r \geq R_0 > 0$ with two coupling points for the separate system of the modified differential Legendre, Furier and Bassel equations, built on one hand, by the Koshier function method, and, on the other hand, by the finite hybrid integral transformation of the Legendre-Furier – (Kontorovich-Lebedyev) type, the polyparametric family of the functional series according to the own elements system of the given hybrid differential operator, has been summarised.

Вступ. В сучасних довідниках [1-3] підсумовані функціональні ряди, загальні члени яких залежать від спеціальних функцій математичної фізики одного характеру: тригонометричних, функцій Бесселя, функцій Лежандра тощо. Розв'язування задач математичної фізики для неоднорідних середовищ (при моделюванні фізико-технічних характеристик за різними законами) вимагає підсумовувати функціональні ряди, в яких загальні члени є суперпозиціями спеціальних функцій математичної фізики різного характеру.

В даній статті здійснено підсумовування однієї сім'ї поліпараметричних функціональних рядів за суперпозицією спеціальних функцій Лежандра A_ν^μ та B_ν^μ , тригонометричних функцій і спеціальних функцій Бесселя C_α та D_α .

Побудуємо обмежений на множині

$$I_2^+ = \{r: r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty), R_0 > 0\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є і Бесселя для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} (\Lambda_\mu - q_1^2) u_1(r) &= -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1); \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2 \right) u_2(r) &= -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2); \\ (B_\alpha - q_3^2) u_3(r) &= -g_3(r), \quad r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0 \right) u_1(r) \Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [r^\mu u_3(r)] = 0 \quad (2)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j, k = 1, 2. \quad (3)$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Лежандра [4]

$$\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + c \frac{dr}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r} \quad \text{і Бесселя [5]}$$

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2; \quad \mu \geq 0, \quad 2\alpha + 1 \geq 0, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

$$\text{Умови на коефіцієнти:} \quad q_j > 0, \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0, \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, \quad j, k = 1, 2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu - q_1^2)u = 0$ утворюють прислані модифіковані функції Лежандра 1-го роду $P_{-\frac{1}{2}+q_1}^\mu(chr)$ і 2-го

роду $L_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu}(chr)$ [4], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$ утворюють функції $chqr$ та $shqr$ [6], а для рівняння Бесселя $(B_{\alpha} - q^2)v = 0$ - модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та 2-го роду $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функції Коші [6, 7]:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= A_1 P_{v_1}^{\mu}(chr) + B_1 L_{v_1}^{\mu}(chr) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r, \rho) g_1(\rho) sh\rho d\rho, \quad v_1 = -\frac{1}{2} + q_1, \\ u_2(r) &= A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r, \rho) g_2(\rho) d\rho, \\ u_3(r) &= B_3 K_{q_1, \alpha}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r, \rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $E_j(r, \rho)$ - функції Коші [6, 7]:

$$\begin{aligned} E_j(r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - E_j(r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} &= 0; \\ \frac{d}{dr} E_j(r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr} E_j(r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} &= -\frac{1}{\varphi_j(r)}; \\ \varphi_1(r) &= shr, \quad \varphi_2(r) = 1, \quad \varphi_3(r) = r^{2\alpha+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r, \rho) = \begin{cases} E_1^- \equiv C_1 P_{v_1}^{\mu}(chr) + D_1 L_{v_1}^{\mu}(chr), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ E_1^+ \equiv C_2 P_{v_1}^{\mu}(chr) + D_2 L_{v_1}^{\mu}(chr), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}.$$

Властивості (5) дають алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) P_{v_1}^{\mu}(chR_1) + (D_2 - D_1) L_{v_1}^{\mu}(chR_1) &= 0; \\ (C_2 - C_1) P_{v_1}^{\mu'}(chR_1) + (D_2 - D_1) L_{v_1}^{\mu'}(chR_1) &= -\frac{1}{sh^2 r}. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{\mu}(q_1) L_{v_1}^{\mu}(chR_1), \quad D_2 - D_1 = B_{\mu}(q_1) P_{v_1}^{\mu}(chR_1). \quad (6)$$

Доповнимо рівняннями:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0 \right) E_1^- \Big|_{r=R_0} &= 0: Z_{v_1,11}^{\mu,01}(chR_0) C_1 + Z_{v_1,11}^{\mu,02}(chR_0) D_1 = 0; \\ \left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1 \right) E_1^+ \Big|_{r=R_1} &= 0: Z_{v_1,11}^{\mu,11}(chR_1) C_2 + Z_{v_1,11}^{\mu,12}(chR_1) D_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Алгебраїчна система (7) внаслідок рівностей (6) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} Z_{v_1,11}^{\mu,01}(chR_0) C_1 + Z_{v_1,11}^{\mu,02}(chR_0) D_1 &= 0; \\ Z_{v_1,11}^{\mu,11}(chR_1) C_1 + Z_{v_1,11}^{\mu,12}(chR_1) D_1 &= B_{\mu}(q_1) F_{v_1,11}^{\mu,1}(chR_1, ch\rho). \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси знаходимо:

$$C_1 = -\frac{B_{\mu}(q_1) Z_{v_1,11}^{\mu,02}(chR_0)}{\Delta_{v_1,11}^{\mu}(chR_0, chR_1)} F_{v_1,11}^{\mu,1}(chR_1, ch\rho),$$

$$D_1 = \frac{B_\mu(q_1) Z_{\nu_1,11}^{\mu,01}(chR_0)}{\Delta_{\nu_1,11}^\mu(chR_0, chR_1)} F_{\nu_1,11}^{\mu,1}(chR_1, ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_1(r, \rho)$ визначена і в силу симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1(r, \rho) = \frac{B_\mu(q_1)}{\Delta_{\nu_1,11}^\mu(chR_0, chR_1)} \times \begin{cases} F_{\nu_1,11}^{\mu,0}(chR_0, chr) F_{\nu_1,11}^{\mu,1}(chR_1, ch\rho), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ F_{\nu_1,11}^{\mu,0}(chR_0, ch\rho) F_{\nu_1,11}^{\mu,1}(chR_1, chr), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \quad (9)$$

У рівностях (7)-(9) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} Z_{\nu_1,jk}^{\mu,m1}(chR_m) &= \alpha_{jk}^m shR_m P_{\nu_1}^{\mu'}(chR_m) + \beta_{jk}^m P_{\nu_1}^\mu(chR_m), \\ Z_{\nu_1,jk}^{\mu,m2}(chR_m) &= \alpha_{jk}^m shR_m L_{\nu_1}^{\mu'}(chR_m) + \beta_{jk}^m L_{\nu_1}^\mu(chR_m), \\ F_{\nu_1,jk}^{\mu,m}(chR_m, chr) &= Z_{\nu_1,jk}^{\mu,m1}(chR_m) L_{\nu_1}^\mu(chr) - Z_{\nu_1,jk}^{\mu,m2}(chR_m) P_{\nu_1}^\mu(chr), \\ \Delta_{\nu_1,j1}^\mu(chR_0, chR_1) &= Z_{\nu_1,11}^{\mu,01}(chR_0) Z_{\nu_1,j1}^{\mu,12}(chR_1) - \\ &- Z_{\nu_1,11}^{\mu,02}(chR_0) Z_{\nu_1,j1}^{\mu,11}(chR_1), \quad B_\mu(q_1) = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + q_1 - \mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + q_1 + \mu)}. \end{aligned}$$

Нехай функція Коші

$$E_2(r, \rho) = \begin{cases} E_2 \equiv C_1 chq_2 r + D_1 shq_2 r, & R_1 < r < \rho < R_2 \\ E_2 \equiv C_2 chq_2 r + D_2 shq_2 r, & R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) chq_2 \rho + (D_2 - D_1) shq_2 \rho &= 0; \\ (C_2 - C_1) shq_2 \rho + (D_2 - D_1) chq_2 \rho &= -q_2^{-1}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_2^{-1} shq_2 \rho, \quad D_2 - D_1 = -q_2^{-1} chq_2 \rho. \quad (10)$$

Доповнимо рівності (10) рівняннями:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{12}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^1 \right) E_2 \Big|_{r=R_1}^- &= 0 : V_{12}^{11}(q_2 R_1) C_1 + V_{12}^{12}(q_2 R_1) D_1 = 0; \\ \left(\alpha_{11}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^2 \right) E_2 \Big|_{r=R_2}^+ &= 0 : V_{11}^{21}(q_2 R_2) C_2 + V_{11}^{22}(q_2 R_2) D_2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Внаслідок співвідношень (10) система (11) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} V_{12}^{11}(q_2 R_1) C_1 + V_{12}^{12}(q_2 R_1) D_1 &= 0; \\ V_{11}^{21}(q_2 R_2) C_1 + V_{11}^{22}(q_2 R_2) D_1 &= q_2^{-1} \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho) \end{aligned}$$

Згідно з правилом Крамера маємо:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{V_{12}^{12}(q_2 R_1)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho), \\ D_1 &= \frac{V_{12}^{11}(q_2 R_1)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho). \end{aligned}$$

Цим функція Коші $E_2(r, \rho)$ визначена і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2(r, \rho) = -\frac{1}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \left\{ \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho), R_1 < r < \rho < R_2, \right. \\ \left. \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 \rho) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r), R_1 < \rho < r < R_2 \right\}. \quad (12)$$

У рівностях (11), (12) беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_2 R_m) = \alpha_{jk}^m q_2 sh q_2 R_m + \beta_{jk}^m ch q_2 R_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_2 R_m) = \alpha_{jk}^m q_2 ch q_2 R_m + \beta_{jk}^m sh q_2 R_m,$$

$$\Phi_{jk}^m(q_2 R_m, q_2 r) = V_{jk}^{m2}(q_2 R_m) ch q_2 r - V_{jk}^{m1}(q_2 R_m) sh q_2 r,$$

$$\Delta_{jk}(q_2 R_1, q_2 R_2) = V_{j2}^{11}(q_2 R_1) V_{k1}^{22}(q_2 R_2) - V_{j2}^{12}(q_2 R_1) V_{k1}^{21}(q_2 R_2).$$

Нехай функція Коші

$$E_3(r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_3 \equiv C_1 I_{q_3, \alpha}(\lambda r) + D_1 K_{q_3, \alpha}(\lambda r), & R_2 < r < \rho < \infty \\ \bar{E}_3^+ \equiv C_2 I_{q_3, \alpha}(\lambda r) + D_2 K_{q_3, \alpha}(\lambda r), & R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}.$$

Із умови обмеження при $r \rightarrow \infty$ випливає, що $C_2 = 0$.

Властивості (5) функції Коші дають:

$$-C_1 I_{q_3, \alpha}(\lambda \rho) + (D_2 - D_1) K_{q_3, \alpha}(\lambda \rho) = 0;$$

$$-C_1 I'_{q_3, \alpha}(\lambda \rho) + (D_2 - D_1) K'_{q_3, \alpha}(\lambda \rho) = -\frac{1}{\lambda \rho^{2\alpha+1}}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1 = \lambda^{2\alpha} K_{q_3, \alpha}(\lambda \rho), \quad D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha} I_{q_3, \alpha}(\lambda \rho). \quad (13)$$

Будемо вимагати, щоб

$$\left(\alpha_{12}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^2 \right) \bar{E}_3 \Big|_{r=R_2} \equiv U_{q_3, \alpha, 12}^{21}(\lambda R_2) C_1 + U_{q_3, \alpha, 12}^{22}(\lambda R_2) D_1 = 0. \quad (14)$$

Із рівностей (13), (14) знаходимо, що

$$D_2 = -\lambda^{2\alpha} \left(U_{q_3, \alpha, 12}^{22}(\lambda R_2) \right)^{-1} \Psi_{q_3, \alpha, 12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho).$$

Цим функція Коші $E_3(r, \rho)$ визначена і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_3(r, \rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{q_3, \alpha, 12}^{22}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3, \alpha}(\lambda \rho) \Psi_{q_3, \alpha, 12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r), & R_2 < r < \rho < \infty \\ K_{q_3, \alpha}(\lambda r) \Psi_{q_3, \alpha, 12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho), & R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}. \quad (15)$$

У рівностях (14), (15) беруть участь функції:

$$U_{q_3, \alpha, jk}^{m1}(\lambda R_m) = \left(\alpha_{jk}^m \frac{q_3 - \alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m \right) I_{q_3, \alpha}(\lambda R_m) + \alpha_{jk}^m \lambda^2 R_m I_{q_3+1, \alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$U_{q_3, \alpha, jk}^{m2}(\lambda R_m) = \left(\alpha_{jk}^m \frac{q_3 - \alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m \right) K_{q_3, \alpha}(\lambda R_m) - \alpha_{jk}^m \lambda^2 R_m K_{q_3+1, \alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$\Psi_{q_3, \alpha, jk}^{m*}(\lambda R_m, \lambda r) = U_{q_3, \alpha, jk}^{m1}(\lambda R_m) K_{q_3, \alpha}(\lambda r) - U_{q_3, \alpha, jk}^{m2}(\lambda R_m) I_{q_3, \alpha}(\lambda r).$$

Повернемось до формул (4). Умова в точці $r = R_0$ і умови спряження (3) для визначення величин A_j ($j = 1, 2$) та B_k ($k = 1, 3$) дають алгебраїчну систему:

$$Z_{\nu_1, 11}^{\mu, 01}(ch R_0) A_1 + Z_{\nu_1, 11}^{\mu, 02}(ch R_0) B_1 = g_0, \\ Z_{\nu_1, j1}^{\mu, 11}(ch R_1) A_1 + Z_{\nu_1, j1}^{\mu, 12}(ch R_1) B_1 - V_{j2}^{11}(q_2 R_1) A_2 - V_{j2}^{12}(q_2 R_1) B_2 = \\ = \delta_{j1} \omega_{11} + \delta_{j2} (\omega_{21} + G_{12}), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

$$V_{j1}^{21}(q_2 R_2) A_2 + V_{j1}^{22}(q_2 R_2) B_2 - U_{q_1, \alpha; j2}^{22}(\lambda R_2) B_3 = \delta_{j1} \omega_{12} + \delta_{j2} (\omega_{22} + G_{23}).$$

У системі (16) беруть участь функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{sh R_1} \int_{R_0}^{R_1} \frac{F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch \rho)}{\Delta_{v_1, 11}^{\mu}(ch R_0, ch R_1)} g_1(\rho) sh \rho d\rho + c_{21} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho)}{\Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} g_2(\rho) d\rho;$$

$$G_{23} = -c_{12} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 \rho)}{\Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} g_2(\rho) d\rho + \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}} \int_{R_1}^{\infty} \frac{K_{q_1, \alpha}(\lambda \rho)}{U_{q_1, \alpha; 12}^{22}(\lambda R_2)} g_3(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho$$

і символ Кронекера δ_{jk} .

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha; j}(q) = U_{q_1, \alpha; 22}^{22}(\lambda R_2) \Delta_{j1}(q_2 R_1, q_2 R_2) - U_{q_1, \alpha; 12}^{22}(\lambda R_2) \Delta_{j2}(q_2 R_1, q_2 R_2),$$

$$B_{\mu; j}(q) = \Delta_{v_1, 11}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) \Delta_{2j}(q_2 R_1, q_2 R_2) - \\ - \Delta_{v_1, 21}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) \Delta_{1j}(q_2 R_1, q_2 R_2), \quad j = 1, 2,$$

$$\Theta_{\mu; 1}(r, q) = \Delta_{v_1, 11}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) \Phi_{22}^1(q_2 R_1, q_2 r) - \Delta_{v_1, 21}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r),$$

$$\Theta_{\alpha; 2}(r, q) = U_{q_1, \alpha; 12}^{22}(\lambda R_2) \Phi_{21}^2(q_2 R_2, q_2 r) - U_{q_1, \alpha; 22}^{22}(\lambda R_2) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (16) відмінний від нуля

$$\Delta_{\mu, \alpha}(q) \equiv \Delta_{v_1, 11}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) A_{\alpha; 2}(q) - \Delta_{v_1, 21}^{\mu}(ch R_0, ch R_1) A_{\alpha; 1}(q) = \\ = U_{q_1, \alpha; 22}^{22}(\lambda R_2) B_{\mu; 1}(q) - U_{q_1, \alpha; 12}^{22}(\lambda R_2) B_{\mu; 2}(q) \neq 0. \quad (17)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\mu, \alpha; 11}(r, \rho, q) = \frac{B_{\mu}(q_1)}{\Delta_{\mu, \alpha}(q)} \left[F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch r) A_{\alpha; 2}(q) F_{v_1, 11}^{\mu, 1}(ch R_1, ch \rho) - \right. \\ \left. - A_{\alpha; 1}(q) F_{v_1, 21}^{\mu, 1}(ch R_1, ch \rho) \right] \quad R_0 < r < \rho < R_1, \\ - A_{\alpha; 1}(q) F_{v_1, 21}^{\mu, 1}(ch R_1, ch r) \quad R_0 < \rho < r < R_1$$

$$H_{\mu, \alpha; 12}(r, \rho, q) = \frac{c_{21}}{\Delta_{\mu, \alpha}(q)} F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch r) \Theta_{\alpha; 2}(\rho, q),$$

$$H_{\mu, \alpha; 13}(r, \rho, q) = \frac{c_{21} c_{22} q_2}{R_2^{2\alpha+1} \Delta_{\mu, \alpha}(q)} F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch r) K_{q_1, \alpha}(\lambda \rho),$$

$$H_{\mu, \alpha; 21}(r, \rho, q) = \frac{c_{11}}{sh R_1} \frac{1}{\Delta_{\mu, \alpha}(q)} F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch \rho) \Theta_{\alpha; 2}(r, q),$$

$$H_{\mu, \alpha; 22}(r, \rho, q) = \frac{1}{q_2 \Delta_{\mu, \alpha}(q)} \left\{ \Theta_{\mu; 1}(r, q) \Theta_{\alpha; 2}(\rho, q), \quad R_1 < r < \rho < R_2, \right. \\ \left. \Theta_{\mu; 1}(\rho, q) \Theta_{\alpha; 2}(r, q), \quad R_1 < \rho < r < R_2, \right.$$

$$H_{\mu, \alpha; 23}(r, \rho, q) = \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}} \frac{1}{\Delta_{\mu, \alpha}(q)} \Theta_{\mu; 1}(r, q) K_{q_1, \alpha}(\lambda \rho),$$

$$H_{\mu, \alpha; 31}(r, \rho, q) = \frac{c_{11} c_{12} q_2}{sh R_1 \Delta_{\mu, \alpha}(q)} F_{v_1, 11}^{\mu, 0}(ch R_0, ch \rho) K_{q_1, \alpha}(\lambda r), \quad (18)$$

$$H_{\mu, \alpha; 32}(r, \rho, q) = \frac{c_{12}}{\Delta_{\mu, \alpha}(q)} \Theta_{\mu; 1}(\rho, q) K_{q_1, \alpha}(\lambda r),$$

$$H_{\mu,\alpha;33}(r, \rho, q) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \left\{ K_{q_1,\alpha}(\lambda\rho) \left[B_{\mu,2}(q) \Psi_{q_1,\alpha;12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r) - \right. \right. \\ \left. \left. - B_{\mu,1}(q) \Psi_{q_1,\alpha;22}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r) \right] R_2 < r < \rho < \infty; \right. \\ \left. - B_{\mu,1}(q) \Psi_{q_1,\alpha;22}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho) \right] R_2 < \rho < r < \infty$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\mu,\alpha;11}(r, q) = \frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \left[A_{\alpha,1}(q) F_{\nu_1;21}^{\mu,1}(chR_1, chr) - A_{\alpha,2}(q) F_{\nu_1;11}^{\mu,1}(chR_1, chr) \right], \\ W_{\mu,\alpha;12}(r, q) = -\frac{c_{11}}{B_{\mu}(q_1) shR_1} \frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \cdot \Theta_{\alpha,2}(r, q), \\ W_{\mu,\alpha;13}(r, q) = -\frac{c_{11}c_{12}q_2}{shR_1 B_{\mu}(q_1) \Delta_{\mu,\alpha}(q)} \cdot K_{q_1,\alpha}(\lambda r);$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\mu,\alpha;11}^1(r, q) = \frac{A_{\alpha,2}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(chR_0, chr), \quad R_{\mu,\alpha;21}^1(r, q) = -\frac{A_{\alpha,1}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(chR_0, chr), \\ R_{\mu,\alpha;12}^1(r, q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} U_{q_1,\alpha;22}^{22}(\lambda R_2) F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(chR_0, chr), \\ R_{\mu,\alpha;22}^1(r, q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} U_{q_1,\alpha;12}^{22}(\lambda R_2) F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(chR_0, chr), \\ R_{\mu,\alpha;11}^2(r, q) = -\frac{\Delta_{\nu_1;21}^{\mu}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Theta_{\alpha,2}(r, q), \quad R_{\mu,\alpha;21}^2(r, q) = \frac{\Delta_{\nu_1;11}^{\mu}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Theta_{\alpha,2}(r, q), \\ R_{\mu,\alpha;12}^2(r, q) = -\frac{U_{q_1,\alpha;22}^{22}(\lambda R_2)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Theta_{\mu,1}(r, q), \quad R_{\mu,\alpha;22}^2(r, q) = \frac{U_{q_1,\alpha;12}^{22}(\lambda R_2)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Theta_{\mu,1}(r, q), \\ R_{\mu,\alpha;11}^3(r, q) = -\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Delta_{\nu_1;21}^{\mu}(chR_0, chR_1) K_{q_1,\alpha}(\lambda r), \\ R_{\mu,\alpha;21}^3(r, q) = \frac{c_{12}q_2}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} \Delta_{\nu_1;11}^{\mu}(chR_0, chR_1) K_{q_1,\alpha}(\lambda r), \\ R_{\mu,\alpha;12}^3(r, q) = \frac{B_{\mu,2}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} K_{q_1,\alpha}(\lambda r), \quad R_{\mu,\alpha;22}^3(r, q) = -\frac{B_{\mu,1}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)} K_{q_1,\alpha}(\lambda r).$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (16), підстановки одержаних значень A_j та B_k у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{\mu,\alpha;1j}(r, q) g_0 + \sum_{i,k=1}^2 R_{\mu,\alpha;ik}^j(r, q) \omega_{ik} + \int_{R_0}^{R_1} H_{\mu,\alpha;j1}(r, \rho, q) g_1(\rho) sh\rho d\rho + \\ + \int_{R_1}^{R_2} H_{\mu,\alpha;j2}(r, \rho, q) g_2(\rho) d\rho + \int_{R_2}^{\infty} H_{\mu,\alpha;j3}(r, \rho, q) g_3(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho \quad j = \overline{1,3}. \quad (21)$$

Побудуємо обмежений на множині I_2^+ розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\mu,\alpha} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\Lambda_\mu + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)B_\alpha. \quad (22)$$

За область визначення оператора $M_{\mu,\alpha}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r), g_2(r), g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_\mu[g_1(r)], g_2''(r), B_\alpha[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+ ; 2) справджуються крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [r^j g_3(r)] = 0; \quad (23)$$

3) справджуються умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_j} = 0; \quad j, k = 1, 2. \quad (24)$$

Для будь-яких двох елементів $u(r)$ та $v(r)$ із G в силу умов спряження (24) впливає базова тотожність:

$$\left[u_j(r)v_j'(r) - u_j'(r)v_j(r)\right]\Big|_{r=R_j} = \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \left[u_{j+1}(r)v_{j+1}'(r) - u_{j+1}'(r)v_{j+1}(r)\right]\Big|_{r=R_j}, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Якщо визначити вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 shr + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha-1},$$

де $\sigma_1 = c_{11}c_{12}(c_{21}c_{22}shrR_1)^{-1}$, $\sigma_2 = c_{12}c_{22}^{-1}$, $\sigma_3 = R_2^{-(2\alpha+1)}$, і скалярний добуток

$$(u, v) = \int_{R_0}^{\infty} uv\sigma(r)dr = \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha-1} dr, \quad (26)$$

то методом інтегрування частинами встановлюємо, що

$$(M_{\mu,\alpha}[u], v) \equiv \int_{R_0}^{\infty} M_{\mu,\alpha}[u]v\sigma(r)dr = \int_{R_0}^{\infty} uM_{\mu,\alpha}[v]\sigma(r)dr \equiv (u, M_{\mu,\alpha}[v]).$$

Звідси випливає, що ГДО $M_{\mu,\alpha}$ самоспряжений оператор, отже, його спектр дійсний [8]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Оскільки оператор $M_{\mu,\alpha}$ не має на множині I_2^+ особливих точок, то спектр дискретний [8]. Йому відповідає дискретна спектральна функція. З метою знаходження власних елементів (спектра й спектральної функції) ГДО $M_{\mu,\alpha}$ розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя

$$\begin{aligned} (\Lambda_\mu + b_1^2)Y_{\mu,\alpha;1}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_0, R_1); \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)Y_{\mu,\alpha;2}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_1, R_2); \\ (B_\alpha + b_3^2)Y_{\mu,\alpha;3}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \quad (27)$$

за однорідними крайовими умовами (23) і однорідними умовами спряження (24); $Y_{\mu,\alpha}(r, \beta) = \{Y_{\mu,\alpha;1}(r, \beta), Y_{\mu,\alpha;2}(r, \beta), Y_{\mu,\alpha;3}(r, \beta)\} \in G$, $b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1, 3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu + b^2)y = 0$ утворюють приєднані функції Лежандра $A_{-\frac{1}{2}+\mu}^\mu(chr)$ та $B_{-\frac{1}{2}+\mu}^\mu(chr)$ [4], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha + b^2)y = 0$ утворюють

функції $C_\alpha(\lambda r, b)$ та $D_\alpha(\lambda r, b)$ [9], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 + b^2)v = 0$ утворюють тригонометричні функції $\cos br$ і $\sin br$ [6].

Якщо покласти:

$$\begin{aligned} V_{\mu,\alpha,1}(r, \beta) &= A_1 A_{v_1}^{\mu}(chr) + B_1 B_{v_1}^{\mu}(chr), \quad v_1^* = -\frac{1}{2} + ib_1, \\ V_{\mu,\alpha,2}(r, \beta) &= A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, \\ V_{\mu,\alpha,3}(r, \beta) &= B_3 D_\alpha(\lambda r, b_3), \end{aligned} \quad (28)$$

то умова в точці $r = R_0$ і умови спряження в точках $r = R_k$ дають однорідну алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned} Y_{v_1,11}^{\mu,01}(chR_0)A_1 + Y_{v_1,11}^{\mu,02}(chR_0)B_1 &= 0; \\ Y_{v_1,j1}^{\mu,11}(chR_1)A_1 + Y_{v_1,j1}^{\mu,12}(chR_1)B_1 - A_2 v_{j2}^{11}(b_2 R_1) - B_2 v_{j2}^{12}(b_2 R_1) &= 0; \\ v_{j1}^{21}(b_2 R_2)A_2 + v_{j1}^{22}(b_2 R_2)B_2 - X_{\alpha,j2}^{22}(\lambda R_2, b_3)B_3 &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (29)$$

У системі (29) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} Y_{v_1,jk}^{\mu,m1}(chR_m) &= \alpha_{jk}^m shR_m A_{v_1}^{\mu'}(chR_m) + \beta_{jk}^m A_{v_1}^{\mu}(chR_m), \\ Y_{v_1,jk}^{\mu,m2}(chR_m) &= \alpha_{jk}^m shR_m B_{v_1}^{\mu'}(chR_m) + \beta_{jk}^m B_{v_1}^{\mu}(chR_m), \\ v_{jk}^{m1}(b_2 R_m) &= -\alpha_{jk}^m b_2 \sin b_2 R_m + \beta_{jk}^m \cos b_2 R_m, \\ v_{jk}^{m2}(b_2 R_m) &= \alpha_{jk}^m b_2 \cos b_2 R_m + \beta_{jk}^m \sin b_2 R_m, \\ X_{\alpha,j2}^{22}(\lambda R_2, b_3) &= \alpha_{j2}^2 \lambda D'_\alpha(\lambda R_2, b_3) + \beta_{j2}^2 D_\alpha(\lambda R_2, b_3). \end{aligned}$$

Визначимо функції:

$$\begin{aligned} a_{\alpha,j}(\beta) &= X_{\alpha,22}^{22}(\lambda R_2, b_3) \delta_{j1}(b_2 R_1, b_2 R_2) - X_{\alpha,12}^{22}(\lambda R_2, b_3) \delta_{j2}(b_2 R_1, b_2 R_2), \\ b_{\mu,j}(\beta) &= \delta_{v_1,21}^{\mu}(chR_0, chR_1) \delta_{1j}(b_2 R_1, b_2 R_2) - \\ &\quad - \delta_{v_1,11}^{\mu}(chR_0, chR_1) \delta_{2j}(b_2 R_1, b_2 R_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{v_1,j1}^{\mu}(chR_0, chR_1) &= Y_{v_1,11}^{\mu,01}(chR_0) Y_{v_1,j1}^{\mu,12}(chR_1) - Y_{v_1,11}^{\mu,02}(chR_0) Y_{v_1,j1}^{\mu,11}(chR_1), \\ \delta_{jk}(b_2 R_1, b_2 R_2) &= v_{j2}^{11}(b_2 R_1) v_{k1}^{22}(b_2 R_2) - v_{j2}^{12}(b_2 R_1) v_{k1}^{21}(b_2 R_2), \quad j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Для того, щоб алгебраїчна система (29) мала ненульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [10]:

$$\begin{aligned} \delta_{\mu,\alpha}(\beta) &\equiv X_{\alpha,12}^{22}(\lambda R_2, b_3) b_{\mu,2}(\beta) - X_{\alpha,22}^{22}(\lambda R_2, b_3) b_{\mu,1}(\beta) = \\ &= \delta_{v_1,11}^{\mu}(chR_0, chR_1) a_{\alpha,2}(\beta) - \delta_{v_1,21}^{\mu}(chR_0, chR_1) a_{\alpha,1}(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Згідно з роботою [11] маємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння (30) складають дискретний спектр ГДО $M_{\mu,\alpha}$: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta = 0$ і на півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною точкою скупчення $\beta = \infty$.

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (29) при $\beta = \beta_n$ стандартним способом [10] і підстановки отриманих значень A_j та B_k в рівності (28) маємо функції:

$$\begin{aligned} V_{\mu,\alpha,1}(r, \beta_n) &= c_{21} b_{2n} X_{\alpha,12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) \left[Y_{v_{1n},11}^{\mu,01}(chR_0) B_{v_{1n}}^{\mu}(chr) - \right. \\ &\quad \left. - Y_{v_{1n},11}^{\mu,02}(chR_0) A_{v_{1n}}^{\mu}(chr) \right], \quad v_{1n}^* = -\frac{1}{2} + ib_{1n}, \end{aligned}$$

$$V_{\mu,\alpha,2}(r, \beta_n) = X_{\alpha,12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) \left\{ \delta_{v_{1n},11}''(chR_0, chR_1) \varphi_{22}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) - \delta_{v_{1n},21}''(chR_0, chR_1) \varphi_{12}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) \right\} \\ V_{\mu,\alpha,3}(r, \beta_n) = b_{\mu,1}(\beta_n) D_{\alpha}(\lambda r, b_{3n}), \quad (31) \\ b_{j,n} = b_j(\beta_n) \equiv (\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2}, \quad \varphi_{12}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) = v_{12}^{12}(b_{2n}R_1) \cos b_{2n}r - \\ - v_{12}^{11}(b_{2n}R_1) \sin b_{2n}r, \quad j = \overline{1,3}, i = 1, 2.$$

Визначимо спектральну функцію

$$V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n) = \sum_{j=1}^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_i - r) V_{\mu,\alpha,i}(r, \beta_n) + \theta(r - R_2) V_{\mu,\alpha,3}(r, \beta_n) \quad (32)$$

з квадратом норми

$$\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 = \int_{R_0}^{\infty} [V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)]^2 \sigma(r) dr. \quad (33)$$

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система власних функцій $\{V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_2^+ з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна і замкнута.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно і рівномірно збіжним на множині I_2^+ рядом Фур'є за системою власних (спектральних) вектор-функцій $\{V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{\infty} g(\rho) V_{\mu,\alpha}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)}{\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2}. \quad (34)$$

Ряд Фур'є (34) визначає пряме $H_{\mu,\alpha}$ і обернене $H_{\mu,\alpha}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 2-го роду – Фур'є – (Конторовича-Лебедева), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\mu,\alpha}$:

$$H_{\mu,\alpha}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n \equiv \sum_{l=1}^3 \tilde{g}_{ln}; \quad (35)$$

$$H_{\mu,\alpha}^{-1}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n) \left(\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 \right)^{-1} \equiv g(r). \quad (36)$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $g(r) \in G$, функції $g_j(r)$ задовольняють неоднорідну крайову умову в точці $r = R_0$ і неоднорідні умови спряження (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\mu,\alpha}$, визначеного рівністю (22):

$$H_{\mu,\alpha}[M_{\mu,\alpha}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} - \sigma_1 sh R_0 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\mu,\alpha,1}(R_0, \beta_n) g_0 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k (Z_{\mu,\alpha,12}^k(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\mu,\alpha,22}^k(\beta_n) \omega_{1k}) \quad d_1 = \sigma_1 sh R_1 c_{11}^{-1}, \quad d_2 = \sigma_2 c_{12}^{-1}, \quad (37)$$

$$Z_{\mu,\alpha,12}^k(\beta_n) = \left(\alpha_{12}^k \frac{d}{dr} + \beta_{12}^k \right) V_{\mu,\alpha,k+1}(r, \beta_n) \Big|_{r=R_0}, \quad i, k = 1, 2.$$

Запишемо систему (1) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} (\Lambda_\mu - q_1^2)u_1(r) \\ (d^2/dr^2 - q_2^2)u_2(r) \\ (B_\alpha - q_3^2)u_3(r) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Інтегральний оператор $H_{\mu,\alpha}$ згідно з правилом (35) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\mu,\alpha}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_{\mu,\alpha;1}(r, \beta_n) \sigma_1 sh r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_{\mu,\alpha;2}(r, \beta_n) \sigma_2 dr \\ & \int_{R_2}^{R_n} \dots V_{\mu,\alpha;3}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha-1} dr \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\} = q_3^2$. Покладемо всюди $k_j^2 = q_3^2 - q_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$. Застосуємо до системи (38) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (39). Внаслідок тотожності (37) маємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta_n^2 + q_3^2)\tilde{\mu}_n = \tilde{g}_n - \sigma_1 sh R_0 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\mu,\alpha;1}(R_0, \beta_n) g_0 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \left[Z_{\mu,\alpha;12}^k(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\mu,\alpha;22}^k(\beta_n) \omega_{1k} \right]$$

Звідси одержуємо, що функція

$$\tilde{u}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\beta_n^2 + q_3^2} + \frac{V_{\mu,\alpha;1}(R_0, \beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2 + q_3^2)} \sigma_1 sh R_0 g_0 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \left[\frac{Z_{\mu,\alpha;12}^k(\beta_n)}{\beta_n^2 + q_3^2} \omega_{2k} - \frac{Z_{\mu,\alpha;22}^k(\beta_n)}{\beta_n^2 + q_3^2} \omega_{1k} \right]. \quad (40)$$

Оператор $H_{\mu,\alpha}^{-1}$ згідно з правилом (36) як обернений до (39) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\mu,\alpha}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \dots V_{\mu,\alpha;1}(r, \beta_n) \left(\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 \right)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots V_{\mu,\alpha;2}(r, \beta_n) \left(\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 \right)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots V_{\mu,\alpha;3}(r, \beta_n) \left(\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 \right)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Застосувавши за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (41) до матриці-елементу $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (40), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned}
u_j(r) = & \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) \left(\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2 \right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,\alpha,1}(R_0, \beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2 + q_3^2)} \times \\
& \times \frac{V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n)}{\|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2} \sigma_1 \operatorname{sh} R_0 g_0 + \int_{R_0}^{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) V_{\mu,\alpha,1}(\rho, \beta_n) \left(g_1(\rho) \sigma_1 \operatorname{sh} \rho d\rho + \right. \\
& + \int_{R_1}^{R_2} \sum_{n=1}^{\infty} S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) V_{\mu,\alpha,2}(\rho, \beta_n) \left. g_2(\rho) \sigma_2 d\rho + \int_{R_2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) \times \right. \\
& \times V_{\mu,\alpha,3}(\rho, \beta_n) \left. g_3(\rho) \sigma_3 \rho^{2\alpha-1} d\rho + \sum_{k=1}^2 d_k \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) Z_{\mu,\alpha,12}^k(\beta_n) \right) \omega_{2k} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\sum_{n=1}^{\infty} S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) Z_{\mu,\alpha,22}^k(\beta_n) \right) \omega_{1k} \right] \right], \\
S_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) = & \frac{V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2) \|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned} \quad (42)$$

Порівнюючи розв'язки (21) і (42), в силу єдиності маємо наступні формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n) V_{\mu,\alpha,k}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2) \|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2} = \sigma_k^{-1} H_{\mu,\alpha,jk}(r, \rho, q), \quad j, k = \overline{1,3}; \quad (43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,\alpha,1}(R_0, \beta_n) V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2 + q_3^2) \|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2} = (\sigma_1 \operatorname{sh} R_0)^{-1} W_{\mu,\alpha,1j}(r, q), \quad j = \overline{1,3}; \quad (44)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\mu,\alpha,12}^k(\beta_n) V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2) \|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2} = d_k^{-1} R_{\mu,\alpha,2k}^j(r, q), \quad k = 1, 2, j = \overline{1,3}; \quad (45)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\mu,\alpha,22}^k(\beta_n) V_{\mu,\alpha,j}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q_3^2) \|V_{\mu,\alpha}(r, \beta_n)\|^2} = -d_k^{-1} R_{\mu,\alpha,1k}^j(r, q), \quad k = 1, 2, j = \overline{1,3}. \quad (46)$$

Функції впливу $H_{\mu,\alpha,jk}(r, \rho, q)$ визначені рівностями (18), функції Гріна $W_{\mu,\alpha,1j}(r, q)$ – рівностями (19), а функції Гріна $R_{\mu,\alpha,ik}^j(r, q)$ умов спряження – формулами (20). Оскільки вони не залежать від нерівності $(q_3^2 - q_j^2) \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2 > 0$, звужуючи при цьому сім'ю функціональних рядів.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови теореми про основну тотожність і виконується умова (17) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (43)-(46) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{\mu,\alpha}$, визначеного рівністю (22).

Висновок

Результати роботи можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними елементами відповідних гібридних диференціальних операторів, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів у неоднорідних середовищах.

Література

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798 с.
4. Ленок М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики; 89.0).
5. Ленок М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 61 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики, 83.3).
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
8. Ленок М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина I. – Тернопіль; Економічна думка, 2004. – 368 с.
9. Ленок М.П., Михалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебсєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 431 с.
11. Комаров Г.М., Ленок М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

Одержано 01.08.2006 р.

УДК 681.325; 621.397.61

І.Коноваленко, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

АЛГОРИТМ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ КОЛОВОЇ ФОРМИ НА ЗОБРАЖЕННІ

У статті описано алгоритм для розпізнавання положення колових об'єктів на контурних бінарних зображеннях. Його застосування дозволить скоротити час аналізу зображення порівняно зі стандартним алгоритмом, що використовує перетворення Хаха. Розроблено необхідне математичне забезпечення для практичної реалізації запропонованого методу розпізнавання колових об'єктів за допомогою ЕОМ. Роботу алгоритму проаналізовано на ряді тестових та реальних зображень. Показано залежність точності розпізнавання від рівня шумів. Дослідження показали, що запропонований метод можна ефективно використовувати для розпізнавання положення колових об'єктів на зображеннях.

I.Konovalenko

THE ALGORITHM FOR RECOGNITION OF A POSITION OF CIRCULAR OBJECTS ON IMAGES

In the article the algorithm for recognition of a position of circular objects on binary images is described. Its application will allow to reduce time of image analysis compared with standard algorithm, which uses Hough transformation. The necessary software for practical realization of algorithm is developed. The work of offered algorithm is analysed on a number of test and real images. The dependence of efficiency of recognition on a level of noise is shown. A research has shown that the offered method can effectively be used for recognition of a position of circular objects on images.