

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра
Вищої математики

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
З КУРСУ**

**Математичне моделювання технічних систем
ДЛЯ МАГІСТРІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 131 «ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА»**

Тернопіль 2024 р.

УДК 519.6

Навчальний посібник з курсу «Математичне моделювання технічних систем» для магістрів спеціальності 131 «Прикладна механіка» / Федак С.І., Шелестовський Б.Г. – Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2024.– 164 с.

Автори: к.т.н. С.І.Федак, к.ф.-м.н. Б.Г.Шелестовський

Відповідальний за випуск: к.т.н. С.І. Федак

Рецензенти: доц., к.пед.н. Г.В. Гоменюк
доц., к.т.н. Л.А. Романюк

Схвалено й рекомендовано до друку вченою радою Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 11 від 21 листопада 2024 р.

Посібник складено з урахуванням матеріалів літературних джерел, наведених у списку.

ВСТУП

Навчальний посібник створено з метою надання допомоги магістрам спеціальності 131 «Прикладна механіка» при підготовці до лекційних та практичних занять в курсі «Математичне моделювання технічних систем». Задачі, запропоновані для розгляду, підібрані згідно тем, передбачених робочою програмою дисципліни, а саме:

теорія похибок в математичних методах;
чисельні методи розв'язання рівнянь та систем рівнянь;
апроксимація функцій;
задачі оптимізації;
теорія графів;
рівняння математичної фізики;
метод скінченних різниць.

Навчальний посібник може бути використаний студентами інших інженерних спеціальностей для засвоєння матеріалу та розв'язування завдань згідно розглянутих тем в курсі математичної підготовки.

Тема 1. Теорія похибок в математичних методах.

1. Джерела та класифікація похибок

На різних етапах розв'язування задачі чисельним методом виникають похибки, які змінюють результат обчислень. Важливим питанням при застосуванні чисельних методів є оцінювання точності одержаних результатів. Розглянемо джерела похибок на окремих етапах розв'язування деякої науково-технічної задачі.

Процес розв'язування задачі починається з постановки задачі та побудови її математичної моделі. Модель повинна правильно описувати основні закони даного фізичного процесу. Якщо в математичній моделі, яка прийнята для опису цього процесу чи явища, не враховані деякі важливі риси даної задачі, то така модель може внести похибки у результати обчислень. Крім того, можуть бути неточними вхідні дані задачі.

Похибки, що відповідають цим причинам, називають неусувними, оскільки вони не можуть бути зменшені в процесі розв'язування задачі. Часто неусувні похибки поділяють на дві частини: а) неусувною похибкою називають лише похибку, що є наслідком неточності задавання вхідних числових даних; б) похибку, що є наслідком невдалої побудови математичної моделі задачі, називають похибкою математичної моделі.

Чисельний метод, який використовують для розв'язування задачі, також є джерелом похибки, яку називають похибкою чисельного методу. Зазвичай, похибку чисельного методу можна регулювати, зокрема її можна зменшити шляхом зміни деякого параметра (наприклад, кроку інтегрування, числа членів ряду, які враховують при обчисленнях, і т.д.). Похибки методів будемо розглядати при аналізі конкретних чисельних методів.

При виконанні арифметичних операцій та при зображенні у комп'ютері вхідних та вихідних величин математичної задачі роблять заокруглення. Похибку, що виникає при цьому, називають похибкою заокруглень.

Приклад. Розглянемо задачу про коливання математичного маятника. Математичним маятником називають матеріальну точку M маси m , яка підвішена на нерозтяжній нитці завдовжки l і рухається під дією сили тяжіння. Очевидно, що точка M рухається по дузі кола радіуса l . Тому положення точки M на дузі цього кола в момент часу t можна охарактеризувати кутом $\theta(t)$ відхилення нитки від вертикалі. Будемо вважати, що сила опору середовища пропорційна швидкості зміщення маятника.

Нехай маятник починає рух у момент часу t_0 . Потрібно обчислити кут відхилення маятника від положення рівноваги в момент часу t_1 , якщо в початковий момент часу t_0 $\theta(t_0) = \theta_0$, $\theta'(t_0) = \theta'_0$.

Диференціальне рівняння, яке описує коливання даного маятника, має вигляд

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (1.1)$$

де g – прискорення сили тяжіння, а коефіцієнт λ характеризує опір середовища.

Якщо ми приймемо таку математичну модель, то розв’язок задачі вже матиме неусувну похибку, зокрема тому, що справжній опір середовища залежить від швидкості зміщення маятника не зовсім лінійно. Ще одним джерелом неусувної похибки є похибки в обчисленнях вхідних даних задачі: $t_0, l, g, \lambda, \theta(t_0), \theta'(t_0)$.

Неусувну похибку неможливо регулювати в процесі розв’язування задачі, її можна зменшити лише у випадку точнішого моделювання фізичної задачі та точнішого визначення вхідних параметрів.

Диференціальне рівняння (1.1) не розв’язується в явному вигляді, тому для його розв’язування потрібно застосувати чисельний метод. Отже, в процесі розв’язування даної задачі виникає похибка методу.

Крім того, при виконанні обчислень потрібно робити заокруглення чисел, що призводить до появи похибки заокруглень.

Нехай α – точне значення шуканого параметра (кута відхилення маятника від положення рівноваги в момент часу t_1); $\tilde{\alpha}$ – значення цього параметра, що відповідає побудованій математичній моделі, тобто значення $\theta(t_1)$ розв’язку рівняння (1.1), який задовольняє задані початкові умови; $\tilde{\alpha}_n$ – наближений розв’язок задачі, одержаний за допомогою чисельного методу в припущенні відсутності заокруглень; $\tilde{\alpha}_n^*$ – наближений розв’язок задачі, отриманий даним чисельним методом при реальних обчисленнях.

Тоді

$$\Delta_1 = |\alpha - \tilde{\alpha}| \text{ – неусувна похибка;}$$

$$\Delta_2 = |\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_n| \text{ – похибка методу;}$$

$$\Delta_3 = |\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_n^*| \text{ – похибка заокруглень;}$$

$$\Delta_0 = |\alpha - \tilde{\alpha}_n^*| \text{ – повна похибка розв’язку даної задачі.}$$

Запишемо повну похибку Δ_0 у вигляді

$$\Delta_0 = |(\alpha - \tilde{\alpha}) + (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_n) + (\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_n^*)|.$$

Оскільки модуль суми скінченної кількості чисел не перевищує суми модулів цих чисел, то одержимо

$$\Delta_0 \leq |\alpha - \tilde{\alpha}| + |\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_n| + |\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_n^*|, \text{ тобто } \Delta_0 \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (1.2)$$

Отже, повна (глобальна) похибка (1.2) розв’язку даної задачі не перевищує суми трьох доданків: неусувної похибки, похибки методу та похибки заокруглень.

2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай a – точне значення деякої величини, a^* – її наближене значення, одержане в результаті обчислення або вимірювання.

Абсолютною похибкою $\Delta(a^*)$ наближеного числа a^* називають абсолютну величину різниці між відповідним точним числом a і даним наближеним значенням a^* .

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|. \quad (1.3)$$

Оскільки точне значення величини зазвичай невідоме, то ми не можемо визначити абсолютну похибку $\Delta(a^*)$ за формулою (1.3). Тому розглядають оцінку зверху абсолютної похибки – граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(a^*)$. Граничною абсолютною похибкою наближеного числа a^* називають будь-яке число $\bar{\Delta}(a^*)$, яке не менше від абсолютної похибки цього числа $\Delta(a^*)$. Тобто, якщо $\bar{\Delta}(a^*)$ – гранична абсолютна похибка наближеного числа a^* , то справджується нерівність

$$\Delta(a^*) \leq \bar{\Delta}(a^*). \quad (1.4)$$

Зауважимо, що величина граничної абсолютної похибки не визначається однозначно, бо за граничну абсолютну похибку наближеного числа a^* можна взяти будь-яке число з нескінченної множини невід’ємних чисел $\bar{\Delta}(a^*)$, які задовольняють нерівність (1.4). На практиці за граничну абсолютну похибку вибирають, в міру можливості, найменше в кожному конкретному випадку число, яке задовольняє нерівність (1.4).

Отже, якщо $\bar{\Delta}(a^*)$ – гранична абсолютна похибка наближеного числа a^* , то

$$|a - a^*| \leq \bar{\Delta}(a^*), \quad (1.5)$$

$$a^* - \bar{\Delta}(a^*) \leq a \leq a^* + \bar{\Delta}(a^*), \quad (1.6)$$

тобто точне число a міститься на відрізку $[a^* - \bar{\Delta}(a^*); a^* + \bar{\Delta}(a^*)]$. Записуючи наближене число, отримане в результаті вимірювання, зазвичай вказують його граничну абсолютну похибку. Наприклад, якщо наближене значення довжини відрізка $l^* = 124$ см з точністю до 0,5 см, то пишуть $l^* = 124 \text{ см} \pm 0,5$ см. Тут гранична абсолютна похибка $\bar{\Delta}(l^*) = 0,5$ см, а точне значення довжини l відрізка міститься в межах $123,5 \text{ см} \leq l \leq 124,5 \text{ см}$.

Відносною похибкою $\delta(a^*)$ наближеного числа a^* називають відношення абсолютної похибки $\Delta(a^*)$ до модуля відповідного точного числа a ($a \neq 0$), тобто

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} = \left| \frac{a - a^*}{a} \right|. \quad (1.7)$$

Оскільки точне число a часто невідоме і $a \approx a^*$, то замість формули (1.7) користуємося формулою

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} = \left| \frac{a - a^*}{a^*} \right|. \quad (1.8)$$

Звідси отримуємо

$$\Delta(a^*) = |a^*| \delta(a^*). \quad (1.9)$$

Граничною відносною похибкою даного наближеного числа a^* називається будь-яке число $\bar{\delta}(a^*)$, яке задовольняє нерівність

$$\delta(a^*) \leq \bar{\delta}(a^*). \quad (1.10)$$

Тоді $\Delta(a^*) \leq |a^*| \bar{\delta}(a^*)$ і за граничну абсолютну похибку наближеного числа a^* можна взяти число

$$\bar{\Delta}(a^*) = |a^*| \bar{\delta}(a^*).$$

Звідси одержуємо

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a^*|}. \quad (1.11)$$

3. Значущі цифри. Кількість вірних знаків

Значущими цифрами наближеного числа називають усі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри. Наприклад, у числі 0.0058 дві значущі цифри, в числі 23.70 усі чотири цифри значущі. При зміні форми запису числа кількість значущих цифр не повинна змінюватися, тобто потрібно зберігати рівносильність перетворень. Наприклад, записи $3700 = 0.3700 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32.0$ рівносильні, а записи $3700 = 0.37 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32$ нерівносильні.

Кажуть, що n перших значущих цифр наближеного числа є вірними у вузькому змісті, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці розряду, який виражається n -ою значущою цифрою, рахуючи зліва направо.

Наприклад, для точного числа $a = 45,96$, число $a^* = 46,00$ є наближеним значенням із трьома вірними цифрами у вузькому змісті, оскільки $|a - a^*| = 0,04 < \frac{1}{2} \cdot 0,1$.

Зауважимо, що в математичних таблицях усі значущі цифри є вірними. Наприклад, у п'ятизначних таблицях логарифмів абсолютна похибка мантиси не перевищує $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Термін “ n вірних знаків” не потрібно розуміти буквально, тобто так, що в даному наближеному числі з n вірними знаками n перших його значущих цифр співпадають із відповідними цифрами точного числа a .

Наприклад, наближене число $a^* = 19,997$, яке замінює точне число $a = 20$, має чотири вірних знаки, оскільки $|a - a^*| = 0,003 < \frac{1}{2} \cdot 0,01$, але усі цифри цих чисел різні.

Зауваження. Кажуть, що число a^* є наближеним значенням точного числа a з n вірними знаками у широкому змісті, якщо абсолютна похибка $\Delta(a^*)$ не перевищує одиниці розряду, який виражається n -ою значущою цифрою наближеного числа a^* .

Наприклад, для точного числа $a = 231,2467$ число $a^* = 231,246$ є наближеним значенням із шістьма вірними знаками у широкому змісті, оскільки $|a - a^*| = 0,0007 < 0,001$. Надалі вірні знаки наближеного числа ми будемо розуміти у вузькому змісті, якщо не зроблено застереження про протилежне.

4. Заокруглення чисел

Розглянемо деяке наближене або точне число a . Часто виникає необхідність заокруглити це число, тобто замінити його іншим числом a_1 з меншою кількістю значущих цифр. Число a_1 вибирають так, щоб абсолютна похибка заокруглення $|a - a_1|$ була мінімальною.

Щоб заокруглити число до n значущих цифр, відкидають усі його цифри, які розміщені справа від n -ої значущої цифри.

При цьому:

1. якщо перша з відкинутих цифр менша від 5, то залишені цифри не змінюються;
2. якщо перша з відкинутих цифр більша від 5, то до останньої залишеної цифри додається одиниця;
3. якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і серед інших відкинутих цифр є ненульові, то остання залишена цифра збільшується на одиницю; якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і всі інші відкинуті цифри дорівнюють нулю, то остання залишена цифра не змінюється, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо вона непарна (правило парної цифри).

Похибка, яка виникає при заокругленні чисел, не перевищує половини одиниці десяткового розряду, який визначається останньою залишеною значущою цифрою.

4. Похибка суми та різниці

Розглянемо алгебраїчну суму n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a = a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n.$$

Нехай $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ – наближені значення відповідно чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Обчислимо наближене значення їх алгебраїчної суми $a^* = a_1^* \pm a_2^* \pm \dots \pm a_n^*$ і оцінимо абсолютну похибку цього значення

$$\Delta(a^*) = |a - a^*| = \left| (a_1 - a_1^*) \pm (a_2 - a_2^*) \pm \dots \pm (a_n - a_n^*) \right|.$$

Оскільки модуль алгебраїчної суми скінченної кількості чисел не перевищує суми модулів цих чисел, то одержимо:

$$\Delta(a^*) \leq |a_1 - a_1^*| + |a_2 - a_2^*| + \dots + |a_n - a_n^*|.$$

Враховуючи, що $|a_1 - a_1^*| = \Delta(a_1^*)$, $|a_2 - a_2^*| = \Delta(a_2^*)$, ..., $|a_n - a_n^*| = \Delta(a_n^*)$, отримаємо формулу

$$\Delta(a^*) \leq \Delta(a_1^*) + \Delta(a_2^*) + \dots + \Delta(a_n^*). \quad (1.12)$$

Отже, абсолютна похибка алгебраїчної суми скінченної кількості наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел.

Оскільки $\Delta(a_1^*) \leq \bar{\Delta}(a_1^*)$, $\Delta(a_2^*) \leq \bar{\Delta}(a_2^*)$, ..., $\Delta(a_n^*) \leq \bar{\Delta}(a_n^*)$, то

$$\Delta(a^*) \leq \bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + \dots + \bar{\Delta}(a_n^*).$$

Тому за граничну абсолютну похибку алгебраїчної суми наближених чисел можна взяти суму граничних абсолютних похибок доданків

$$\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + \dots + \bar{\Delta}(a_n^*). \quad (1.13)$$

Отже, при додаванні та відніманні наближених чисел їх граничні абсолютні похибки додають. Із формули (1.13) випливає, що гранична абсолютна похибка суми не може бути меншою від граничної абсолютної похибки найменш точного (у розумінні абсолютної похибки) із доданків. Тому, як би точно не були визначені інші доданки, неможливо за їх рахунок збільшити точність суми. Звідси випливає практичне правило додавання наближених чисел.

Щоб додати числа з різними абсолютними похибками, потрібно:

- 1) виділити числа, які мають найбільшу абсолютну похибку й залишити їх без зміни;
- 2) усі інші числа заокруглити за зразком виділених, зберігаючи 1 або 2 запасних десяткових знаки;
- 3) виконати додавання даних чисел, враховуючи всі збережені знаки;
- 4) одержаний результат заокруглити на 1 або 2 знаки.

Розглянемо суму наближених чисел $a^* = a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*$, причому усі доданки мають однаковий знак. Нехай, наприклад, $a_i^* > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Граничну відносну похибку цієї суми обчислюємо за формулою

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{a^*} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + \dots + \bar{\Delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*}. \quad (1.14)$$

Оскільки $\bar{\delta}(a_i^*) = \frac{\bar{\Delta}(a_i^*)}{a_i^*}$, то $\bar{\Delta}(a_i^*) = a_i^* \cdot \bar{\delta}(a_i^*)$. Підставивши ці вирази у формулу (1.14), отримаємо

$$\bar{\delta}(a_i^*) = \frac{a_1^* \bar{\delta}(a_1^*) + a_2^* \bar{\delta}(a_2^*) + \dots + a_n^* \bar{\delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*}. \quad (1.15)$$

Нехай, $\bar{\delta}$ є найбільшою з граничних відносних похибок

$$\bar{\delta}(a_1^*), \bar{\delta}(a_2^*), \dots, \bar{\delta}(a_n^*),$$

тобто $\bar{\delta}(a_i^*) \leq \bar{\delta}$ ($i=1,2,\dots,n$). Тоді з формули (1.15) одержуємо

$$\bar{\delta}(a^*) \leq \bar{\delta}. \quad (1.16)$$

Якщо усі доданки мають однаковий знак, то гранична відносна похибка їх суми не перевищує найбільшої з граничних відносних похибок доданків.

Розглянемо різницю двох наближених чисел $a_1^* - a_2^*$. Граничну відносну похибку різниці обчислюємо за формулою

$$\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*) = \frac{\bar{\Delta}(a_1^* - a_2^*)}{|a_1^* - a_2^*|} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*)}{|a_1^* - a_2^*|}. \quad (1.17)$$

Якщо наближені числа a_1^* та a_2^* мало відрізняються одне від одного, тобто $a_1^* \approx a_2^*$, то гранична відносна похибка $\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*)$ може бути великою.

Обчислимо, наприклад, різницю двох чисел $a_1^* = 5,73525$ і $a_2^* = 5,72312$, кожне з яких має шість вірних значущих цифр.

$$a^* = a_1^* - a_2^* = 0,01213.$$

Різниця a^* має чотири значущих цифри, з яких остання сумнівна, оскільки гранична абсолютна похибка цієї різниці

$$\bar{\Delta}(a^*) = \frac{1}{2} \cdot 0,00001 + \frac{1}{2} \cdot 0,00001 = 0,00001.$$

Обчислимо граничні відносні похибки чисел a_1^* , a_2^* та їх різниці a^* :

$$\bar{\delta}(a_1^*) = \frac{0,000005}{5,73525} \approx 0,000001;$$

$$\bar{\delta}(a_2^*) = \frac{0,000005}{5,72312} \approx 0,000001;$$

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{0,00001}{0,01213} \approx 0,001.$$

У даному випадку гранична відносна похибка різниці приблизно в 1000 разів більша від граничних відносних похибок зменшуваного і від'ємника.

Тому при організації обчислювальних алгоритмів потрібно уникати віднімання близьких чисел; якщо можливо, то алгоритм потрібно змінити так, щоб уникнути втрати точності на деякому етапі обчислень. А якщо уникнути віднімання близьких чисел неможливо, слід зменшувати і від'ємник брати з достатньою кількістю вірних знаків. Наприклад, якщо відомо, що при відніманні

чисел a_1^* і a_2^* перші m значущих цифр зникнуть, а результат необхідно мати з n вірними значущими цифрами, то a_1^* і a_2^* потрібно взяти з $m+n$ вірними значущими цифрами.

5. Похибка добутку та частки

Нехай $u = ab$ – точне значення добутку двох чисел, $u^* = a^* b^*$ – його наближене значення. Абсолютна похибка добутку

$$\Delta(u^*) = |u - u^*| = |ab - a^* b^*| = |ab - a^* b + a^* b - a^* b^*| = \\ = |b(a - a^*) + a^*(b - b^*)| \leq |b| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*) \leq (|b^*| + \Delta(b^*)) \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*).$$

Отже,

$$\Delta(u^*) \leq |b^*| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*) + \Delta(a^*) \Delta(b^*). \quad (1.18)$$

Для відносної похибки $\delta(u^*)$ одержуємо

$$\delta(u^*) \leq \frac{\Delta(u^*)}{|a^* b^*|} \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*) \delta(b^*). \quad (1.19)$$

За граничну абсолютну похибку і граничну відносну похибку добутку можна взяти такі величини:

$$\bar{\Delta}(a^* b^*) = |b^*| \bar{\Delta}(a^*) + |a^*| \bar{\Delta}(b^*) + \bar{\Delta}(a^*) \cdot \bar{\Delta}(b^*), \quad (1.20)$$

$$\bar{\delta}(a^* b^*) = \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*) + \bar{\delta}(a^*) \bar{\delta}(b^*), \quad (1.21)$$

де $\bar{\Delta}(a^*)$, $\bar{\Delta}(b^*)$ – граничні абсолютні похибки чисел a^* і b^* ; $\bar{\delta}(a^*)$, $\bar{\delta}(b^*)$ – їх граничні відносні похибки.

Розглянемо частку $v = \frac{a}{b}$. Нехай $v^* = \frac{a^*}{b^*}$ – її наближене значення.

Абсолютна похибка частки

$$\Delta(v^*) = \left| \frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*} \right| = \left| \frac{ab^* - ba^*}{bb^*} \right| = \left| \frac{ab^* - a^* b^* + a^* b^* - ba^*}{bb^*} \right| = \left| \frac{b^* \Delta(a^*) + a^* \Delta(b^*)}{bb^*} \right|.$$

Після деяких перетворень отримаємо

$$\Delta(v^*) \leq \frac{|b^*| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*)}{(1 - \delta(b^*)) |b^*|^2}. \quad (1.22)$$

Для відносної похибки –

$$\delta(v^*) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}. \quad (1.23)$$

За граничну абсолютну похибку й граничну відносну похибку частки можна взяти такі величини:

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{|b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*)}{(1 - \bar{\delta}(b^*)) |b^*|^2}, \quad (1.24)$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)}{1 - \bar{\delta}(b^*)}. \quad (1.25)$$

Оскільки граничні абсолютні та відносні похибки чисел a^* , b^* малі в порівнянні з цими числами й граничні відносні похибки значно менші від одиниці, то замість формул (1.20), (1.21), (1.24), (1.25) використовують такі наближені формули:

$$\bar{\Delta}(a^*b^*) \approx |b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*), \quad (1.26)$$

$$\bar{\delta}(a^*b^*) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*), \quad (1.27)$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \approx \frac{|b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*)}{|b^*|^2}, \quad (1.28)$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*). \quad (1.29)$$

Отже, при множенні та діленні наближених чисел їх граничні відносні похибки додають.

Зауваження. Часто на практиці спочатку обчислюють граничні відносні похибки добутку й частки за формулами (1.27), (1.29), а потім визначають граничні абсолютні похибки добутку й частки:

$$\bar{\Delta}(a^*b^*) = |a^*b^*|\bar{\delta}(a^*b^*), \quad (1.30)$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \left|\frac{a^*}{b^*}\right|\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right). \quad (1.31)$$

6. Похибка функції

Нехай відомі похибки деякої системи величин. Потрібно знайти похибку даної функції від цих величин. Розглянемо, наприклад, функцію двох змінних $u = f(x, y)$, яка диференційовна в деякій області G .

Нехай числа x_0^* , y_0^* є наближеними значеннями координат деякої точки $M_0(x_0, y_0) \in G$, причому замкнений прямокутник

$$\bar{R} = \{(x, y) : |x - x_0^*| \leq \bar{\Delta}(x_0^*); |y - y_0^*| \leq \bar{\Delta}(y_0^*)\},$$

в якому містяться обидві точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_1(x_0^*, y_0^*)$, належить області G .

Зазвичай на практиці граничні абсолютні похибки $\bar{\Delta}(x_0^*)$ і $\bar{\Delta}(y_0^*)$ – малі величини. Тому абсолютну похибку функції Δu можна замінити модулем її повного диференціала du .

$$\Delta u \approx |du| = |f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y|, \quad (1.32)$$

де Δx і Δy – прирости аргументів.

Використовуючи властивості модуля дійсного числа, отримаємо

$$\Delta u \approx |du| \leq |f'_x(x, y)| |\Delta x| + |f'_y(x, y)| |\Delta y|. \quad (1.33)$$

Нехай в даному прямокутнику $\bar{R}$

$$|f'_x(x, y)| \leq C_1, \quad |f'_y(x, y)| \leq C_2.$$

За граничну абсолютну похибку значення функції $u_0^* = f(x_0^*, y_0^*)$ можна взяти величину

$$\bar{\Delta}(u_0^*) = C_1 \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) + C_2 \cdot \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.34)$$

На практиці застосовують наближену формулу

$$\bar{\Delta}(u_0^*) \approx |f'_x(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(x_0^*) + |f'_y(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.35)$$

Поділивши обидві частини нерівності (1.33) на $|u|$, одержимо

$$\delta u \leq \left| \frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} \right| |\Delta x| + \left| \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \right| |\Delta y|,$$

тобто

$$\delta u \leq \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, y) \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln f(x, y) \right| |\Delta y|. \quad (1.36)$$

Якщо в прямокутнику $\bar{R}$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, y) \right| \leq C_3, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln f(x, y) \right| \leq C_4,$$

то за граничну відносну похибку значення функції u_0^* можна взяти величину

$$\bar{\delta}(u_0^*) = C_3 \bar{\Delta}(x_0^*) + C_4 \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.37)$$

На практиці застосовують наближену формулу

$$\bar{\delta}(u_0^*) \approx \left| \left(\frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}} \right| \bar{\Delta}(x_0^*) + \left| \left(\frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}} \right| \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.38)$$

Зауваження.

1. Нехай $u = x^n$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = (x_0^*)^n$. $\ln u = n \ln x$; $(\ln u)' = \frac{n}{x}$; $\bar{\delta}(x_0^*)^n = \frac{n}{|x_0^*|} \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) = n \bar{\delta}(x_0^*)$.

Отже, гранична відносна похибка n -го степеня наближеного числа в n разів більша від граничної відносної похибки цього числа.

2. Нехай $u = \sqrt[n]{x}$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = \sqrt[n]{x_0^*}$.
 $\ln u = \frac{1}{n} \ln x$; $(\ln u)' = \frac{1}{n x}$; $\bar{\delta}(\sqrt[n]{x_0^*}) = \frac{1}{n |x_0^*|} \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) = \frac{\bar{\delta}(x_0^*)}{n}$.

Тобто, гранична відносна похибка кореня n -го степеня з наближеного числа в n разів менша від граничної відносної похибки цього числа.

7. Оборнена задача теорії похибок

На практиці важливою є також оборнена задача: які повинні бути абсолютні похибки аргументів, щоб абсолютна похибка функції не перевищувала заданої величини.

Ця задача математично невизначена, оскільки задану граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(u)$ функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна забезпечити, встановлюючи різними способами граничні абсолютні похибки її аргументів. Найпростіше розв'язувати оборнену задачу за допомогою так званого принципу однакових впливів.

Нехай при наближених значеннях аргументів $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ одержимо наближене значення функції $u^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Тоді гранична абсолютна похибка

$$\bar{\Delta}(u^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \bar{\Delta}(x_i^*). \quad (1.39)$$

Будемо вважати, що всі доданки однаково впливають на утворення граничної абсолютної похибки $\bar{\Delta}(u^*)$, тобто

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} \right| \bar{\Delta}(x_1^*) &= \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_2} \right| \bar{\Delta}(x_2^*) = \dots \\ \dots &= \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \right| \bar{\Delta}(x_n^*) = \frac{\bar{\Delta}(u^*)}{n}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Із (1.40) отримуємо формули для граничних абсолютних похибок аргументів

$$\bar{\Delta}(x_i^*) = \frac{\bar{\Delta}(u^*)}{n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right|} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.41)$$

Іноді при розв'язанні оборненої задачі за принципом однакових впливів виявляється, що знайдені граничні абсолютні похибки деяких змінних настільки малі, що досягти відповідної точності при вимірюванні цих величин практично неможливо. В таких випадках слід відступити від принципу рівних впливів і за рахунок деякого зменшення похибок однієї частини змінних збільшити похибки іншої частини змінних. Аналогічно розв'язують іншу оборнену задачу теорії

похибок, коли задано граничну відносну похибку функції й потрібно знайти граничні абсолютні або відносні похибки аргументів.

Приклад 1.1. Заокруглити число $\pi = 3,1415926535...1)$ до п'яти, 2) чотирьох і 3) трьох значущих цифр,

Розв'язування. Використовуючи правила заокруглення, одержимо наближені числа: 1) оскільки наступна цифра 9 більше 5, то цифру 5 збільшуємо на 1, отримуємо 3,1416; 2) оскільки наступні цифри 5 і 9, то цифру 2 збільшуємо на 1, отримуємо 3,142; 3) оскільки наступна цифра 1 менше 5, то отримуємо 3,14; відповідні абсолютні похибки менші відповідно від 1) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$; 2) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$; 3) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Приклад 1.2. Обчислити різницю $a^* = \sqrt{1,49} - \sqrt{1,47}$ з чотирма вірними знаками.

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{1,49} = 1,220656...$ і $\sqrt{1,47} = 1,212436...$, то $a^* = 0,008220...$. Отже, $a^* = 8,220 \cdot 10^{-3}$.

Це обчислення можна виконати іншим способом, записавши a^* у вигляді

$$a^* = \frac{0,02}{\sqrt{1,49} + \sqrt{1,47}}.$$

У цьому випадку достатньо взяти значення $\sqrt{1,49}$ і $\sqrt{1,47}$ тільки з чотирма вірними цифрами:

$$a^* = \frac{0,02}{1,220 + 1,212} = \frac{0,02}{2,433} = 8,220 \cdot 10^{-3}.$$

Приклад 1.3. Дано наближені числа $a_1^* = -0,723$; $a_2^* = 4,3572$; $a_3^* = 0,89745$, усі написані знаки яких вірні. Знайти число $\frac{a_1^* \cdot a_2^*}{a_3^*}$ та визначити кількість вірних знаків у ньому.

Розв'язування. $b^* = -\frac{0,723 \cdot 4,3572}{0,89745} = -3,51023.$

Знайдемо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(b^*)$. Для цього обчислимо спочатку граничну відносну похибку $\bar{\delta}(b^*)$.

$$\bar{\delta}(b^*) = \bar{\delta}(a_1^*) + \bar{\delta}(a_2^*) + \bar{\delta}(a_3^*).$$

Оскільки $\bar{\Delta}(a_1^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, $\bar{\Delta}(a_2^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, $\bar{\Delta}(a_3^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, то

$$\bar{\delta}(a_1^*) = \frac{0,0005}{0,723} = 0,000692, \quad \bar{\delta}(a_2^*) = \frac{0,00005}{4,3572} = 0,000011,$$

$$\bar{\delta}(a_3^*) = \frac{0,000005}{0,89745} = 0,000006, \quad \bar{\delta}(b^*) = 0,000709 \approx 0,0007.$$

Отже, $\bar{\Delta}(b^*) = |b^*| \cdot \bar{\delta}(b^*) \approx 0,0025 < 0,003$.

Оскільки гранична абсолютна похибка наближеного числа b^* не перевищує 0,005, то це число має три вірні знаки, тобто $b^* = -3,51$ або, точніше, $b^* = -3,510 \pm 0,003$.

Приклад 1.4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $12,10 \pm 0,01$ і $25,21 \pm 0,01$. Визначити кут α , прилеглий до першого катета, й оцінити абсолютну та відносну похибки результату.

Розв'язування. Позначимо наближені значення катетів a та b через a^* та b^* . За умовою задачі $a^* = 12,10$, $b^* = 25,21$, $\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(b^*) = 0,01$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b}{a}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \\ \frac{\partial \alpha}{\partial a} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(\alpha^*)$, застосувавши формулу $\bar{\Delta}(u_0^*) \approx |f'_x(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(x_0^*) + |f'_y(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(y_0^*)$.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\alpha^*) &= \left(\frac{25,21}{25,21^2 + 12,10^2} + \frac{12,10}{25,21^2 + 12,10^2} \right) 0,01 = 0,00048 < 0,0005; \\ \alpha^* &= \operatorname{arctg} \frac{b^*}{a^*} = \operatorname{arctg} \frac{25,21}{12,10} = \operatorname{arctg} 2,0835 = 1,1233. \end{aligned}$$

Отже, $\alpha = 1,1233 \pm 0,0005$.

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(\alpha^*) = \frac{\bar{\Delta}(\alpha^*)}{\alpha^*} = \frac{0,00048}{1,1233} \approx 0,00043, \quad \text{тобто } \bar{\delta}(\alpha^*) \approx 0,04\%.$$

Приклад 1.5. Потрібно обчислити з граничною відотною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ і твірна якого виміряні наближено й дорівнюють $R^* \approx 3\text{м}$, $r^* \approx 1\text{м}$, $l^* \approx 5\text{м}$. З якою точністю слід виміряти радіуси та твірну й зі скількома знаками потрібно взяти число π ?

Розв'язування. Бічну поверхню S_δ зрізаного конуса обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned} S_\delta &= \pi (R + r) l; \\ \ln S_\delta &= \ln \pi + \ln(R + r) + \ln l; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi}(\ln S_{\delta}) = \frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial}{\partial R}(\ln S_{\delta}) = \frac{\partial}{\partial r}(\ln S_{\delta}) = \frac{1}{R+r}; \quad \frac{\partial}{\partial l}(\ln S_{\delta}) = \frac{1}{l}.$$

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(S^*) = \frac{1}{\pi^*} \bar{\Delta}(\pi^*) + \frac{1}{R^* + r^*} \bar{\Delta}(R^*) + \frac{1}{R^* + r^*} \bar{\Delta}(r^*) + \frac{1}{l^*} \bar{\Delta}(l^*) = 0,01.$$

За принципом рівних впливів одержуємо

$$\frac{\bar{\Delta}(\pi^*)}{\pi^*} = \frac{\bar{\Delta}(R^*)}{R^* + r^*} = \frac{\bar{\Delta}(r^*)}{R^* + r^*} = \frac{\bar{\Delta}(l^*)}{l^*} = 0,0025.$$

Звідси отримуємо $\bar{\Delta}(\pi^*) = 3,14 \cdot 0,0025 = 0,00785$;

$$\bar{\Delta}(R^*) = 4 \cdot 0,0025 = 0,01; \quad \bar{\Delta}(r^*) = 0,01; \quad \bar{\Delta}(l^*) = 5 \cdot 0,0025 = 0,0125.$$

Отже, число π потрібно взяти з двома знаками після коми, радіуси виміряти з точністю до 1 см, а твірну – з точністю до 1,25 см.

Тема 2. Чисельні методи розв'язання рівнянь та систем рівнянь.

І. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ

І.1. Відокремлення коренів

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

де функція $f(x)$ визначена й неперервна в деякому скінченному або нескінченному інтервалі. Якщо функція $f(x)$ є многочленом n -го степеня, то рівняння (2.1) називають алгебраїчним рівнянням n -го степеня. Для алгебраїчних рівнянь першого, другого, третього та четвертого степенів існують формули, які виражають корені цих рівнянь через їх коефіцієнти за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення й добування коренів. Для рівнянь, степенів яких вищий від четвертого, таких формул у загальному випадку не існує. Проте навіть у випадках, коли корені алгебраїчних рівнянь виражаються формулами, на практиці доцільно застосовувати наближені методи розв'язування. Зокрема, це стосується алгебраїчних рівнянь третього та четвертого степенів.

Якщо ліва частина рівняння (2.1) є трансцендентною функцією, то рівняння називають трансцендентним. Прикладами таких рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні, окремі типи яких вивчають у шкільному курсі математики.

Припустимо, що рівняння (2.1) має тільки ізольовані корені, тобто для кожного кореня рівняння (2.1) існує деякий окіл, який не містить інших коренів цього рівняння. Наближене обчислення ізольованих дійсних коренів рівняння (2.1) складається з двох етапів: 1) відокремлення коренів, тобто знаходження відрізків якомога меншої довжини, в кожному з яких міститься тільки один корінь цього рівняння; 2) уточнення коренів, тобто обчислення їх із заданою точністю.

Для відокремлення коренів застосовують відому теорему з математичного аналізу.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то всередині цього відрізка міститься принаймні один корінь ξ рівняння (2.1).

Цей корінь ξ буде єдиним, якщо на цьому відрізку $[a, b]$ існує та зберігає сталий знак похідна $f'(x)$, тобто якщо функція $f(x)$ буде монотонною (зростаючою або спадною) на цьому відрізку.

1.2. Метод половинного поділу

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a) \cdot f(b) < 0$. Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь ξ рівняння (2.1). Отже, $a < \xi < b$.

Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Позначимо $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, де $a_0 = a$, $b_0 = b$. Якщо $f(c_0) = 0$, то $\xi = c_0$ є коренем рівняння (2.1). Якщо $f(c_0) \neq 0$, то вибираємо той з відрізків $[a_0, c_0]$, $[c_0, b_0]$, на кінцях якого функція $f(x)$ приймає значення різних знаків. Позначимо вибраний відрізок $[a_1, b_1]$, тобто

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{cases} c_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(a_0) = \operatorname{sgn} f(c_0); \\ a_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(a_0) \neq \operatorname{sgn} f(c_0); \end{cases} \\ b_1 &= \begin{cases} c_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(b_0) = \operatorname{sgn} f(c_0); \\ b_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(b_0) \neq \operatorname{sgn} f(c_0). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Відрізок $[a_1, b_1]$ знову поділимо навпіл, позначимо $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, виберемо один із відрізків $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ таким чином, як у попередньому випадку, позначимо його через $[a_2, b_2]$ і т.д.

Цей процес може бути скінченним, якщо середина відрізка, одержаного на деякому кроці, співпадає з шуканим коренем ξ , або цей процес нескінченний і ми отримаємо нескінченну послідовність вкладених один в одного відрізків $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, що

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

$$\text{і } b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a). \quad (2.5)$$

Оскільки ліві кінці $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ утворюють монотонну неспадну обмежену послідовність, а праві кінці $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – монотонну незростаючу обмежену послідовність, то ці послідовності мають границі й на основі рівності (2.5) ці границі рівні.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi.$$

Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності (2.4).

Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то одержимо $[f(\xi)]^2 \leq 0$. Звідси випливає, що $f(\xi) = 0$, тобто ξ є коренем рівняння (2.1).

Якщо обчислення виконані до n -го кроку, тобто отримано відрізок $[a_n, b_n]$, то за наближене значення кореня ξ можна взяти $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

При цьому для абсолютної похибки справедлива така оцінка:

$$|\xi - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}. \quad (2.6)$$

Метод половинного поділу збігається повільно і при збільшенні точності, з якою потрібно знайти корінь, значно зростає об'єм обчислювальної роботи. Проте цей метод легко реалізується на ЕОМ і якщо кожне обчислення значення функції $f(x)$ нескладне, то його можна успішно застосовувати на практиці.

І.3. Метод хорд

Нехай на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь ξ рівняння (2.1).

Припустимо, що функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, похідні $f'(x)$, $f''(x)$ не змінюють знака на відрізку $[a, b]$ і $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ на цьому відрізку. Припустимо для визначеності, що $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (випадок $f''(x) < 0$ зводиться до попереднього, якщо рівняння (2.1) записати у вигляді $-f(x) = 0$). Тоді графік функції $y = f(x)$ буде вгнутим на $[a, b]$. Можливі два випадки:

- 1) $f(a) > 0$; 2) $f(a) < 0$.

Розглянемо ці випадки.

- 1) $f(a) > 0$.

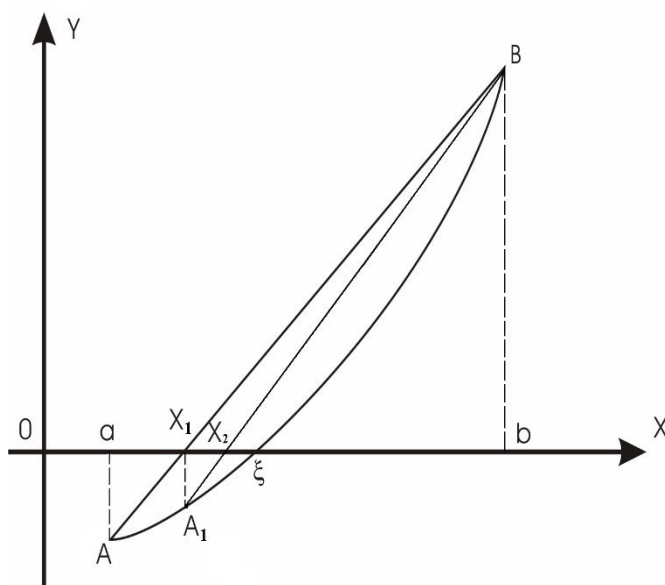


Рисунок 2.1

Складемо рівняння хорди AB і знайдемо абсцису x_1 точки перетину цієї хорди з віссю Ox .

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)}(x_0 - a). \quad (2.7)$$

Тут позначено $x_0 = b$.

Складемо рівняння хорди AB_1 і знайдемо абсцису x_2 точки перетину цієї хорди з віссю Ox .

$$\frac{y - f(x_1)}{f(a) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{a - x_1},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a). \quad (2.8)$$

і т.д.

Можна написати формулу для довільного n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.9)$$

У цьому випадку кінець a нерухомий.

Послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ є обмеженою монотонно спадною послідовністю. Отже, вона має границю $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ($a < \xi < b$).

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівності (2.9), отримаємо

$$\xi = \xi + \frac{f(\xi)}{f(a) - f(\xi)}(\xi - a).$$

Звідси випливає, що $f(\xi) = 0$, тобто ξ є коренем рівняння (2.1).

2) $f(a) < 0$.

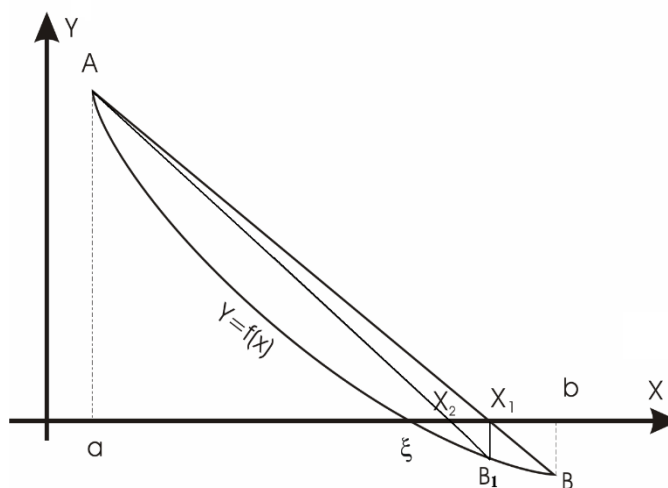


Рисунок 2.2

У другому випадку нерухомим є кінець b . Знайдемо, як і в першому випадку, абсциси точок перетину хорд $AB, A_1B, \dots$ з віссю Ox . Отримаємо формули:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0), \quad (2.10)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1) \quad (2.11)$$

і т.д.

У рівності (2.10) позначено $x_0 = a$. Отже,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.12)$$

Послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ є обмеженою монотонно зростаючою послідовністю. Тому вона має границю $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, причому ξ є коренем рівняння $f(x) = 0$ (доводити так само, як і у першому випадку).

За наближене значення кореня ξ можна взяти x_n , обчислене за формулою (2.9) або (2.12).

Для оцінювання точності цього наближення можна скористатися **теоремою**: якщо ξ – корінь рівняння $f(x) = 0$, який міститься на відрізку $[a, b]$, x_n – наближене значення цього кореня, яке також належить відрізку $[a, b]$ і $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $a \leq x \leq b$, то справджується формула

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}. \quad (2.13)$$

Доведення. Для функції $f(x)$ на відрізку $[x_n, \xi]$ (або $[\xi, x_n]$) виконуються умови теореми Лагранжа. Застосувавши цю теорему, одержимо $f(\xi) - f(x_n) = f'(c)(\xi - x_n)$, де c – проміжне значення між x_n і ξ , тобто $c \in (a, b)$. Оскільки $f(\xi) = 0$ і $|f'(x)| \geq m_1$, то отримаємо

$$|f(\xi) - f(x_n)| = |f(x_n)| \geq m_1 |\xi - x_n|.$$

Отже, $|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$, тобто формулу (2.13) доведено.

Наведемо ще формулу для оцінювання абсолютної похибки наближеного значення x_n , якщо відомі два послідовних наближення x_{n-1} та x_n .

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad (2.14)$$

де m_1 та M_1 – відповідно найменше та найбільше значення $|f'(x)|$ на відрізку $[a, b]$. Якщо відрізок $[a, b]$ настільки малий, що $M_1 \leq 2m_1$, то з формули (2.14) отримуємо

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.15)$$

Таким чином, у цьому випадку як тільки $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, де ε – задана гранична абсолютна похибка, то з формули (2.15) випливає, що $|\xi - x_n| < \varepsilon$.

З доведенням формули (2.14) можна ознайомитися, наприклад, в [6], гл. IV, § 4.

I.4. Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай корінь ξ рівняння (2.4) відокремлений на відрізку $[a, b]$, причому похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні й зберігають певні знаки при $a \leq x \leq b$.

Позначимо через x_0 той кінець відрізка $[a, b]$, в якому $f(x) \cdot f''(x) > 0$, тобто $f(x_0)$ і $f''(x_0)$ мають однакові знаки.

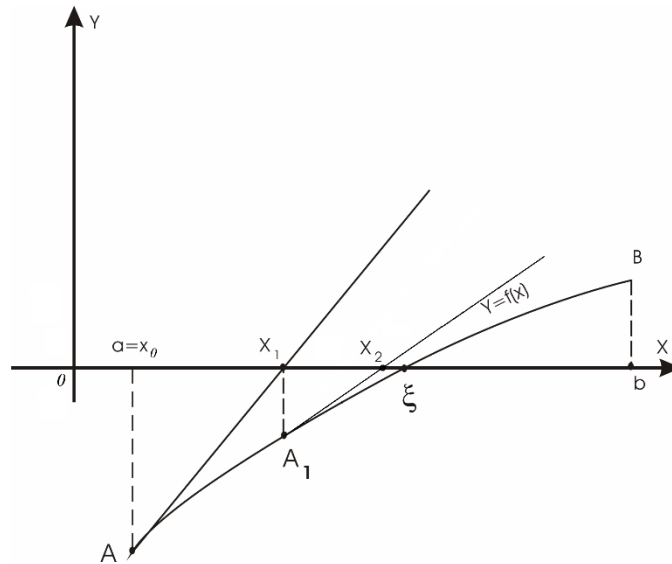


Рисунок 2.3

На рисунку 2.3 зображено випадок: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ при $a \leq x \leq b$. Тому точку a приймаємо за x_0 . Складемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0, f(x_0))$ і знайдемо абсцису x_1 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox .

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0); \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

За перше наближення кореня ξ рівняння (2.1) приймемо x_1 . Через точку $A_1(x_1, f(x_1))$ знову проведемо дотичну, знайдемо абсцису x_2 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox і приймемо x_2 за друге наближення кореня ξ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (2.17)$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо такі наближення кореня ξ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.18)$$

Теорема. Якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$, причому похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні, не дорівнюють нулю і зберігають певні знаки на відрізку $[a, b]$, то починаючи з початкового наближення $x_0 \in [a, b]$, яке задовольняє умову $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, можна обчислити за формулою (2.18) єдиний на відрізку $[a, b]$ корінь ξ рівняння $f(x) = 0$ з будь-якою заданою точністю.

Доведення. Розглянемо випадок, зображений на рис. 5: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ при $a \leq x \leq b$. Інші випадки розглянемо аналогічно. Доведемо методом математичної індукції, що усі наближення $x_n < \xi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Приймаємо $x_0 = a$, оскільки $f(a) \cdot f''(a) > 0$. Очевидно, що $x_0 < \xi$. Припустимо, що справджується нерівність $x_n < \xi$, і доведемо, що $x_{n+1} < \xi$.

Запишемо ξ у вигляді $\xi = x_n + (\xi - x_n)$ і застосуємо формулу Тейлора другого порядку

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(\xi - x_n)^2,$$

де $\xi < c_n < x_n$.

Оскільки $f(\xi) = 0$ і $f''(c_n) < 0$, то отримаємо

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) > 0, \text{ тобто } x_n f'(x_n) - f(x_n) < \xi f'(x_n).$$

$$\text{Отже, } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} < \xi \text{ й умову } x_n < \xi \text{ доведено.}$$

З цієї умови випливає, що $f(x_n) < 0$, а з формули (2.18) — $x_{n+1} > x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), тобто послідовні наближення $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність. Отже, існує границя цієї послідовності: $\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівності (2.18), отримаємо $f(\bar{\xi}) = 0$, тобто $\bar{\xi} = \xi$.

Для оцінювання абсолютної похибки n -го наближення x_n можна користуватися формулою (2.13).

Запишемо також формулу для оцінювання абсолютної похибки n -го наближення x_n за відомими двома послідовними наближеннями x_{n-1} та x_n :

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (2.19)$$

де M_2 — найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

1.5. Комбінований метод хорд і дотичних

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$ і $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають сталі знаки на відрізку $[a, b]$. Поєднуючи методи хорд і дотичних, отримаємо метод, на кожному етапі якого знаходимо наближені значення з нестачею й надлишком кореня ξ рівняння $f(x) = 0$.

Можливі два випадки.

1. $f(a) \cdot f''(a) > 0$. У цьому випадку дотичну до графіка функції $y = f(x)$ проводимо в точці $A(a; f(a))$, позначивши $a_0 = a$. За методом дотичних одержимо формулу для обчислення наближень кореня ξ .

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad (2.21)$$

$$\text{де } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Застосувавши метод хорд на відрізку $[a, b]$, також одержимо формулу для обчислення наближених значень кореня ξ .

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad (2.22)$$

$$\text{де } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

2. $f(b) \cdot f''(b) > 0$. Аналогічно одержуємо такі формули:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad (2.23)$$

$$\text{де } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n);$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad (2.24)$$

$$\text{де } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

За формулами (2.21) та (2.23) обчислюємо наближені значення кореня ξ з нестачею, а за формулами (2.22) та (2.24) – з надлишком. Тому $a_n < \xi < b_n$.

Якщо абсолютна похибка наближеного значення кореня ξ задана наперед і дорівнює ε , то обчислення припиняємо тоді, коли буде виконуватись умова $b_n - a_n < \varepsilon$. За наближене значення ξ^* кореня ξ доцільно взяти середнє арифметичне одержаних останніх значень: $\xi^* = \frac{a_n + b_n}{2}$.

I.6. Метод ітерації

Одним із найважливіших способів наближеного розв'язування рівняння $f(x)=0$ є метод ітерації, який часто називають методом послідовних наближень.

Нехай функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, де міститься тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.

Запишемо це рівняння у вигляді

$$x = \varphi(x). \quad (2.25)$$

Виберемо на відрізку $[a, b]$ деяким способом наближене значення x_0 кореня ξ рівняння (2.25) і побудуємо числову послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.26)$$

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена та диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому усі її значення належать цьому відрізку. Тоді, якщо існує таке додатне число $q < 1$, що $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при $a \leq x \leq b$, то:

1. послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ збігається незалежно від початкового значення $x_0 \in [a, b]$;
2. границя цієї послідовності $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ є коренем рівняння (2.25) на відрізку $[a, b]$.

Похибка наближеного значення x_n кореня ξ , знайденого методом ітерацій, оцінюється нерівністю

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.27)$$

Для того, щоб знайти наближене значення кореня з абсолютною похибкою, яка не перевищує заданого числа ε , достатньо визначити n так, щоб виконувалася нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon. \quad (2.28)$$

З доведенням цієї теореми і формули (2.27) читач може ознайомитися в [6], гл. IV, § 8.

Дане рівняння $f(x)=0$ можна записати у вигляді $x = \varphi(x)$ різними способами. З наведеної теореми випливає, що повинна виконуватись умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (2.29)$$

у деякому околі шуканого кореня ξ .

Чим менше число q , тим швидше послідовні наближення збігаються до кореня ξ .

Наведемо один загальний спосіб зведення рівняння $f(x)=0$ до вигляду (2.25). Замінімо рівняння $f(x)=0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = x - \lambda f(x), \quad (2.30)$$

де число $\lambda \neq 0$.

Позначимо $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$.

Підберемо параметр λ так, щоб похідна $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ була малою за абсолютною величиною на відрізку $[a, b]$. Припустимо, що $\varphi'(x_0) = 1 - \lambda f'(x_0) = 0$, або $\varphi'(a) = 1 - \lambda f'(a) = 0$, або $\varphi'(b) = 1 - \lambda f'(b) = 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов наведеної теореми метод ітерації збігається при будь-якому виборі початкового значення $x_0 \in [a, b]$.

Завдяки цьому окрема помилка в обчисленнях, яка не виводить за межі відрізка $[a, b]$, не впливає на остаточний результат, оскільки помилкове значення можна розглядати як нове початкове наближення x_0 . Можливо тільки, що збільшиться обсяг обчислювальної роботи. Властивість самовиправлення робить метод ітерації одним із найпоширеніших методів обчислень.

II. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B, \quad (3.1)$$

де A – квадратна матриця порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – вектор-стовпець правих частин рівнянь;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-стовпець невідомих.

Якщо визначник матриці A не дорівнює нулю, то система (3.1) має єдиний розв'язок. У цьому випадку систему (3.1) можна розв'язати за формулами Крамера. Проте для великих значень n цей метод важко реалізувати, оскільки він потребує кількості арифметичних дій порядку $n!$ Тому застосовують інші методи розв'язування, зокрема метод Гаусса, який потребує кількості арифметичних дій порядку n^3 .

Методи розв'язування системи (3.1) поділяють на дві групи: прямі та ітераційні.

У прямих (або точних) методах розв'язок X системи (3.1) виражається у вигляді точних формул через коефіцієнти системи й знаходиться за скінченну наперед відому кількість арифметичних дій. Але внаслідок похибок

заокруглення прямі методи насправді не приводять до точного розв'язку системи (3.1) і назвати їх точними можливо лише, залишаючи осторонь похибки заокруглення. До точних методів належать формули Крамера, метод Гаусса, метод головних елементів та інші.

Ітераційні методи (їх називають також методами послідовних наближень) полягають у тому, що розв’язок X системи (3.1) шукають як границю при $k \rightarrow \infty$ послідовних наближень $X^{(k)}$, де k – номер ітерації. Ітерації проводять до одержання розв’язку із заданою точністю. До ітераційних методів належать метод простої ітерації, метод Зейделя та інші.

II.1. Метод Гаусса

Запишемо систему (3.1) у розгорнутому вигляді:

[illegible]

Визначник системи (3.2)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.3)$$

Метод Гаусса полягає у послідовному вилученні невідомих із рівнянь системи (3.2).

Припустимо, що коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні $a_{11} \neq 0$. Поділивши перше рівняння на a_{11} , одержимо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \quad (3.4)$$

$$\text{де } c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = \overline{2, n}), \quad d_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Користуючись рівнянням (3.4), вилучимо x_1 з усіх рівнянь системи (3.2), крім першого. Для цього помножимо рівняння (3.4) на a_{21} і віднімемо від другого рівняння системи (3.2). Потім помножимо (3.4) на a_{31} і віднімемо від третього рівняння і т.д. У результаті отримаємо систему рівнянь, еквівалентну даній системі

[illegible]

Тут позначено

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}, \quad b_i^{(1)} = b_i - d_{1i}a_{i1} \quad (i = \overline{2, n}; \quad j = \overline{2, n}). \quad (3.6)$$

У системі (3.5) x_1 міститься тільки в першому рівнянні, тому перший крок методу Гаусса виконано.

Розглянемо скорочену систему, яка містить усі рівняння системи (3.5), починаючи з другого.

$$\begin{aligned} & a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Якщо $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то поділимо перше рівняння системи (3.7) на $a_{22}^{(1)}$ і, користуючись одержаним рівнянням, вилучимо невідоме x_2 з усіх рівнянь системи (3.7), крім першого.

Вилучаючи аналогічно невідомі $x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$, отримаємо систему рівнянь виду

[illegible]

яка еквівалентна системі (3.2).

Матриця C системи (3.8) має трикутний вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{1j} & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{2j} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & c_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Зведення системи (3.2) до системи (3.8) називають прямим ходом методу Гаусса, а знаходження значень невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ із системи (3.8) – зворотним ходом.

Оскільки матриця системи (3.8) має трикутний вигляд, то можна послідовно визначити всі невідомі, починаючи з x_n .

$$x_n = d_n, \quad x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1, n} x_n \quad \text{и т.д.}$$

Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j; \quad (i = \overline{n-1, 1}); \quad x_n = d_n. \quad (3.10)$$

При здійсненні прямого ходу методу Гаусса немає потреби проводити дії з рівняннями системи (3.2), а можна усі перетворення виконувати над розширеною матрицею цієї системи. Запишемо загальні формули, за допомогою яких розширена матриця системи (3.2)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

зводиться в результаті виконання прямого ходу методу Гаусса до розширеної матриці системи (3.8)

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Нехай вже виконані перші $k-1$ кроки, тобто із системи (3.2) вилучені змінні $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Отримаємо систему

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1,k-1}x_{k-1} + c_{1k}x_k + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ x_2 + \dots + c_{2,k-1}x_{k-1} + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots & \dots \\ x_{k-1} + c_{k-1,k}x_k + \dots + c_{k-1,n}x_n &= d_{k-1}, \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)}, \\ \dots & \dots \\ a_{nk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{nn}^{(k-1)}x_n &= b_n^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поділимо k -те рівняння цієї системи на $a_{kk}^{(k-1)}$, припустивши, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Одержимо рівняння

$$x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{k,n}x_n = d_k, \quad (3.14)$$

$$\text{де } c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (j = \overline{k+1, n}), \quad d_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Помножимо рівняння (3.14) на $a_{ik}^{(k-1)}$ ($i = \overline{k+1, n}$) та віднімемо одержане співвідношення від i -го рівняння системи (3.13). Рівняння системи (3.13), починаючи з $(k+1)$ -го, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n &= b_{k+1}^{(k)}, \\ a_{k+2,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+2,n}^{(k)}x_n &= b_{k+2}^{(k)}, \\ \dots & \dots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{n,n}^{(k)}x_n &= b_n^{(k)}, \end{aligned}$$

де $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}$; $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k$; ($i = \overline{k+1, n}$; $j = \overline{k+1, n}$).

Отже, здійснено k -тий крок прямого ходу методу Гаусса.

Таким чином, елементи розширеної матриці $\bar{A}$ перетворюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(0)} &= a_{kj}, \quad (k, j = \overline{1, n}); \\ c_{kj} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (j = \overline{k+1, n}; \quad k = \overline{1, n}); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, \quad (i, j = \overline{k+1, n}; \quad k = \overline{1, n}). \\ b_k^{(0)} &= b_k, \quad d_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (k = \overline{1, n}); \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k, \quad (i = \overline{k+1, n}; \quad k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Число $a_{kk}^{(k-1)}$ називають ведучим елементом на k -му кроці вилучення. Істотним обмеженням даного методу є припущення, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ($k = \overline{1, n}$). Навіть, якщо деякий ведучий елемент не дорівнює нулю, а досить близький до нуля, то в процесі обчислень можуть нагромаджуватися похибки. Вихід із цієї ситуації полягає в тому, що за ведучий елемент на k -му кроці вибирають не $a_{kk}^{(k-1)}$, а інше число, тобто на k -му кроці вилучають не x_k , а іншу змінну.

Однією з модифікацій методу Гаусса є схема з вибором головного елемента. Розглянемо розширену матрицю $\bar{A}$ системи (3.2). Серед елементів a_{ij} цієї матриці виберемо найбільший за модулем елемент a_{pq} , який називають першим головним елементом. Поділимо рядок з номером p матриці $\bar{A}$ на цей елемент і одержимо перший головний рядок, в якому замість a_{pq} стоїть число 1. За допомогою першого головного рядка вилучимо з усіх неголовних рядків змінну x_q . У результаті отримаємо нову матрицю, в якій усі елементи q -го стовпця дорівнюють нулю, крім елемента, що знаходиться в рядку з номером p .

Відкинувши перший головний рядок та q -ий стовпець, одержимо матрицю з меншою на одиницю кількістю рядків і стовпців. Знову виберемо найбільший за модулем елемент цієї матриці, який не входить у стовпець вільних членів (другий головний елемент). Поділимо рядок, що містить другий головний елемент, на цей елемент і одержимо другий головний рядок і т. д. Оскільки визначник системи (3.2) $|A| \neq 0$, то через n кроків ми отримаємо матрицю еквівалентної системи, яка складається з n головних рядків. Після належної зміни нумерації невідомих ця матриця матиме трикутний вигляд.

Якщо послідовність $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ має границю $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи (3.18). Справді, перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ у рівності (3.19), одержимо: $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} + \beta$ або $X = \alpha X + \beta$.

Отже, стовпець X є розв'язком системи (3.18).

Запишемо формули наближень у розгорнутому вигляді:

$$x_i^{(0)} = \beta_i, \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

Наведемо формулювання достатніх умов збіжності ітераційного процесу для системи (3.18), з виведенням яких читач може ознайомитися в [6], гл. IX, § 1.

Теорема. Якщо елементи матриці α задовольняють одну з умов

$$a) \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| = g_1 < 1$$

або

$$б) \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| = g_2 < 1,$$

(3.21)

то процес ітерації для системи лінійних рівнянь (3.18) збігається до її єдиного розв'язку при будь-якому нульовому наближенні $X^{(0)}$.

Наслідок. Для системи лінійних рівнянь (3.2) процес простої ітерації збігається до її єдиного розв'язку, якщо виконуються нерівності

$$a) |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

або

$$б) |a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}| \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

(3.22)

тобто ітераційний процес збігається, якщо модулі діагональних елементів матриці A системи (3.2) або для кожного рядка перевищують суму модулів недиагональних елементів цього рядка, або для кожного стовпця перевищують суму модулів недиагональних елементів цього стовпця.

Оцінюють похибку наближеного розв'язку $x_i^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) за однією з таких формул:

$$\max_i |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{g_1}{1 - g_1} \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|, \quad (3.23)$$

якщо виконана умова (3.21; а), або

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{g_2}{1 - g_2} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|, \quad (3.24)$$

якщо виконана умова (3.21; б).

У випадку оцінювання похибки за формулою (3.23) для того, щоб знайти наближений розв'язок системи (3.18) з абсолютною похибкою, яка не перевищує

заданого числа ε , тобто, щоб виконувались умови $|x_i - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$), достатньо визначити k так, щоб справджувалась нерівність

$$\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \frac{1 - g_1}{g_1} \varepsilon. \quad (3.25)$$

Аналогічну нерівність можна записати також у випадку оцінювання похибки наближеного розв'язку за формулою (3.24).

II.3. Зведення лінійної системи до вигляду, придатного для ітерацій

Розглянемо довільну лінійну систему вигляду (3.1) $AX = B$, визначник якої $|A| \neq 0$.

За допомогою елементарних перетворень рівнянь системи (3.1) цю систему завжди можна звести до еквівалентної системи (3.18), для якої умови (3.21) збіжності ітераційного процесу будуть виконані ([6], гл. VIII, § 11).

На практиці це зведення роблять таким чином. Із даної системи вибирають рівняння, в кожному з яких є коефіцієнт, модуль якого більший від суми модулів усіх інших коефіцієнтів рівняння. Кожне вибране рівняння записують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним. Із рівнянь системи, які залишилися, складають лінійно незалежні між собою лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб одержувати рівняння, аналогічні вибраним, і щоб усі вільні рядки системи були заповнені. При цьому потрібно, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, яка є рівнянням нової системи.

II.4. Метод Зейделя

Розв'язання лінійної системи за методом Зейделя є деякою модифікацією методу простої ітерації. Якщо при обчисленні $(k+1)$ -го наближення будь-якого з невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ за методом простої ітерації використовують тільки k -ті наближення цих невідомих, то при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомого x_i за методом Зейделя враховують вже обчислені $(k+1)$ -і наближення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Виберемо початкові наближення коренів системи (3.18)

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}.$$

Якщо вже відомі k -ті наближення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ коренів системи, то згідно з методом Зейделя $(k+1)$ -і наближення обчислюємо за формулами

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1,$$

Завдання полягає у знаходженні поправок (приростів) до початкових значень x_0, y_0 . Позначимо ці поправки $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ і запишемо розв'язок системи (3.25) у вигляді:

$$x = x_0 + \Delta x^{(0)}; \quad y = y_0 + \Delta y^{(0)}. \quad (3.26)$$

Замість системи (3.25) одержуємо систему

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Розкладемо ці функції в ряд Тейлора в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ та візьмемо тільки лінійні відносно приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ члени розкладу

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= \Phi(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оскільки згідно з (3.27) ліві частини виразів (3.28) повинні дорівнювати нулю, то одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} &= -F(x_0, y_0), \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} &= -\Phi(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Символ $(\quad)_0$ означає, що частинну похідну функції обчислюють у точці $M_0(x_0, y_0)$. Визначник системи (4.29) – це визначник Якобі

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (3.30)$$

обчислений в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо $I(x_0, y_0) \neq 0$, то система (3.30) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta x^{(0)} &= -\frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \right), \\ \Delta y^{(0)} &= \frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

За перше наближення розв'язку системи (3.25) приймаємо значення

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)}, \quad y_1 = y_0 + \Delta y^{(0)}. \quad (3.32)$$

Друге наближення розв'язку одержуємо таким самим способом:

$$x_2 = x_1 + \Delta x^{(1)}, \quad y_2 = y_1 + \Delta y^{(1)},$$

де $\Delta x^{(1)}, \Delta y^{(1)}$ – поправки, які обчислюємо за формулами вигляду (3.31), в яких усі функції та частинні похідні знайдено в точці $M_1(x_1, y_1)$.

Аналогічно одержуємо третє та наступні наближення розв'язку системи (3.25).

III.2. Метод простої ітерації

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь із двома невідомими (3.25). Нехай $x = x_0, y = y_0$ є початковим наближенням розв'язку системи (3.25) $x = \xi, y = \eta$. Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned} x &= f(x, y), \\ y &= \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

і побудуємо послідовність наближень розв'язку системи (3.33) за формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, y_0), \quad y_1 = \varphi(x_0, y_0); \\ x_2 &= f(x_1, y_1), \quad y_2 = \varphi(x_1, y_1); \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n); \end{aligned} \quad (3.34)$$

Нехай ітераційний процес (3.34) збігається, тобто існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta$. Припустимо, що функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ неперервні й перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівностях $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ і $y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, y_n).$$

Звідси одержимо

$$\xi = f(\xi, \eta); \quad \eta = \varphi(\xi, \eta),$$

тобто значення ξ і η є коренями системи (4.9), а, отже, й системи (3.25). Тому, взявши досить велику кількість ітерацій (4.34), отримаємо наближення розв'язку, яке буде відрізнятися від точного розв'язку системи (3.25) як завгодно мало.

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай в деякій замкненій області $G\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ міститься тільки один розв'язок системи (4.33) $x = \xi, y = \eta$. Якщо:

- 1) функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ визначені і неперервно диференційовні в G ;
- 2) початкові наближення x_0, y_0 і усі наступні наближення x_n, y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) містяться в області G ;
- 3) в області G виконуються умови

$$\begin{aligned} |f'_x(x, y)| + |\varphi'_x(x, y)| &\leq g_1 < 1, \\ |f'_y(x, y)| + |\varphi'_y(x, y)| &\leq g_2 < 1, \end{aligned} \quad (3.35)$$

то послідовність наближень (4.34) збігається до коренів $x = \xi$, $y = \eta$ системи (3.33), тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Зауваження. Умови (4.35) можна замінити такими умовами:

$$\begin{aligned} |f'_x(x, y)| + |f'_y(x, y)| &\leq g_1 < 1, \\ |\varphi'_x(x, y)| + |\varphi'_y(x, y)| &\leq g_2 < 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Розглянемо один зі способів, яким можна звести систему рівнянь (3.25) до вигляду (4.33) з дотриманням умов (3.35). Запишемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y) &= 0, \\ \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

яка еквівалентна системі (3.25) за умови, що визначник $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

Перепишемо її так:

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y), \\ y &= y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y) &= f(x, y), \\ y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y) &= \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Виберемо параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такими, щоб частинні похідні функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ дорівнювали нулю або були досить близькі до нуля при початковому наближенні $x = x_0$, $y = y_0$, тобто знайдемо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ як наближений розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} 1 + \alpha F'_x(x_0, y_0) + \beta \Phi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ \alpha F'_y(x_0, y_0) + \beta \Phi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ \gamma F'_x(x_0, y_0) + \delta \Phi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ 1 + \gamma F'_y(x_0, y_0) + \delta \Phi'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

При такому виборі параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ умови (4.35) будуть виконані в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, оскільки ми припустили, що частинні похідні функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ неперервні.

Приклад 2.1. Відокремити корені рівняння $\sin x - x^2 + 1 = 0$.

Розв'язування. Запишемо це рівняння у вигляді $\sin x = x^2 - 1$ і побудуємо графіки функцій $y = \sin x$ та $y = x^2 - 1$.

Ці графіки перетинаються у точках А та В, тому дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2 , які є абсцисами цих точок. З рисунка 2.4 бачимо, що

$$-1 < \xi_1 < -0,4; \quad 1 < \xi_2 < 1,5.$$

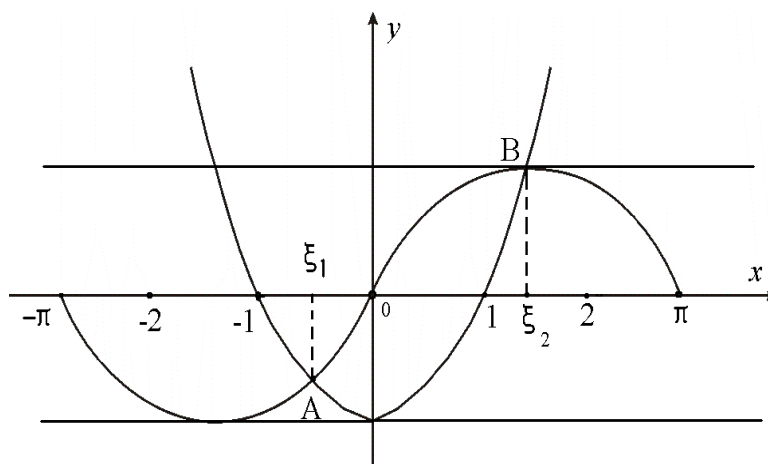


Рисунок 2.4

Приклад 2.2. Методом хорд знайти додатний корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язування. Відокремимо корені цього рівняння. Запишемо його у вигляді $x^4 = 2x + 4$ і побудуємо графіки функцій $y = x^4$ та $y = 2x + 4$ (рис. 2.5).

Дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2 . Додатний корінь ξ_1 міститься на відрізку $[1, 2]$.

Звузимо цей відрізок методом половинного поділу. Оскільки

$$f(x) = x^4 - 2x - 4 \text{ і } f(1,5) = -1,938 < 0,$$

то корінь міститься на відрізку $[1,5; 2]$. Оскільки $f(1,7) = 0,952 > 0$, то корінь ξ_1 розміщений на відрізку $[1,5; 1,7]$.

$$f'(x) = 4x^3 - 2; \quad f''(x) = 12x^2;$$

$$f''(x) > 0 \text{ при всіх } x.$$

Застосуємо формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (b - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots):$$

Рисунок 2.5

$$x_1 = 1,5 - \frac{f(1,5)}{f'(1,5)} (1,7 - 1,5) = 1,634, \quad f(1,634) = -0,139.$$

$$x_2 = 1,634 - \frac{f(1,634)}{f(1,7) - f(1,634)}(1,7 - 1,634) = 1,642, \quad f(1,642) = -0,015.$$

$$x_3 = 1,642 - \frac{f(1,642)}{f(1,7) - f(1,642)}(1,7 - 1,642) = 1,643, \quad f(1,643) = 0,001.$$

Оскільки $f(1,642) < 0$, $f(1,643) > 0$, то з точністю до 0,01 шуканий корінь ξ дорівнює 1,64.

Приклад 2.3. Методом дотичних знайти найбільший корінь ξ рівняння $2x - \ln x - 6 = 0$ з точністю до 0,0001.

Розв'язування. Застосувавши графічний метод відокремлення коренів рівняння, неважко встановити, що дане рівняння має два корені, розміщені відповідно на відрізках $[0; 1]$ та $[3; 4]$. Обчислимо більший з цих коренів, тобто корінь $\xi \in [3; 4]$.

$$\text{Маємо } f(x) = 2x - \ln x - 6; \quad f(3) = -1.09861; \quad f(4) = 0,61371;$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{На відрізку } [3; 4] \quad f'(x) > 0 \quad \text{і} \quad f''(x) > 0.$$

Оскільки $f(4) \cdot f''(4) > 0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0 = 4$. Формулу (2.18) запишемо у вигляді

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad \text{де} \quad \Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Результати обчислень запишемо у таблицю.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δx_n
0	4	0,61371	1,75000	- 0,35069
1	3,64931	0,00408	1,72598	- 0,00237
2	3,64694	0,00001		

Для оцінювання абсолютної похибки наближеного значення x_2 застосуємо формулу (2.13). Оскільки при $x \in [3; 4]$ $f'(x)$ зростає і $f'(x) > 0$, то $m_1 = f'(3) = 1,66667 > 1,6$. Тому $|\xi - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} < \frac{0,00001}{1,6}$, звідки отримуємо

$$|\xi - x_2| < 0,0000063 < 0,00001.$$

Отже, наближене значення кореня ξ з точністю до 0,0001 $\xi^* = 3,6469$.

Приклад 2.4. Обчислити корені рівняння $x \ln x - 1 = 0$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0,00001$.

Розв'язування. Запишемо дане рівняння у вигляді $\ln x = \frac{1}{x}$. Побудувавши графіки функцій $y = \ln x$ та $y = \frac{1}{x}$, визначимо, що дане рівняння має єдиний корінь ξ , який міститься на відрізку $[1,5; 2]$.

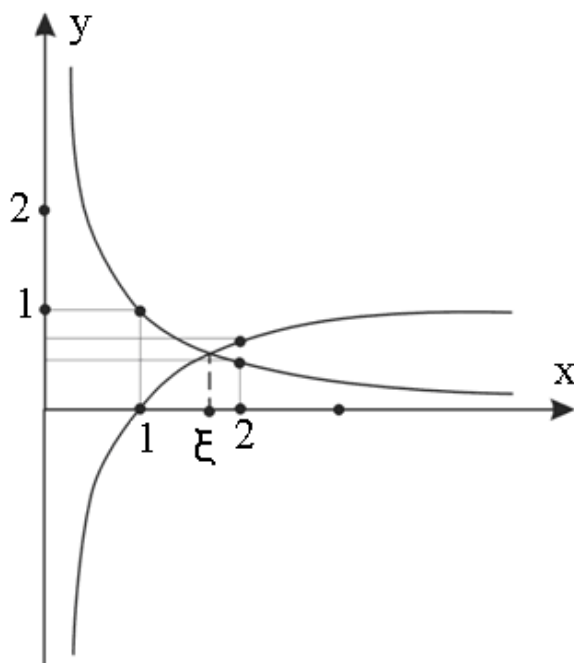


Рисунок 2.6

Представимо дане рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$. Це можна зробити кількома способами:

1. Якщо записати рівняння $x \ln x - 1 = 0$ у вигляді $x = \frac{1}{\ln x}$, то

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} \text{ і } |\varphi'(x)| > 1 \text{ на відрізку } [1,5; 2].$$

2. Якщо дане рівняння записати у вигляді $x = e^{\frac{1}{x}}$, то $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $\varphi'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$,

$\varphi'(1,5) = -0,87$, $\varphi'(2) = -0,41$ і $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, де $q = 0,87$ (оскільки похідна $\varphi'(x)$ неперервна на відрізку $[1,5; 2]$).

3. Запишемо дане рівняння у вигляді $x = x + \lambda(x \ln x - 1)$.

$$\varphi(x) = x + \lambda(x \ln x - 1), \quad \varphi'(x) = 1 + \lambda(\ln x + 1).$$

Нехай $\varphi'(1,5) = 0$. Для визначення параметра одержуємо рівняння

$$1 + \lambda(\ln 1,5 + 1) = 0.$$

Звідси одержуємо $\lambda = -0,71$. Тоді $\varphi'(2) = 1 - 0,71(\ln 2 + 1) = -0,202$. Отже, $|\varphi'(x)| \leq q_1 < 1$ на відрізку $[1,5; 2]$, де $q_1 = 0,21$.

Із двох останніх способів вибираємо третій, оскільки $q_1 < q$.

Таким чином, задане рівняння $x \ln x - 1 = 0$ ми записали у вигляді

$$x = x - 0,71(x \ln x - 1), \text{ тобто } \varphi(x) = x - 0,71(x \ln x - 1).$$

За початкове наближення кореня ξ прийнемо середину відрізка $[1,5; 2]$, тобто $x_0 = 1,75$.

Послідовні наближення $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ обчислюємо за формулою

$$x_{n+1} = x_n - 0,71(x_n \ln x_n - 1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отримаємо:

$$x_1 = 1,75 - 0,71(1,75 \ln 1,75 - 1) = 1,765,$$

$$x_2 = 1,765 - 0,71(1,765 \ln 1,765 - 1) = 1,7630,$$

$$x_3 = 1,7630 - 0,71(1,7630 \ln 1,7630 - 1) = 1,76325,$$

$$x_4 = 1,76325 - 0,71(1,76325 \ln 1,76325 - 1) = 1,76322.$$

Оскільки повинна виконуватися нерівність :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-0,21}{0,21} \cdot 0,00001, \text{ тобто } |x_n - x_{n-1}| \leq 3,77 \cdot 10^{-5},$$

то обчислення припиняємо.

Отже, наближене значення кореня $\xi^* = 1,76322$ з точністю до 10^{-5} .

Зауважимо, що при підстановці ξ^* у ліву частину даного рівняння $x \ln x - 1 = 0$ отримуємо $\xi^* \ln \xi^* - 1 = 4,5 \cdot 10^{-6}$.

Приклад 2.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$7,24x_1 + 0,93x_2 - 4,65x_3 + 1,29x_4 = -0,13,$$

$$-2,61x_1 + 3,12x_2 + 4,97x_3 - 0,78x_4 = -1,56,$$

$$3,18x_1 + 0,84x_2 - 2,88x_3 = -4,13,$$

$$0,92x_1 + 1,38x_2 - 2,54x_4 = 3,69.$$

Розв'язування. Запишемо розширену матрицю цієї системи і виконаємо перетворення, які зводять розширену матрицю до трикутної форми. Усі обчислення наведено в таблиці.

7,24	0,93	- 4,65	1,29	- 0,13
- 2,61	3,12	4,97	- 0,78	- 1,56
3,18	0,84	- 2,88	0	- 4,13
0,92	1,38	0	- 2,54	3,69
1	0,1285	- 0,6423	0,1782	- 0,0180
0	3,4554	3,2936	- 0,3149	- 1,6070
0	0,4314	- 0,8375	- 0,5667	- 4,0728
0	1,2618	0,5909	- 2,7039	3,7066
	1	0,9532	- 0,0911	- 0,4651
	0	- 1,2487	- 0,5272	- 3,8722
	0	- 0,6118	- 2,5889	4,2935

		1	0,4222	3,1010
		0	- 2,3306	6,1907
			1	- 2,6563
		1	0	4,2225
	1	0	0	- 4,7320
1	0	0	0	3,7755

Отже, $x_1 = 3,7755$, $x_2 = -4,7320$, $x_3 = 4,2225$, $x_4 = -2,6563$.

Приклад 2.6. Методом простої ітерації знайти з точністю до $\varepsilon = 0,005$ розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -1,2x_1 + 0,3x_2 - 0,4x_3 = 2,9, \\ 0,2x_1 + 2,5x_2 - 0,6x_3 = -1,5, \\ 0,3x_1 + 0,6x_2 + 1,5x_3 = 3,6. \end{cases}$$

Розв'язування. Зведемо цю систему до вигляду $X = \alpha X + \beta$, для цього перше рівняння розв'яжемо відносно x_1 , друге – відносно x_2 третє – відносно x_3 .

$$\begin{cases} x_1 = 0,2500x_2 - 0,3333x_3 - 2,4167, \\ x_2 = -0,0800x_1 + 0,2400x_3 - 0,6000, \\ x_3 = -0,2000x_1 - 0,4000x_2 + 2,4000. \end{cases}$$

Коефіцієнти отриманої системи задовольняють умову $\max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| = g_1 < 1$.

Справді,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\alpha_{1j}| &= 0,5833, \quad \sum_{j=1}^3 |\alpha_{2j}| = 0,3200, \quad \sum_{j=1}^3 |\alpha_{3j}| = 0,6000, \\ \max_i \sum_{j=1}^3 |\alpha_{ij}| &= g_1 = 0,6 < 1. \end{aligned}$$

Отже, процес простої ітерації збігається; при цьому точність k -го наближення можна оцінити за формулою $\max_i |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{g_1}{1 - g_1} \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

За нульове наближення візьмемо, наприклад, елементи стовпця вільних членів

$$x_1^{(0)} = -2,4167; \quad x_2^{(0)} = -0,6000; \quad x_3^{(0)} = 2,4000.$$

Наступні наближення будемо обчислювати за формулами

$$x_i^{(0)} = \beta_i, \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=0, 1, 2, \dots).$$

Закінчимо обчислення тоді, коли буде виконана умова

$$\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \frac{1-g_1}{g_1} \varepsilon.$$

$$x_1^{(1)} = 0,2500 \cdot (-0,6000) - 0,3333 \cdot 2,4000 - 2,4167 = -3,3666,$$

$$x_2^{(1)} = -0,0800 \cdot (-2,4167) + 0,2400 \cdot 2,4000 - 0,6000 = 0,1693,$$

$$x_3^{(1)} = -0,200 \cdot (-2,4167) - 0,4000 \cdot (-0,6000) + 2,4000 = 3,1233 \quad \text{і т.д.}$$

Отримані результати запишемо у таблицю.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	-2,4167	-0,6000	2,4000
1	-3,3666	0,1693	3,1233
2	-3,4144	0,4189	3,0056
3	-3,3137	0,3945	2,9153
4	-3,2897	0,3648	2,9049
5	-3,2937	0,3604	2,9120
6	-3,2972	0,3624	2,9153
7	-3,2978	0,3634	2,9145

Оскільки $\frac{1-g_1}{g_1} \varepsilon = \frac{1-0,6}{0,6} \cdot 0,005 = 0,0033$, то нерівність

$$\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \frac{1-g_1}{g_1} \varepsilon \quad \text{справджується при } k = 7. \text{ Тому за наближені значення}$$

невідомих потрібно взяти $x_1^{(7)}$, $x_2^{(7)}$, $x_3^{(7)}$:

$$x_1 = -3,298; \quad x_2 = 0,363; \quad x_3 = 2,914.$$

Приклад 2.7. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя.

$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$

$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22,$$

$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38.$$

Розв'язування. Зведемо цю систему до вигляду $X = \alpha X + \beta$, для цього рівняння даної системи запишемо в такому порядку:

$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38,$$

$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$

$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22.$$

Перше з цих рівнянь розв'яжемо відносно x_1 , друге – відносно x_2 , третє – відносно x_3 . Одержимо еквівалентну систему

$$x_1 = 0,21x_2 - 0,09x_3 + 0,38,$$

$$x_2 = 0,12x_1 + 0,13x_3 + 0,82,$$

$$x_3 = 0,28x_1 - 0,19x_2 + 0,22,$$

яка задовольняє достатню умову збіжності ітераційного процесу.

За початкове (нульове) наближення візьмемо, наприклад, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. Наступні наближення будемо обчислювати за формулами

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{g_2}{1 - g_2} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

$$x_1^{(1)} = 0,38; \quad x_2^{(1)} = 0,12 \cdot 0,38 + 0,13 \cdot 0 + 0,82 = 0,87,$$

$$x_3^{(1)} = 0,28 \cdot 0,38 - 0,19 \cdot 0,87 + 0,22 = 0,16,$$

$$x_1^{(2)} = 0,21 \cdot 0,87 - 0,09 \cdot 0,16 + 0,38 = 0,548,$$

$$x_2^{(2)} = 0,12 \cdot 0,548 + 0,13 \cdot 0,16 + 0,82 = 0,907,$$

$$x_3^{(2)} = 0,28 \cdot 0,548 - 0,19 \cdot 0,907 + 0,22 = 0,201 \quad \text{і т.д.}$$

Одержані результати запишемо у таблицю.

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	0,38	0,548	0,5524	0,5535	0,55350
$x_2^{(k)}$	0	0,87	0,907	0,9124	0,9126	0,91263
$x_3^{(k)}$	0	0,16	0,201	0,2013	0,2016	0,20158

Оскільки четверте та п'яте наближення розв'язку досить близькі одне до одного, то можна прийняти: $x_1 = 0,5535$, $x_2 = 0,9126$, $x_3 = 0,2016$.

Приклад 2.8. Знайти наближено додатні корені системи рівнянь

$$x + 3\lg x - y^2 = 0,$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$$

Розв'язування. Якщо побудувати графіки функцій $x + 3\lg x - y^2 = 0$ і $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$, то можна визначити наближено координати їх точок перетину. Таких точок є дві: $A(1,4; -1,4)$ та $B(3,4; 2,2)$. Нас цікавлять додатні корені системи, тому точку $B(3,4; 2,2)$ приймемо за початкову точку M_0 . Отже, початкове наближення додатного розв'язку даної системи $x_0 = 3,4$; $y_0 = 2,2$.

$$F(x, y) = x + 3\lg x - y^2,$$

$$\Phi(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x \ln 10}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x.$$

Обчислимо значення функцій $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$, їх похідних та визначника $I(x, y)$ в точці $M_0(3, 4; 2, 2)$.

$$F(3, 4; 2, 2) = 0,1544, \quad \Phi(3, 4; 2, 2) = -0,36,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = 1,3832, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 = -4,4,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 = 6,4, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_0 = -3,4,$$

$$I(3, 4; 2, 2) = \begin{vmatrix} 1,3832 & -4,4 \\ 6,4 & -3,4 \end{vmatrix} = 23,4571.$$

Обчислимо поправки за формулами

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \right),$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \right).$$

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{23,4571} (-0,1544 \cdot 3,4 - 0,36 \cdot 4,4) = 0,0899 \approx 0,090,$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{23,4571} (0,1544 \cdot 6,4 + 0,36 \cdot 1,3832) = 0,0634 \approx 0,063.$$

Перше наближення розв'язку системи отримуємо

$$x_1 = 3,4 + 0,090 = 3,490, \quad y_1 = 2,2 + 0,063 = 2,263.$$

Щоб знайти друге наближення розв'язку, обчислимо величини $\Delta x^{(1)}$ та $\Delta y^{(1)}$.

$$F(3,490; 2,263) = -0,0027, \quad \Phi(3,490; 2,263) = 0,0123,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 = 1,3733, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 = -4,526,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_1 = 6,697, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 = -3,490,$$

$$I(3,490; 2,263) = 25,5178, \quad \Delta x^{(1)} = -0,0026, \quad \Delta y^{(1)} = -0,0014.$$

$$\text{Отже, } x_2 = 3,490 - 0,0026 = 3,4874, \quad y_2 = 2,263 - 0,0014 = 2,2616.$$

Якщо повторити усі операції з одержаним другим наближенням розв'язку цієї системи, то одержимо поправки $\Delta x^{(2)}$, $\Delta y^{(2)}$, менші від 10^{-4} . Підставивши значення x_2 та y_2 у ліві частини рівнянь заданої системи отримаємо

$$F(3,4874; 2,2616) = 7 \cdot 10^{-5}, \quad \Phi(3,4874; 2,2616) = -2,2 \cdot 10^{-4}.$$

Зупиняючись на другому наближенні, одержимо $x = 3,4874$, $y = 2,2616$.

Приклад 2.9. Методом простої ітерації знайти корені системи рівнянь

$$x^2 + y - 4 = 0,$$

$$y - \lg x - 1 = 0$$

з точністю до 0,001.

Розв'язування. Побудуємо лінії $y = 4 - x^2$ та $y = \lg x + 1$. Корені даної системи – це координати точки перетину цих двох ліній.

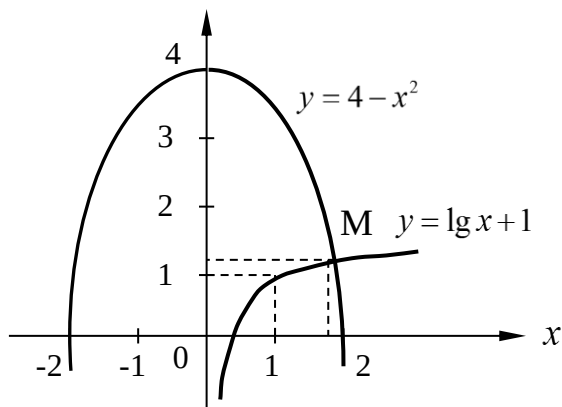


Рисунок 2.7

З рисунка бачимо, що за нульове наближення цих коренів можна взяти числа $x_0 = 1,75$; $y_0 = 1,25$.

Згідно з умовою задачі

$$F(x, y) = x^2 + y - 4,$$

$$\Phi(x, y) = y - \lg x - 1.$$

Задану систему перепишемо у вигляді

$$x = x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y),$$

$$y = y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y).$$

Знайдемо частинні похідні функцій $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$.

$$F'_x(x, y) = 2x; \quad F'_y(x, y) = 1; \quad \Phi'_x(x, y) = -\frac{1}{x \ln 10}; \quad \Phi'_y(x, y) = 1.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці $M_0(1,75; 1,25)$ і запишемо систему лінійних рівнянь для визначення параметрів α , β , γ , δ .

$$1 + 3,5\alpha - 0,25\beta = 0,$$

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$3,5\gamma - 0,25\delta = 0,$$

$$1 + \gamma + \delta = 0.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$\alpha = -0,27, \quad \beta = 0,27, \quad \gamma = -0,07, \quad \delta = -0,93.$$

Отже, задана система має вигляд

$$x = x - 0,27 F(x, y) + 0,27 \Phi(x, y),$$

$$y = y - 0,07 F(x, y) - 0,93 \Phi(x, y).$$

Запишемо формули для обчислення послідовних наближень розв'язку системи

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - 0,27 F(x_n, y_n) + 0,27 \Phi(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n - 0,07 F(x_n, y_n) - 0,93 \Phi(x_n, y_n), \\(n &= 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

або

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x^{(n)}, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y^{(n)},$$

де

$$\begin{aligned}\Delta x^{(n)} &= -0,27 F(x_n, y_n) + 0,27 \Phi(x_n, y_n), \\ \Delta y^{(n)} &= -0,07 F(x_n, y_n) - 0,93 \Phi(x_n, y_n).\end{aligned}$$

Обчислимо перше наближення x_1, y_1 за формулами

$$x_1 = f(x_0, y_0), \quad y_1 = \varphi(x_0, y_0);$$

$$x_2 = f(x_1, y_1), \quad y_2 = \varphi(x_1, y_1);$$

.....

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n);$$

.....

при $n=0$

$$F(1,75; 1,25) = 1,75 + 1,25 - 4 = 0,31,$$

$$\Phi(1,75; 1,25) = 1,25 - \lg 1,75 - 1 = 0,007,$$

$$\Delta x^{(0)} = -0,27 \cdot 0,31 + 0,27 \cdot 0,007 = -0,08,$$

$$\Delta y^{(0)} = -0,07 \cdot 0,31 - 0,93 \cdot 0,007 = -0,03,$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)} = 1,75 - 0,08 = 1,67,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y^{(0)} = 1,25 - 0,03 = 1,22.$$

Аналогічно обчислюємо друге та третє наближення. Одержані результати запишемо у таблицю.

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	$\Phi(x_n, y_n)$	$\Delta x^{(n)}$	$\Delta y^{(n)}$
0	1,75	1,25	0,31	0,007	- 0,08	- 0,03
1	1,67	1,22	0,009	- 0,003	-	-
2	1,667	1,222	0,0009	0,0001	0,003	0,002
3	1,666	1,221			-	-
	8	8			0,000	0,000
					2	2

Оскільки $|\Delta x^{(2)}| < 0,0005$, $|\Delta y^{(2)}| < 0,0005$, то з точністю до 0,001 можна прийняти $x = 1,667$, $y = 1,222$.

Тема 3. Апроксимація функцій.

Нехай величина y є функцією аргументу x , тобто будь-якому значенню x з області визначення цієї функції поставлено у відповідність одне значення y . Проте на практиці часто неможливо записати цю функціональну залежність у вигляді формули $y = f(x)$. У деяких випадках аналітичний вираз $y = f(x)$ хоч і відомий, але настільки громіздкий, що його важко використовувати в практичних розрахунках.

Найчастіше на практиці функцію задають у вигляді таблиці: дискретній множині значень аргументу $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ поставлено у відповідність множину значень функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Ці значення є або результатами обчислень, або експериментальними даними. Часто бувають потрібні значення функції і в інших точках, що не співпадають із точками x_i . Проте в багатьох випадках одержати ці значення можна тільки шляхом складних обчислень або проведенням дорогих експериментів.

Таким чином, з точки зору економії часу і коштів, ми приходимо до необхідності використання наявних табличних даних для наближеного обчислення значень функції y при будь-якому значенні x із деякої області. Саме цій меті й служить задача про наближення (апроксимацію) функції: дану функцію $f(x)$ потрібно наблизити (апроксимувати) деякою іншою функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення (в деякому розумінні) $\varphi(x)$ від $f(x)$ було найменшим в заданій області. Функцію $\varphi(x)$ називають апроксимуючою. Найчастіше за апроксимуючу функцію беруть алгебраїчний многочлен, оскільки значення многочлена обчислюють просто, наприклад, за схемою Горнера, його легко диференціювати, інтегрувати і т. д.

Якщо наближення будують на заданій дискретній множині точок $\{x_i\}$, то апроксимацію називають точковою. До неї відносять інтерполяцію, середньоквадратичне наближення та інші. При побудові наближення на неперервній множині точок (наприклад, на відрізку $[a, b]$) апроксимацію називають неперервною.

Одним із основних видів точкової апроксимації є інтерполяція, яка полягає в тому, що для функції $f(x)$ будують многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (3.1)$$

який приймає в заданих точках x_i ті самі значення y_i , що і функція $f(x)$, тобто

$$P(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

При цьому припускають, що серед значень x_i немає однакових. Точки x_i називають вузлами інтерполяції, а многочлен $P(x)$ – інтерполяційним многочленом. Найвищий степінь многочлена (4.1) може дорівнювати n . У цьому випадку інтерполяцію називають глобальною, оскільки один многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.3)$$

використовують для інтерполяції функції $f(x)$ на всьому інтервалі зміни аргументу x . Коефіцієнти $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ многочлена (3.3) визначають із системи рівнянь (3.2). Визначник системи (3.2) має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називають визначником Вандермонда. Він дорівнює добутку всіх можливих різниць $x_i - x_j$, де $0 \leq j < i \leq n$. Тому цей визначник не перетворюється в нуль, якщо усі значення $x_0, x_1, \dots, x_n$ різні.

Отже, система рівнянь (3.2) має єдиний розв'язок при $x_i \neq x_k (i \neq k)$.

Інтерполяційні многочлени можна будувати для різних частин інтервалу зміни x . У цьому випадку маємо кускову (локальну) інтерполяцію.

Отже, при інтерполяції вимагають, щоб графік інтерполяційного многочлена проходив через задані в таблиці точки графіка функції. Проте в багатьох випадках виконання цієї умови утруднене (наприклад, при задаванні великої кількості вузлів) або навіть недоцільне (якщо, наприклад, табличні дані одержані шляхом вимірювань і містять помилки). Побудова апроксимуючого многочлена з умовою обов'язкового проходження його графіка через усі експериментальні точки означала б повторення допущених при вимірюваннях помилок.

Тому часто апроксимуючий многочлен вибирають так, щоб його графік проходив близько від даних точок, а поняття “близько” уточнюють при розгляді різних видів наближення. Одним із таких видів є середньоквадратичне наближення функції за допомогою многочлена (3.1).

Мірою відхилення многочлена $P(x)$ від заданої функції $f(x)$ на множині точок $(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ при середньоквадратичному наближенні є величина S , що дорівнює сумі квадратів різниць між значеннями многочлена та функції в заданих точках:

$$S = \sum_{i=0}^n (P(x_i) - y_i)^2. \quad (3.4)$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_m$ апроксимуючого многочлена (3.1) потрібно підібрати так, щоб величина S була найменшою. В цьому полягає метод найменших квадратів.

Середньоквадратичне наближення застосовують у багатьох випадках, зокрема при опрацюванні експериментальних даних.

Проте іноді при побудові наближення ставиться більш жорстка умова: вимагається, щоб в усіх точках деякого відрізка $[a, b]$ відхилення многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ за абсолютною величиною було меншим від заданого числа $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

У цьому випадку кажуть, що многочлен $P(x)$ рівномірно апроксимує функцію $f(x)$ на відрізок $[a, b]$ з точністю ε .

Абсолютним відхиленням Δ многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називають максимальне значення абсолютної величини різниці між ними на даному відрізку:

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| \quad (3.5)$$

Можливість побудови многочлена, який рівномірно наближує дану функцію, впливає з теореми Вейерштрасса про апроксимацію.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P(x)$ степеня $m = m(\varepsilon)$, абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ менше від ε .

Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ розкладається у рівномірно збіжний степеневий ряд, то за апроксимуючий многочлен можна взяти частинну суму цього ряду.

Існує також поняття найкращого наближення функції $f(x)$ многочленом $P(x)$ фіксованого степеня. В цьому випадку многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ потрібно вибрати так, щоб на заданому відрізку $[a, b]$ величина абсолютного відхилення (3.5) була найменшою. Тоді многочлен $P(x)$ називають многочленом найкращого рівномірного наближення. Існування і єдиність многочлена найкращого рівномірного наближення впливає з такої теореми.

Теорема. Для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, і будь-якого натурального числа m існує многочлен степеня, не вищого від m , абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ мінімальне, причому такий многочлен єдиний.

1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Розглядаємо функцію $y = f(x)$, для якої задані її значення $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Потрібно знайти многочлен $P(x)$ степеня n (4.3), для якого виконуються умови (4.2).

Систему лінійних рівнянь (4.2) запишемо в розгорнутому вигляді:

[illegible]

Як вже було сказано, ця система має єдиний розв'язок, якщо всі значення $x_0, x_1, \dots, x_n$ різні. Визначивши значення коефіцієнтів a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) із системи

(3.6), одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ (3.3), який дає розв'язок поставленої задачі.

Але замість того, щоб розв'язувати систему (3.6), можна безпосередньо побудувати многочлен $P(x)$, який задовольняє умови (3.2).

Спочатку знайдемо вираз для многочлена $P_0(x)$, який в точці $x = x_0$ приймає значення y_0 , а в усіх інших точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ дорівнює нулю, тобто $P_0(x_0) = y_0$, $P_0(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Неважко перевірити, що цей многочлен має вигляд

$$P_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0.$$

Аналогічно будемо многочлен $P_j(x)$, який в точці $x = x_j$ приймає значення y_j , а в усіх інших точках дорівнює нулю, тобто

$$P_j(x_j) = y_j, \quad P_j(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n; i \neq j).$$

Це є многочлен вигляду

$$P_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} y_j.$$

Шуканий многочлен дорівнює сумі усіх цих многочленів

$$P(x) = \sum_{j=0}^n P_j(x),$$

оскільки в кожній точці x_j один із доданків приймає значення y_j , а всі інші доданки дорівнюють нулю.

Отже, многочлен $P(x)$, який задовольняє умови поставленої задачі, знайдено:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} y_j. \quad (3.7)$$

Цей многочлен називають інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Доведемо, що цей інтерполяційний многочлен єдиний. Припустимо протилежне: існує ще один многочлен $R(x)$ степеня n , який приймає у вузлах інтерполяції задані значення, тобто $R(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Тоді різниця $Q(x) = P(x) - R(x)$ є многочленом степеня не вищого від n , який перетворюється в нуль у точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, тобто має $n+1$ коренів. Звідси випливає, що $Q(x) \equiv 0$, тобто $P(x) \equiv R(x)$, оскільки многочлен степеня не вищого від n не може мати $n+1$ коренів.

З формули (3.7) можна одержати вирази для лінійної ($n = 1$) і квадратичної ($n = 2$) інтерполяцій:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad (n = 1); \quad (3.8)$$

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2, \quad (n=2). \quad (3.9)$$

2. Інтерполяційна схема Ейткена

Для практичного знаходження значень функції інтерполяційна формула Лагранжа (3.7) не дуже зручна. Значно зручніше обчислювати за інтерполяційною схемою Ейткена.

Формулу (3.8) для лінійної інтерполяції, тобто у випадку задавання двох точок (x_0, y_0) та (x_1, y_1) , можна записати у вигляді

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Інтерполяцію вищого степеня виконуємо аналогічно, причому для побудови кожного многочлена наступного степеня використовуємо вже побудовані попередні.

Якщо задано три точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то спочатку будуємо два лінійні многочлени $P_{0,1}(x)$ та

$$P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Многочлен другого степеня (3.9) буде мати вигляд

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}, \quad (3.12)$$

тобто значення функції в точці x , що відповідає інтерполяції другого степеня (3.9), одержуємо шляхом лінійної інтерполяції між значеннями лінійних многочленів $P_{0,1}(x)$ та $P_{1,2}(x)$.

Ця схема легко узагальнюється на вищі степені. Наприклад, при інтерполяції третього степеня за чотирма точками (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) (кубічна інтерполяція) справедлива формула

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{x_3 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

де многочлен $P_{0,1,2}(x)$ визначається формулою (3.12), а $P_{1,2,3}(x)$ побудований аналогічно.

Взагалі, якщо дано $n+1$ точок (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$, то інтерполяційний многочлен n -го степеня одержуємо за формулою

$$P_{0,1,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}, \quad (3.14)$$

в яку входять вже побудовані інтерполяційні многочлени попереднього степеня.

Неважко переконатися в тому, що формула (3.14), якщо її виразити послідовно через значення функції $y_0, y_1, \dots, y_n$, перетвориться у формулу (3.7).

3. Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа. Многочлени Чебишева. Оптимальний вибір вузлів інтерполяції.

Значення інтерполяційного многочлена Лагранжа $P(x)$ у вузлах інтерполяції x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) дорівнюють відповідним значенням функції $f(x)$ у цих точках. В інших точках $x \in [x_0, x_n]$ в загальному випадку $f(x) \neq P(x)$. $R_n(x) = f(x) - P(x)$ називають залишковим членом інтерполяційної формули (3.7).

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$, де містяться всі вузли інтерполяції, функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно. В цьому випадку залишковий член інтерполяційного многочлена Лагранжа має вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (3.15)$$

де $f^{(n+1)}(\xi)$ – значення похідної $(n+1)$ -го порядку функції $f(x)$ в деякій точці $\xi \in (a, b)$.

Якщо ввести позначення найбільшого значення $|f^{(n+1)}(x)|$ на відрізку $[a, b]$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1},$$

то з рівності (3.15) одержимо оцінку похибки інтерполяції:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (3.16)$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Аналізуючи формулу (3.16), бачимо, що похибка інтерполяції з точністю до числового множника залежить від добутку двох співмножників: M_{n+1} та $|\omega_{n+1}(x)|$. Перший співмножник M_{n+1} залежить від властивостей функції $f(x)$ і не підлягає регулюванню. Другий співмножник визначають тільки вибором вузлів інтерполяції: $x_0, x_1, \dots, x_n$. Тому виникає запитання: як вибрати вузли інтерполяції на відрізку $[a, b]$, щоб величина $\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$ мала найменше значення?

Для відповіді на це запитання нам потрібно розглянути многочлени Чебишева.

Многочлени Чебишева $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) визначають на відрізку $[-1, 1]$ формулою

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (3.17)$$

Зокрема, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Для обчислення многочленів Чебишева можна користуватися рекурентною формулою

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n=1,2,\dots). \quad (3.18)$$

Наприклад,

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \text{ і т.д.}$$

Наведемо основні властивості многочленів Чебишева.

1. При парному (непарному) n многочлен $T_n(x)$ є парною (непарною) функцією.
2. Коефіцієнт при x^n многочлена $T_n(x)$ дорівнює 2^{n-1} , якщо $n \geq 1$.
3. $T_n(x)$ має n дійсних коренів в інтервалі $(-1, 1)$, які виражаються формулою

$$\xi_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad (i=0,1,2,\dots,n-1).$$

$$4. \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1.$$

5. Многочлен

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \geq 1 \quad (3.19)$$

серед усіх многочленів n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, має на відрізку $[-1, 1]$ найменше значення максимуму модуля, тобто не існує такого многочлена $\bar{P}_n(x)$ n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1, щоб

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\bar{P}_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Завдяки властивості 5 многочлени Чебишева $T_n(x)$ називають многочленами, які найменше відхиляються від нуля.

Нехай ми виконуємо інтерполяцію на відрізку $[-1, 1]$. Візьмемо за вузли інтерполяції корені многочлена Чебишева $T_{n+1}(x)$, тобто точки

$$\xi_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad (i=0,1,2,\dots,n). \quad (3.20)$$

Тоді многочлен $\omega_{n+1}(x)$ виразиться через $T_{n+1}(x)$ таким чином:

$$\omega_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x).$$

При цьому згідно з властивістю 4 многочленів Чебишева оцінка похибки інтерполяції (3.16) набуде вигляду

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n}, \quad (3.21)$$

де $M_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|.$

Згідно з властивістю 5 многочленів Чебишева оцінку (3.16) покращити на відрізку $[-1, 1]$ порівняно з оцінкою (3.21) за рахунок іншого вибору вузлів інтерполяції неможливо.

Отже, вузли інтерполяції (3.20) є оптимальними на відрізку $[-1, 1]$.

У випадку інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ лінійною заміною незалежної змінної

$$x = \frac{1}{2}((b-a)t + b + a), \quad t = \frac{1}{b-a}(2x - a - b) \quad (3.22)$$

відрізок $[a, b]$ переводиться у відрізок $[-1, 1]$. При цьому кореням многочлена Чебишева $T_{n+1}(x)$ відповідають точки

$$x_i = \frac{1}{2} \left((b-a) \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2} + b + a \right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (3.23)$$

відрізка $[a, b]$, які будуть оптимальними вузлами інтерполяції на цьому відрізку.

Враховуючи формули (3.16), (3.19), (3.20), (3.22), (3.23) і властивість 4 многочленів Чебишева, одержуємо оцінку похибки інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ при оптимальному виборі вузлів інтерполяції.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad (3.24)$$

де $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$.

Зауваження. Порівняємо оцінки похибок при апроксимації функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ многочленом Тейлора n -го степеня

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.25)$$

та інтерполяційним многочленом Лагранжа (3.7) з вузлами (3.23).

При побудові многочлена Тейлора (3.25) доцільно взяти $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Тоді оцінка похибки многочлена Тейлора має вигляд

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad (3.26)$$

тобто вона в 2^n разів більша від оцінки (3.24).

Крім того, похибка інтерполяційного многочлена розподілена рівномірніше на відрізку $[a, b]$, ніж у многочлена Тейлора, і для побудови інтерполяційного многочлена не потрібно обчислювати похідних функції, а використовувати тільки значення цієї функції.

4. Скінченні різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона

Припустимо, що табличні значення аргументу $x_0, x_1, \dots, x_n$ є рівновіддаленими, тобто утворюють арифметичну прогресію

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + nh. \quad (3.27)$$

Різницю h арифметичної прогресії називають кроком таблиці. Нехай задані значення функції $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$

Складемо різниці значень функції $y = f(x)$.

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h),$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h).$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \quad \text{и т.д.}$$
$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i. \quad (3.29)$$
$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

$$\Delta^m y_0 = y_m - m y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} m y_1 + (-1)^m y_0. \quad (3.30)$$
$$\Delta^m y_i = y_{m+i} - m y_{m+i-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m+i-2} + \dots + (-1)^{m-1} m y_{i+1} + (-1)^m y_i.$$

1. Якщо C – стала величина, то $\Delta C = 0$.

3. $\Delta(f_1(x) + f_2(x)) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$.

$$4. \Delta(x^n) = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n.$$

57

Скінченні різниці доцільно записувати у формі таблиці.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
x_0	y_0	Δy_0			
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	...	
x_4	y_4	...	...		
...	...				

Знайдемо інтерполяційний многочлен для функції $y = f(x)$ у випадку рівновіддалених вузлів (3.27). Визначимо цей многочлен в іншій формі, ніж інтерполяційний многочлен Лагранжа. Запишемо його у вигляді

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (3.31)$$

Використовуючи умови $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), знайдемо коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ цього многочлена.

Оскільки $P(x_0) = y_0$, то одержуємо $a_0 = y_0$.

З умови $P(x_1) = y_1$ маємо $a_0 + a_1 h = y_1$.

$$\text{Звідси } a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

З умови $P(x_2) = y_2$ випливає, що $a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2$.

$$\text{Тому } a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Аналогічно можна знайти інші коефіцієнти многочлена (3.31). З урахуванням співвідношення (3.30) одержимо загальну формулу

$$a_m = \frac{\Delta^m y_0}{m! h^m} \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Підставивши ці вирази у формулу (3.31), одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (3.32)$$

Многочлен (3.32) називають інтерполяційним многочленом Ньютона.

Після деяких перетворень многочлен Ньютона (3.32) можна звести до многочлена Лагранжа (3.7), оскільки існує єдиний інтерполяційний многочлен $P(x)$ степеня n , для якого $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Відзначимо відмінність між формами запису інтерполяційних многочленів (3.7) та (3.32). Кожний доданок многочлена Лагранжа є многочленом степеня n і всі ці доданки рівноправні. Доданки многочлена Ньютона є многочленами, степені яких збільшуються, причому коефіцієнти при них – це послідовні скінченні різниці, поділені на факторіали. Оскільки послідовні скінченні різниці досить швидко зменшуються, то є можливість не враховувати у формулі Ньютона (3.32) доданків, коефіцієнти при яких дуже малі.

Для практичного використання формулу Ньютона (3.32) зазвичай записують у дещо іншому вигляді.

Введемо нову змінну $t = \frac{x - x_0}{h}$, тобто $x = x_0 + th$. Тоді

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \quad \dots, \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

і формулу (3.32) запишемо так:

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (3.33)$$

Цей многочлен називають першим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед.

Формулу (3.33) доцільно використовувати при обчисленні значень функції $f(x)$ для значень аргументу, розміщених між x_0 та x_1 , тобто для $t < 1$. Якщо $x_i < x < x_{i+1}$, то потрібно прийняти за x_0 вузол x_i , тобто застосувати формулу

$$P(x_i + th) = y_i + \frac{t}{1!} \Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i, \quad (3.34)$$

де $t = \frac{x - x_i}{h}$.

Формули (3.33) та (3.34) використовують для обчислення значень функції в точках, які містяться в лівій частині заданого інтервалу зміни аргументу x .

Для інтерполяції в правій частині цього інтервалу застосовують іншу формулу.

Позначимо $\frac{x - x_n}{h} = t$, тобто $x = x_n + th$ ($t < 0$).

Інтерполяційний многочлен в цьому випадку має вигляд

$$P(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (3.35)$$

Цей многочлен називають другим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції назад.

Формулу (3.35) доцільно використовувати для значень x , що задовольняють умову $x_{n-1} < x < x_n$, тобто для $|t| < 1$. Якщо, наприклад, $x_{n-2} < x < x_{n-1}$, то в цій формулі потрібно замість x_n взяти x_{n-1} .

Зауваження. Для оцінки похибок інтерполяційних многочленів Ньютона (3.33) та (3.35) на практиці використовують такі наближені формули для їх залишкових членів

$$R_n^{(I)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n), \quad (3.36)$$

$$R_n^{(II)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_n}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n). \quad (3.37)$$

При практичних обчисленнях за інтерполяційними формулами Ньютона (3.33) і (3.35) зупиняються на доданках, що містять такі скінченні різниці, які в межах заданої точності можна вважати сталими.

5. Поділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу.

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення аргументу, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ – відповідні значення функції, різниці $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) і не рівні між собою.

Відношення $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ називають поділеними різницями першого порядку і позначають $f(x_i; x_{i+1})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Наприклад, $f(x_0; x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $f(x_1; x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і т.д.

Поділені різниці другого порядку визначають за формулами

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

Аналогічно визначають поділені різниці третього порядку

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})}{x_{i+3} - x_i} \text{ і т.д.}$$

При обчисленнях поділені різниці також записують у таблицю.

Наведемо основні властивості поділених різниць.

1. Поділені різниці є симетричними функціями своїх аргументів.
2. Якщо $x_i = x_0 + i h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), тобто значення аргументу рівновіддалені, то

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}.$$

3. Поділені різниці n -го порядку від многочлена степеня n приймають сталі значення, а поділені різниці вищих від n порядків дорівнюють нулю.

Користуючись поняттям поділених різниць, інтерполяційний многочлен $P(x)$, який задовольняє умови $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), можна представити у вигляді, аналогічному до інтерполяційного многочлена Ньютона (3.32)

$$P(x) = y_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (3.38)$$

Цей многочлен називають інтерполяційним многочленом Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу.

6. Інтерполяція сплайнами.

Нехай відрізок $[a, b]$ поділений на N рівних часткових відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, де $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$), $x_N = b$, $h = \frac{b-a}{N}$.

Сплайном називають функцію, яка разом із кількома похідними неперервна на всьому заданому відрізку $[a, b]$, а на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ є деяким алгебраїчним многочленом. Найбільший на усіх часткових відрізках степінь многочлена називають степенем сплайна, а різницю між степенем сплайна та порядком найвищої неперервної на $[a, b]$ похідної – дефектом сплайна.

На практиці найчастіше застосовують сплайни третього степеня, які мають на $[a, b]$ неперервну принаймні першу похідну. Ці сплайни називають кубічними і позначають $S_3(x)$. Величину $m_i = S'_3(x_i)$ називають нахилом сплайна в точці x_i .

Неважко переконатися, що кубічний сплайн $S_3(x)$, який приймає у вузлах x_i та x_{i+1} відповідно значення y_i та y_{i+1} , має на частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ вигляд

$$S_3(x) = \frac{1}{h^3} (x_{i+1} - x)^2 (2(x - x_i) + h) y_i + \frac{1}{h^3} (x - x_i)^2 (2(x_{i+1} - x) + h) y_{i+1} + \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - x)^2 (x - x_i) m_i + \frac{1}{h^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) m_{i+1}. \quad (3.39)$$

Справді, легко перевірити, що $S_3(x_i) = y_i$, $S_3(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Крім того, після простих обчислень отримуємо $S'_3(x_i) = m_i$, $S'_3(x_{i+1}) = m_{i+1}$.

Можна також довести, що будь-який алгебраїчний многочлен третього степеня, який в точках x_i, x_{i+1} приймає відповідно значення y_i, y_{i+1} і похідна якого в цих точках дорівнює відповідно m_i та m_{i+1} , співпадає з многочленом (3.39).

Отже, щоб визначити кубічний сплайн $S_3(x)$ на всьому відрізку $[a, b]$, потрібно задати у вузлах x_i його значення y_i та нахили m_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$).

Кубічний сплайн, який у вузлах x_i приймає такі ж значення y_i , як і деяка функція $y = f(x)$, називають інтерполяційним сплайном. Його застосовують для наближення на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ разом із кількома її похідними.

Нахили інтерполяційного кубічного сплайна можна задати наступними способами.

1. Приймають

$$m_i = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (3.40)$$

$$m_0 = \frac{1}{2h} (4y_1 - y_2 - 3y_0), \quad m_N = \frac{1}{2h} (3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}). \quad (3.41)$$

2. Якщо відомі значення похідної $f'(x)$ в точках x_i : $f'(x_i) = y'_i$, то приймають $m_i = y'_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$).

Ці способи називають локальними, оскільки за їх допомогою будують сплайн окремо на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$. При цьому у вузлах x_i зберігається неперервність першої похідної $S'_3(x)$, але не гарантується неперервність другої похідної $S''_3(x)$. Тому дефект такого сплайна зазвичай дорівнює двом.

Сплайни зручніші для апроксимації функції на великому проміжку (при великих значення N), ніж, наприклад, інтерполяційні многочлени. Апроксимація функції на великому проміжку одним многочленом для досягнення заданої точності вимагає значного збільшення його степеня, що на практиці не завжди прийнятно. Розбиття заданого відрізка $[a, b]$ на кілька частин з побудовою на кожній частині самостійного інтерполяційного многочлена незручне, оскільки в точках стикування перша похідна двох сусідніх інтерполяційних многочленів буде мати розрив. Можливо, що навіть не співпадуть у точці стикування значення інтерполяційних многочленів, якщо ця точка стикування не буде їх спільним вузлом.

Приклад 3.1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	1,3	2,2	3,5	4,4	5,5
y_i	4,6	3,7	2,3	1,2	2,1

За допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа четвертого степеня із застосуванням схеми Ейткена знайти наближене значення цієї функції при $x = 2,56$.

Розв'язування. Обчислення проведемо за формулами

$$P_{0,1,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix},$$

і результати обчислень запишемо у вигляді таблиці.

Пояснимо, як одержати деякі значення у таблиці. Наприклад,

$$P_{2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 3,5} \begin{vmatrix} 2,3 & 0,94 \\ 1,2 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,449;$$

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 2,2} \begin{vmatrix} 3,312 & -0,36 \\ 3,449 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,334;$$

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 1,3} \begin{vmatrix} 3,324 & -1,26 \\ 3,334 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,328;$$

$$P_{0,1,2,3,4}(x) = \frac{1}{5,5 - 1,3} \begin{vmatrix} 3,328 & -1,26 \\ 3,539 & 2,94 \end{vmatrix} = 3,391.$$

i	$x_i - x$	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$
0	-1,26	4,6	3,340			
1	-0,36	3,7	3,312	3,324	3,328	
2	0,94	2,3	3,449	3,334	3,539	3,391
3	1,84	1,2	-0,305	5,213		
4	2,94	2,1				

Отже, $f(2,56) \approx P(2,56) = 3,391$.

Приклад 3.2. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
y_i	2,0617	2,7462	3,4976	4,3282	5,2515

За допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона обчислити наближені значення функції $y = f(x)$ в точках: 1) $x = 0,4$; 2) $x = 0,95$.

Розв'язування. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,3	<u>2,0617</u>	<u>0,6845</u>			
0,5	2,7462	0,7514	<u>0,0669</u>		
0,7	3,4976	0,8306	0,0792	<u>0,0123</u>	
				<u>0,0135</u>	<u>0,0012</u>

0,9	4,3282	<u>0,9233</u>	<u>0,0927</u>		
1,1	<u>5,2515</u>				

1. Значення $f(0,4)$ обчислимо за допомогою першого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції вперед

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

За умовою задачі $h=0,2$. Обчислимо значення $t = \frac{x-x_0}{h}$; $t = \frac{0,4-0,3}{0,2} = 0,5$. Запишемо

перший інтерполяційний многочлен Ньютона, підставивши у формулу значення $y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^4 y_0$, які у складеній таблиці підкреслені суцільною лінією.

$$P(0,3+0,2t) = 2,0617 + 0,6845t + 0,0669 \frac{t(t-1)}{2!} + 0,0123 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} + 0,0012 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}.$$

$$\begin{aligned} P(0,4) &= 2,0617 + 0,6845 \cdot 0,5 + \frac{0,0669}{2} \cdot 0,5(-0,5) + \\ &+ \frac{0,0123}{6} \cdot 0,5(-0,5)(-1,5) + \frac{0,0012}{24} \cdot 0,5 \cdot (-0,5)(-1,5)(-2,5) = \\ &= 2,0617 + 0,34225 - 0,00836 + 0,00077 - 0,00005 = 2,41311 \approx 2,4131. \\ f(0,4) &\approx P(0,4) = 2,4131. \end{aligned}$$

2. Значення $f(0,95)$ обчислимо за допомогою другого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції назад.

$$t = \frac{x-x_n}{h} = \frac{0,95-1,1}{0,2} = -0,75.$$

Запишемо цей многочлен, підставивши у формулу

$$P(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0$$

значення $y_4, \Delta y_3, \Delta^2 y_2, \Delta^3 y_1, \Delta^4 y_0$, які в таблиці підкреслені пунктирною лінією.

$$\begin{aligned} P(1,1+0,2t) &= 5,2515 + 0,9233 \cdot t + \frac{0,0927}{2!} t(t+1) + \\ &+ \frac{0,0135}{3!} t(t+1)(t+2) + \frac{0,0012}{4!} t(t+1)(t+2)(t+3). \end{aligned}$$

Підставивши значення $t = -0,75$, одержимо $P(0,95) = 4,5498$.

Отже, $f(0,95) \approx P(0,95) = 4,5498$.

Приклад 3.3. Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у точці $x = 2,35$

за допомогою інтерполяційного многочлена четвертого степеня з оптимально вибраними вузлами інтерполяції на відрізку $[2, 4]$ із використанням поділених різниць. Оцінити похибку одержаного значення.

Розв'язування. Обчислимо вузли інтерполяції за формулою $x_i = \frac{1}{2} \left((b-a) \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2} + b+a \right)$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Оскільки за умовою задачі $n = 4$, $a = 2$, $b = 4$, то ця формула матиме вигляд

$$x_i = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{(2i+1)\pi}{10} + 6 \right); \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{10} + 6 \right) = 3,951057; \quad x_1 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{3\pi}{10} + 6 \right) = 3,587786;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{2} + 6 \right) = 3; \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{7\pi}{10} + 6 \right) = 2,412216;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{9\pi}{10} + 6 \right) = 2,048944.$$

Обчислимо значення функції $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у цих вузлах.

$$y_0 = 0,356833; \quad y_1 = 0,383601; \quad y_2 = 0,438691;$$

$$y_3 = 0,516640; \quad y_4 = 0,583919.$$

Знайдемо поділені різниці та запишемо їх у таблицю.

x	y	Поділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
3,951057	<u>0,356833</u>				
		<u>-0,073686</u>			
3,587786	0,383601		<u>0,021070</u>		
		-0,093725		<u>-0,007806</u>	
3	0,438691		0,033082		<u>0,003485</u>
		-0,132615		-0,014434	
2,412216	0,516640		0,055294		
		-0,185203			
2,048944	0,583919				

Запишемо інтерполяційний многочлен

$$P(x) = y_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

для даної функції при $n = 4$:

$$\begin{aligned} P(x) = & 0,356833 - 0,073686(x - 3,951057) + \\ & + 0,021070(x - 3,951057)(x - 3,587786) - \\ & - 0,007806(x - 3,951057)(x - 3,587786)(x - 3) + \\ & + 0,003485(x - 3,951057)(x - 3,587786)(x - 3)(x - 2,412216). \end{aligned}$$

Підставивши $x = 2,35$, одержимо:

$$P(2,35) = 0,356833 + 0,117975 + 0,041756 + 0,010055 + 0,000279 = 0,526898.$$

Оцінимо похибку інтерполяції за формулою (4.24). Знайдемо $f^{(5)}(x)$ та M_5 .

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{\frac{7}{4}}, \quad f''(x) = \frac{26}{16}x^{\frac{11}{4}}, \quad \dots, \quad f^{(5)}(x) = -64,29199x^{\frac{23}{4}}.$$

$$M_5 = \max_{2 \leq x \leq 4} |f^{(5)}(x)| = 64,3 \cdot 2^{\frac{23}{4}} = 1,19472.$$

Отже,

$$\text{абсолютна похибка} \quad |R_4| \leq \frac{M_5}{5!} \frac{2^5}{2^9} = \frac{M_5}{5! \cdot 2^4} = 0,00063;$$

$$\text{відносна похибка} \quad \delta = 0,0012.$$

Приклад 3.4. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	0,25	1,25	2,25	3,25	4,25
y_i	-1,3546	0,5428	1,6532	1,1722	0,7815

Побудувати на відрізку $[0,25; 4,25]$ інтерполяційний сплайн третього степеня для функції $y = f(x)$ і знайти за його допомогою наближене значення функції при $x = 1,76$.

Розв'язування. Обчислимо нахили інтерполяційного сплайна за формулами

$$m_i = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$m_0 = \frac{1}{2h} (4y_1 - y_2 - 3y_0), \quad m_N = \frac{1}{2h} (3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}).$$

За умовою задачі $h = 1$.

$$m_0 = \frac{1}{2h} (4y_1 - y_2 - 3y_0) = 0,5(4 \cdot 0,5428 - 1,6532 + 3 \cdot 1,3546) = 2,2909,$$

$$m_1 = \frac{1}{2h} (y_2 - y_0) = 0,5(1,6532 + 1,3546) = 1,5039,$$

$$m_2 = \frac{1}{2h} (y_3 - y_1) = 0,5(1,1722 - 0,5428) = 0,3147,$$

$$m_3 = \frac{1}{2h} (y_4 - y_2) = 0,5(0,7815 - 1,6532) = -0,4358,$$

$$m_4 = \frac{1}{2h} (3y_4 + y_2 - 4y_3) = 0,5(3 \cdot 0,7815 + 1,6532 - 4 \cdot 1,1722) = -0,3456.$$

За формулою

$$S_3(x) = \frac{1}{h^3} (x_{i+1} - x)^2 (2(x - x_i) + h) y_i + \frac{1}{h^3} (x - x_i)^2 (2(x_{i+1} - x) + h) y_{i+1} + \\ + \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - x)^2 (x - x_i) m_i + \frac{1}{h^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) m_{i+1}.$$

побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн на кожному частковому відрізку.

1. $x \in [0,25; 1,25]$.

$$S_3(x) = (1,25 - x)^2 (2(x - 0,25) + 1) \cdot (-1,3546) + \\ + (x - 0,25)^2 (2(1,25 - x) + 1) \cdot 0,5428 + (1,25 - x)^2 (x - 0,25) \cdot 2,2909 + \\ + (x - 0,25)^2 (x - 1,25) \cdot 1,5039 = -0,3935x^2 + 2,4876x - 1,9519.$$

2. $x \in [1,25; 2,25]$.

$$S_3(x) = (2,25 - x)^2 (2(x - 1,25) + 1) 0,5428 + (x - 1,25)^2 (2(2,25 - x) + 1) \cdot 1,6532 + \\ + (2,25 - x)^2 (x - 1,25) \cdot 1,5039 + (x - 1,25)^2 (x - 2,25) \cdot 0,3147 = \\ = -0,4022x^3 + 1,5168x^2 - 0,4030x - 0,5381.$$

Оскільки значення $x = 1,76$ міститься на частковому відрізку $[1,25; 2,25]$, то за допомогою одержаного на цьому відрізку сплайна обчислимо $f(1,76)$:

$$f(1,76) \approx S_3(1,76) = -0,4022 \cdot 1,76^3 + 1,5168 \cdot 1,76^2 - 0,4030 \cdot 1,76 - 0,5381 = 1,2583.$$

Отже, $f(1,76) \approx 1,2583$.

Аналогічно, як на двох перших часткових відрізках, будуємо інтерполяційний кубічний сплайн на часткових відрізках $[2,25; 3,25]$ та $[3,25; 4,25]$.

Приклад 3.5. Функція $y = f(x)$ задана таблицею з кроком $h = 0,2$.

x_i	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y_i	0,3894	0,4794	0,5646	0,6442	0,7174	0,7833

За допомогою інтерполяційних формул обчислити:

а) $y'(1,68)$; б) $y'(0,8)$; в) $y''(0,95)$; г) $y''(1,6)$.

Розв'язування. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,8	0,3894	0,0900				
1,0	0,4794	0,0852	- 0,0048	- 0,0008		
1,2	0,5646	0,0796	- 0,0056	- 0,0008	0	
1,4	0,6442	0,0732	- 0,0064	- 0,0009	- 0,0001	- 0,0001
1,6	0,7174	0,0659	- 0,0073			
1,8	0,7833					

а) Для обчислення $y'(1,68)$ використаємо формулу

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{5t^4+40t^3+105t^2+100t+24}{5!} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right),$$

$$\text{за умови } t = \frac{1,68-1,8}{0,2} = -0,6.$$

$$y'(1,68) \approx \frac{1}{0,2} \left(0,0659 - 0,1(-0,0073) + \frac{1}{6} (3 \cdot 0,36 - 3,6 + 2) (-0,0009) + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (-4 \cdot 0,216 + 18 \cdot 0,36 - 13,2 + 6) (-0,0001) + \frac{1}{120} (5 \cdot 0,1296 + 40(-0,216) + \right. \\ \left. + 105 \cdot 0,36 - 60 + 24) (-0,0001) \right) = 0,3367.$$

б) За формулою

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \dots \right),$$

обчислимо $y'(0,8)$

$$y'(0,8) \approx \frac{1}{0,2} \left(0,0900 - \frac{1}{2} (-0,0048) + \frac{1}{3} (-0,0008) + \frac{1}{5} (-0,0001) \right) = 0,4608.$$

в) Для обчислення $y''(0,95)$ застосуємо формулу

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + (t-1) \Delta^3 y_0 + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!} \Delta^4 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right). \quad \left(t = \frac{0,95 - 0,8}{0,2} = 0,75 \right)$$

$$y''(0,95) \approx \frac{1}{0,04} \left(-0,0048 - 0,25(-0,0008) + \frac{1}{120} (20 \cdot 0,75^3 - 120 \cdot 0,75^2 + \right. \\ \left. + 210 \cdot 0,75 - 100)(-0,0001) \right) = -0,1150.$$

г) $y''(1,6)$ обчислимо за формулою

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right).$$

За умови $x_n = 1,6$, отримаємо $y''(1,6) \approx \frac{1}{0,04} (-0,0064 - 0,0008) = -0,1800$.

Приклад 3.6. Функція двох змінних $u = f(x, y)$ задана таблично. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків цієї функції в точці $A(1,1; 0,8)$ за спрощеною та розширеною схемами.

$y \backslash x$	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7
0,4	1,221	1,377	1,553	1,751	1,974
0,6	1,350	1,616	1,935	2,316	2,773
0,8	1,492	1,896	2,411	3,065	3,896
1,0	1,649	2,226	3,004	4,055	5,474
1,2	1,822	2,612	3,743	5,366	7,691

Розв'язування. За умовою задачі $h_1 = 0,3$; $h_2 = 0,2$; $i = 0,1,2,3,4$; $j = 0,1,2,3,4$. Частинні похідні потрібно обчислити у вузлі $A(x_2; y_2)$, де $x_2 = 1,1$; $y_2 = 0,8$.

1. Застосуємо формули $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1} (u_{i+1, j} - u_{i-1, j}),$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_2} (u_{i, j+1} - u_{i, j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} \approx \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1, j} - 2u_{ij} + u_{i-1, j}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ij} \approx \frac{1}{h_2^2} (u_{i, j+1} - 2u_{ij} + u_{i, j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1 h_2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1})$$

(спрощена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{0,6} (3,065 - 1,896) = 1,948,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,4} (3,004 - 1,935) = 2,672,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,09} (3,065 - 2 \cdot 2,411 + 1,186) = 1,544,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,04} (3,004 - 2 \cdot 2,411 + 1,935) = 2,925,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{22} = \frac{1}{4 \cdot 0,06} (4,055 - 2,316 - 2,226 + 1,616) = 4,704.$$

2. Застосуємо формули

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1} (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_1^2} (-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{ij} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_2^2} (-u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} - 30u_{ij} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2})$$

(розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{1,2} (4,055 - 2,226 + 2,316 - 1,616) = 2,108,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,8} (4,055 - 2,316 + 2,226 - 1,616) = 2,936,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,09} (-3,896 + 16 \cdot 3,065 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,896 - 1,492) = 1,535,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,04} (-3,743 + 16 \cdot 3,004 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,935 - 1,553) = 2,913.$$

Приклад 3.7. Обчислити інтеграл $I = \int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx$, взявши $n = 20$:

а) за формулами прямокутників;

- б) за формулою трапецій;
- в) за формулою середніх;
- г) за уточненою формулою середніх і трапецій;
- д) за формулою Сімпсона.

Розв'язування. Складемо таблицю значень функції $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$ для $n = 20$ та

$$h = \frac{1,5 - 0,5}{20} = 0,05.$$

Таблиця

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,50	2,10254	7	0,85	1,28085	14	1,20	0,93958
1	0,55	1,92098	8	0,90	1,21574	15	1,25	0,90652
2	0,60	1,76973	9	0,95	1,15754	16	1,30	0,87602
3	0,65	1,64178	10	1,00	1,10517	17	1,35	0,84781
4	0,70	1,53216	11	1,05	1,05782	18	1,40	0,82162
5	0,75	1,43717	12	1,10	1,01480	19	1,45	0,79727
6	0,80	1,35411	13	1,15	0,97554	20	1,50	0,77455

а). Застосуємо формули прямокутників

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

$$I_{np}^{(1)} = h \sum_{i=0}^{19} y_i = 0,05 \cdot 24,75475 = 1,23774,$$

$$I_{np}^{(2)} = h \sum_{i=1}^{20} y_i = 0,05 \cdot 23,42676 = 1,17134.$$

б). Використовуючи формулу трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \text{ одержимо:}$$

$$I_{mp} = h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_{20}) + \sum_{i=1}^{19} y_i \right) = 0,05 \cdot 24,09076 = 1,20454.$$

в). Щоб застосувати формулу середніх

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{n-1/2})), \text{ складемо таблицю значень даної}$$

функції в точках $x_{i-1} + \frac{h}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Таблиця

i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$	i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$	i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
1	0,525	2,00743	8	0,875	1,24736	15	1,225	0,92271
2	0,575	1,84206	9	0,925	1,18585	16	1,275	0,89097
3	0,625	1,70319	10	0,975	1,13068	17	1,325	0,86164
4	0,675	1,58493	11	1,025	1,08091	18	1,375	0,83447
5	0,725	1,48302	12	1,075	1,03581	19	1,425	0,80923
6	0,775	1,39430	13	1,125	0,99473	20	1,475	0,78572
7	0,825	1,31636	14	1,175	0,95718			

Застосовавши формулу середніх, одержимо

$$I_{np.c} = h \sum_{i=1}^{20} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0,05 \cdot 24,06855 = 1,20343.$$

г). За уточненою формулою $I_{уточн} = \frac{1}{3} (2I_{np.c} + I_{mp})$.

$$I_{уточн} = \frac{1}{3} (2I_{np.c} + I_{mp}) = \frac{1}{3} (2 \cdot 1,20343 + 1,20454) = 1,20380.$$

д). Застосовавши формулу Сімпсона і таблицю 1 значень функції $f(x)$, одержимо

$$\begin{aligned} I_{сип} &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{20} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{18})) = \\ &= \frac{0,5}{3} (2,87709 + 4 \cdot 12,02328 + 2 \cdot 10,62893) = 1,20380. \end{aligned}$$

Обчислимо абсолютну похибку формули Сімпсона за допомогою правила Рунге. Ми знайшли наближене значення даного інтеграла за формулою Сімпсона з кроком $h = 0,05$

$$I_h = 1,20380.$$

Обчислимо також наближене значення цього інтеграла з кроком $2h = 0,10$.

$$I_{2h} = \frac{0,10}{3} (2,87709 + 4 \cdot 5,99021 + 2 \cdot 4,63872) = 1,20385.$$

$$\text{Отже, } |R_{20}| \approx \frac{|1,20380 - 1,20385|}{15} \approx 3,33 \cdot 10^{-6}, \text{ тобто } |R_{20}| < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Таким чином, обчислюючи наближено даний інтеграл за формулою Сімпсона, ми одержали, що $\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx 1,20380$. В отриманому результаті всі знаки вірні.

Приклад 3.8. Обчислити наближене значення інтеграла $\int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx$

методом Монте-Карло, взявши $n = 30$. Знайти точне значення цього інтеграла і обчислити абсолютну та відносну похибки одержаного наближеного значення.

Розв’язування. З таблиці випадкових чисел візьмемо 30 чисел $t_1, t_2, \dots, t_{30}$, які містяться на відрізку $[0, 1]$. Знайдемо відповідні значення x_i за формулою $x_i = 1 + 2t_i$, ($i = 1, 2, \dots, 30$).

Обчислимо значення функції $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) і застосуємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	i	t_i	x_i	$f(x_i)$
1	0,6987	2,3974	1,19018	16	0,2059	1,4118	1,54680
2	0,0387	1,0774	1,79689	17	0,5626	2,1252	1,25308
3	0,5581	2,1162	1,25549	18	0,8516	2,7032	1,13847
4	0,6531	2,3062	1,20921	19	0,6476	2,2952	1,21163
5	0,5735	2,1470	1,24732	20	0,5685	2,1270	1,25260
6	0,9333	2,8666	1,11702	21	0,1313	1,2626	1,64588
7	0,1998	1,3996	1,55425	22	0,3897	1,7794	1,36595
8	0,1837	1,3674	1,57444	23	0,4380	1,8760	1,32987
9	0,4216	1,8432	1,34168	24	0,1618	1,3236	1,60320
10	0,3384	1,6768	1,40890	25	0,4858	1,9716	1,29785
11	0,4247	1,8494	1,33942	26	0,1017	1,2034	1,69045
12	0,2910	1,5820	1,45338	27	0,0858	1,1716	1,71576
13	0,4731	1,9462	1,30603	28	0,8396	2,6792	1,14194
14	0,6454	2,2908	1,21261	29	0,7813	2,5626	1,16015
15	0,5146	2,0292	1,28016	30	0,2712	1,5424	1,47347

$$\int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx \approx \frac{2}{30} \sum_{i=1}^{30} f(x_i) = \frac{1}{15} \cdot 41,11408 = 2,74094 \approx 2,7409.$$

Обчислимо цей інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx &= \int_1^3 (e^{-2x} + 2e^{-x} + 1) dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + x \right) \Big|_1^3 = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-6} - 2e^{-3} + 3 + \frac{1}{2}e^{-2} + 2e^{-1} - 1 \approx 2,7026. \end{aligned}$$

Абсолютна похибка $\Delta \approx 0,038$; відносна похибка $\delta \approx 0,014$, тобто $\delta \approx 1,4\%$.

Приклад 3.9. Обчислити за методом Ейлера наближене значення $y(1,4)$

розв'язку задачі Коші $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1)=1$, взявши крок $h=0,1$. Знайти точний розв'язок цієї задачі та обчислити похибку одержаного наближеного значення.

Розв'язування. Відрізок $[1; 1,4]$ поділимо на 4 рівних часткових відрізки. Тоді довжина кожного часткового відрізка дорівнює 0,1. Обчислимо наближені значення розв'язку в точках $x_1=1,1$; $x_2=1,2$; $x_3=1,3$; $x_4=1,4$.

Задане рівняння запишемо у вигляді $y' = e^x - \frac{y}{x}$. Отже, $f(x, y) = e^x - \frac{y}{x}$.

Значення розв'язку будемо обчислювати за формулою $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ ($i=0,1,2, \dots, n-1$). Результати обчислень запишемо у таблицю.

i	x_i	y_i	$h f(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$h f(x_i, y_i)$
0	1	1	0,1718	3	1,3	1,5839	0,2451
1	1,1	1,1718	0,1939	4	1,4	1,8290	
2	1,2	1,3657	0,2182				

Таким чином, $y(1,4) \approx 1,8290$.

Знайдемо точний розв'язок даної задачі Коші: $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1)=1$.

Рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ є лінійним рівнянням першого порядку. Його розв'язок шукатимемо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$. $y' = u'v + uv'$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^x.$$

Нехай $v' + \frac{v}{x} = 0$. Тоді одержимо: $u'v = e^x$.

Розв'яжемо ці два рівняння.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|.$$

Отже, $v = \frac{1}{x}$. Рівняння $u'v = e^x$ матиме вигляд $u' \frac{1}{x} = e^x$. Звідси $du = x e^x dx$,

$$u = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ має вигляд

$$y = \frac{1}{x} (x e^x - e^x + C).$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y'(1)=1$.

$$1=1(e-e+C).$$

Отже, $C=1$ і розв'язок заданої задачі Коші

$$y = \frac{1}{x} (xe^x - e^x + 1).$$

Обчислимо за цією формулою значення $y(1,4)$, залишаючи чотири знаки після коми:

$$y(1,4)=1,8729.$$

Абсолютна похибка наближеного значення $y(1,4)$, обчисленого методом Ейлера, $\Delta = 4,39 \cdot 10^{-2} < 5 \cdot 10^{-2}$; відносна похибка $\delta \approx 2,34 \cdot 10^{-2}$, тобто $\delta \approx 2,34\%$.

Приклад 3.10. Скласти таблицю значень розв'язку рівняння $y' = y - \frac{2x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$, на відрізку $[0; 0,6]$ з кроком $h=0,2$, застосувавши метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

Розв'язування. За умовою задачі $x_0=0$, $y_0=1$, $f(x,y) = y - \frac{2x}{y}$. Потрібно знайти значення розв'язку в точках $x_1=0,2$; $x_2=0,4$; $x_3=0,6$. Обчислимо значення розв'язку y_1 в точці x_1 . За формулами

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

одержимо

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad \text{де} \quad \Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}).$$

При цьому числа $k_j^{(0)}$ ($j=1, \dots, 4$) знайдемо за формулами

$$k_1^{(i)} = h f(x_i, y_i),$$

$$k_2^{(i)} = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(i)} = h f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).$$

Таким чином,

$$k_1^{(0)} = h f(x_0, y_0) = 0,2 \cdot f(0,1) = 0,2,$$

$$k_2^{(0)} = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,2 f(0,1; 1,1) = 0,18364,$$

$$k_3^{(0)} = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,2 f(0,1; 1,09182) = 0,18173,$$

$$k_4^{(0)} = h f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,2 f(0,2; 1,18173) = 0,16865,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,2 + 2 \cdot 0,18364 + 2 \cdot 0,18173 + 0,16865) = 0,18323.$$

Отже, $y_1 = 1 + 0,18323 = 1,18323$.

Значення y_2 та y_3 знаходимо аналогічно. Процес обчислень проводимо за схемою

i	j	x	y	$f(x, y)$	$k_j = h f(x, y)$	Δy
0	1	<u>0</u>	<u>1</u>	1	0,2	0,18323
	2	0,1	1,1	0,91818	0,18364	
	3	0,1	1,09182	0,90864	0,18173	
	4	0,2	1,18173	0,84324	0,16865	
1	1	<u>0,2</u>	<u>1,18323</u>	0,84517	0,16903	0,15844
	2	0,3	1,26775	0,79447	0,15889	
	3	0,3	1,26268	0,78750	0,15750	
	4	0,4	1,34073	0,74404	0,14881	
2	1	<u>0,4</u>	<u>1,34167</u>	0,74540	0,14908	0,14162
	2	0,5	1,41621	0,71010	0,14202	
	3	0,5	1,41268	0,70481	0,14096	
	4	0,6	1,48263	0,67326	0,13465	
3		<u>0,6</u>	<u>1,48329</u>			

Знайдені значення y_1, y_2, y_3 розв'язку даної задачі Коші в наведеній таблиці підкреслено. Зауважимо, що точний розв'язок цієї задачі виражається формулою $y = \sqrt{2x+1}$. Якщо обчислити значення розв'язку $y(0,2)$, $y(0,4)$, $y(0,6)$ за цією формулою, то отримаємо: $y(0,2) = 1,18322$; $y(0,4) = 1,34164$; $y(0,6) = 1,48324$. Таким чином, числа y_1, y_2, y_3 , обчислені за методом Рунге-Кутта, мають чотири вірних знаки після коми.

[illegible]

Методи розв'язування задач оптимізації з обмеженнями розглядають в одному з розділів прикладної математики – математичному програмуванні.

Одновимірну задачу оптимізації формують так: знайти найменше або найбільше значення цільової функції $y = f(x)$, заданої на множині G , і визначити значення проектного параметра $x \in G$, при якому цільова функція приймає екстремальне значення. Існування розв'язку поставленої задачі впливає із наступної теореми.

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, функція $y = f(x)$ досягає свого найбільшого та найменшого значень або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Тому для визначення найменшого та найбільшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ потрібно обчислити її значення на кінцях відрізка та в усіх критичних точках, які містяться на даному відрізку, і з одержаних значень вибрати найменше та найбільше. Часто рівняння $f'(x) = 0$ для знаходження критичних точок необхідно розв'язувати числовим методом.

Якщо цільова функція задана таблично, то методи математичного аналізу використати неможливо. Тому в задачах оптимізації застосовують методи пошуку, які ґрунтуються на обчисленні значень цільової функції в окремих точках і виборі серед них найменшого або найбільшого значень. Одним із найефективніших методів пошуку, в якому при обмеженій кількості обчислень значень функції $f(x)$ досягається найкраща точність, є метод золотого перерізу. Він полягає в побудові послідовності відрізків $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$, які стягуються в точку ξ мінімуму функції $f(x)$. На кожному кроці, крім першого, значення функції $f(x)$ обчислюється тільки один раз. Цю точку називають золотим перерізом, її вибирають спеціальним способом.

Золотим перерізом називають такий поділ відрізка $[a, b]$ точкою c на дві нерівні частини, при якому відношення довжини більшої частини відрізка до

довжини всього відрізка дорівнює відношенню довжини меншої частини до довжини більшої частини відрізка.

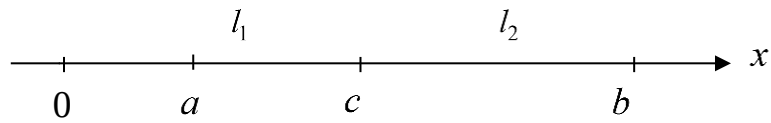


Рисунок 4.1

Нехай довжина відрізка $[a, b]$ дорівнює l , довжина меншої частини відрізка дорівнює l_1 , довжина більшої частини – l_2 .

Отже,

$$\frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (4.4)$$

Звідси $l_2^2 = l_1 l$; $l_2^2 = l_1(l_1 + l_2)$;

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \frac{l_1}{l_2} - 1 = 0. \quad (4.5)$$

Оскільки $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, то з рівняння (4.5) одержуємо, що $\frac{l_1}{l_2} \approx 0,618$.

З умови (4.4) випливає, що $l_2 = 0,618l$. Тоді $l_1 = 0,382l$ і $\frac{l_1}{l_2} = \frac{0,382}{0,618}$.

Знайдемо значення c як координату точки, яка ділить відрізок $[a, b]$ у відношенні $\lambda = \frac{0,382}{0,618}$; $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Звідси

$$c = 0,618a + 0,382b. \quad (4.6)$$

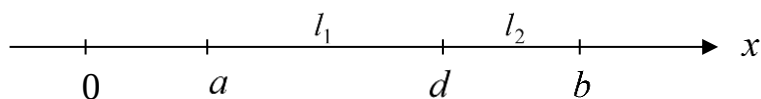


Рисунок 4.2

Якщо $l_1 > l_2$, як зображено на рис.4.2, то аналогічно можна визначити:

$$d = 0,382a + 0,618b. \quad (4.7)$$

Кожна з точок c і d здійснює золотий переріз відрізка $[a, b]$. Крім цього, точка c здійснює золотий переріз відрізка $[a, d]$, а точка d – золотий переріз відрізка $[c, b]$.

Розглянемо задачу мінімізації функції $f(x)$. Припустимо, що всередині відрізка $[a, b]$ існує тільки один мінімум функції $f(x)$. Обчислимо значення функції в точках c та d і порівняємо їх між собою.

Якщо $f(c) < f(d)$, то приймаємо

$$a_1 = a; \quad b_1 = d; \quad d_1 = c; \quad c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1. \quad (4.8)$$

Якщо $f(c) \geq f(d)$, то приймаємо

$$a_1 = c; \quad b_1 = b; \quad c_1 = d; \quad d_1 = 0,382a_1 + 0,618b_1. \quad (4.9)$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо формули для визначення координат точок поділу c_k і d_k ($c_k < d_k$) на $(k+1)$ -му кроці мінімізації

$$\begin{aligned} c_k &= 0,618 a_k + 0,382 b_k, \\ d_k &= 0,382 a_k + 0,618 b_k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При цьому, якщо $f(c_k) < f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = d_k, \quad d_{k+1} = c_k. \quad (4.11)$$

Якщо $f(c_k) \geq f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = c_k, \quad b_{k+1} = b_k, \quad c_{k+1} = d_k. \quad (4.12)$$

При цьому довжина відрізка $[a_k, b_k]$

$$h_k = b_k - a_k = 0,618^k (b - a). \quad (7.13)$$

Процес мінімізації закінчують при $h_k < \varepsilon$, де ε – задана абсолютна похибка. Проектний параметр мінімізації ξ задовольняє умову $a_k < \xi < b_k$. За наближене значення параметра ξ можна взяти

$$\xi^* = \frac{a_k + b_k}{2}. \quad (4.14)$$

3. Багатовимірні задачі оптимізації

У попередньому параграфі ми розглянули одновимірну задачу оптимізації, в якій цільова функція залежить лише від одного аргументу. Проте в більшості реальних задач оптимізації цільова функція залежить від багатьох проектних параметрів.

Щоб знайти мінімум диференційовної функції кількох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, потрібно дослідити її значення в критичних точках, які визначаються системою рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (4.15)$$

Проте можуть виникнути значні труднощі при розв'язуванні нелінійної системи (4.15). Крім того, в багатьох випадках цільова функція не задається аналітично, а відомий тільки спосіб для визначення значень цільової функції в довільних точках області G за допомогою деякого алгоритму чи вимірювання. Задача мінімізації полягає в наближеному визначенні найменшого значення функції в цій області, якщо відомі її значення в окремих точках. Можна ввести дискретну множини точок (вузлів), поділивши інтервали зміни параметрів $x_1, x_2, \dots, x_n$ на частини з кроками $h_1, h_2, \dots, h_n$, обчислити значення цільової

функції в одержаних вузлах і серед цих значень знайти найменше. Але в багатовимірних задачах оптимізації цей метод загального пошуку потребує дуже великого обсягу обчислень. Тому до цих задач застосовують чисельні методи, які ґрунтуються на цілеспрямованому пошуку. Розглянемо один із таких методів, який називають методом градієнтного спуску. З курсу математичного аналізу відомо, що напрям найшвидшого зростання функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначається її градієнтом

$$\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Отже, напрям, який є протилежним до градієнтного, визначає напрям найшвидшого спадання функції.

Розглянемо ідею методу градієнтного спуску. Вибираємо деяку початкову точку й обчислюємо градієнт даної функції в цій точці. Робимо крок у напрямку, протилежному до градієнтного, і приходимо в точку, значення функції в якій зазвичай менше від початкового. Якщо значення функції не змінилося або навіть зросло, то потрібно зменшити крок. У новій точці процедуру повторюємо: обчислюємо градієнт і знову робимо крок у протилежному до нього напрямку. Процес продовжується до одержання найменшого значення цільової функції. Пошук закінчується тоді, коли рух із отриманої точки з будь-яким кроком призводить до зростання значення цільової функції. Зауважимо, що коли мінімум функції досягається всередині даної області, то в цій точці градієнт даної функції дорівнює нулю; це також є сигналом про закінчення процесу мінімізації.

У методі градієнтного спуску потрібно на кожному кроці оптимізації обчислювати градієнт цільової функції. Тому доцільно зменшити кількість таких кроків. Це досягається в деяких методах, які є модифікаціями методу градієнтного спуску. Одним із них є метод найшвидшого спуску. Він полягає в тому, що після визначення у початковій точці напрямку, протилежного до градієнтного, в цьому напрямку роблять не один крок, а рухаються доти, доки цільова функція спадає, досягаючи в деякій точці мінімуму. В цій точці знову визначають напрям спуску, тобто напрям, протилежний до градієнтного, і шукають нову точку мінімуму цільової функції і т. д. У цьому методі спуск проводять набагато більшими кроками і градієнт обчислюють у меншій кількості точок. Зауважимо, що метод найшвидшого спуску зводить багатовимірну задачу оптимізації до послідовності одновимірних задач на кожному кроці оптимізації, при цьому напрям одновимірної оптимізації визначають градієнтом цільової функції.

Розглянемо, наприклад, двічі неперервно диференційовну в області G функцію двох змінних $u = f(x_1, x_2)$. Нехай в деякій внутрішній точці $M^*(x_1^*, x_2^*)$ області G ця функція має найменше значення. Припустимо, що ми знайшли точку $M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, яка є k -тим наближенням до точки $M^*(x_1^*, x_2^*)$. Обчислимо градієнт функції у точці M_k

$$\text{grad } f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \right)$$

і будемо рухатися у напрямку вектора $\overline{M_k M} = -\alpha \text{grad } f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, де α – деяке додатне число.

$$\begin{aligned} \text{Якщо точка } M \text{ має координати } x_1 \text{ та } x_2, \text{ то } x_1 - x_1^{(k)} &= -\alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \\ x_2 - x_2^{(k)} &= -\alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$x_1 = x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2 = x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \quad (4.16)$$

Розглянемо функцію

$$F(\alpha) = f\left(x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\right) \quad (4.17)$$

і знайдемо значення $\alpha = \alpha^{(k)}$, яке мінімізує функцію $F(\alpha)$.

Тоді з формул (7.16) знайдемо наближення

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \quad (4.18)$$

і процес обчислень продовжимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, якщо, наприклад,

$$\max_i \left| \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad (4.19)$$

де ε – задана абсолютна похибка.

Для випадку функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функція $F(\alpha)$ матиме вигляд

$$F(\alpha) = f\left(\vec{x}^{(k)} - \alpha \text{grad } f\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right), \quad \alpha > 0. \quad (4.20)$$

Формули (7.18) запишемо так:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \text{grad } f\left(\vec{x}^{(k)}\right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.21)$$

4. Застосування методу найшвидшого спуску до задачі мінімізації квадратичної функції

Нехай у деякому околі критичної точки $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є двічі неперервно диференційовною. Як відомо з курсу математичного аналізу, якщо в цій точці диференціал другого порядку

$d^2u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою

від диференціалів $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, то у цій критичній точці функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має мінімум (максимум).

Зауважимо, що квадратичною формою від змінних $t_1, t_2, \dots, t_n$ називають функцію

$$\Phi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}). \quad (4.22)$$

Числа a_{ij} називають коефіцієнтами квадратичної форми, а матрицю з цих коефіцієнтів $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрицею квадратичної форми. Сформулюємо критерій знаковизначеності квадратичної форми – критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма (4.22) була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.23)$$

При виконанні умов (4.23) матрицю A також називають додатно визначеною.

Для того, щоб квадратична форма (4.22) була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.24)$$

При виконанні нерівностей (4.24) матрицю A також називають від'ємно визначеною.

Метод найшвидшого спуску досить просто реалізується для квадратичної функції вигляду

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}), \quad (4.25)$$

де A – симетрична додатно визначена матриця порядку n , $\vec{b}$ та $\vec{x}$ – вектори з векторного простору E_n , $(\vec{x}, \vec{y})$ – скалярний добуток векторів з E_n .

Можна довести, що ця функція має єдиний екстремум, а саме мінімум. У даному випадку

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, \quad (4.26)$$

величину $\alpha^{(k)}$ визначають за формулою

$$\alpha^{(k)} = \frac{(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}{(A(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}. \quad (4.27)$$

5. Задачі лінійного програмування. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними.

Важливим розділом математичного програмування є лінійне програмування, що вивчає задачі оптимізації, в яких цільова функція є лінійною функцією проектних параметрів, а обмеження задають у вигляді лінійних рівнянь та нерівностей.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування можна подати в такому вигляді: знайти такі числові значення невід’ємних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему лінійних обмежень

[illegible]

і для яких цільова функція

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4.28)$$

досягає екстремуму (мінімуму або максимуму).

Невід’ємні значення $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \dots, x_n = \gamma_n$, які задовольняють систему лінійних обмежень (4.27), називають допустимим розв’язком задачі лінійного програмування. Допустимий розв’язок, для якого цільова функція (4.28) досягає екстремуму, називають оптимальним розв’язком.

Канонічна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему лінійних рівнянь

[illegible]

і умову невід'ємності

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_n \geq 0, \quad (4.30)$$

для яких цільова функція (4.28) досягає мінімуму.

Нерівності різних знаків системи (4.27) завжди можна звести до нерівностей одного знака множенням їх обох частин на -1 , так що завжди розглядають нерівності одного знаку ($\geq$ або $\leq$).

Стандартна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему лінійних нерівностей

При переміщенні цієї прямої паралельно самій собі в напрямі вектора $\text{grad } u$ цільова функція u буде зростати, а при переміщенні прямої в протилежному напрямі – спадати.

Побудуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, яка проходить через початок координат. Будемо переміщувати цю лінію рівня паралельно самій собі в напрямі вектора $\text{grad } u$ при знаходженні найбільшого значення цільової функції в області допустимих значень G або в напрямі вектора $-\text{grad } u$ при знаходженні найменшого значення цільової функції. Точки, які є спільними для лінії рівня та області G за умови, що лінія рівня стає опорною прямою, будуть оптимальними.

Таким чином, оптимізація лінійної цільової функції u на багатокутнику допустимих розв'язків відбувається в точках перетину цього багатокутника з опорними прямими, які відповідають даній цільовій функції. При цьому перетин може бути в одній точці (вершині багатокутника) або в нескінченній множині точок (на стороні багатокутника).

2. Симплексний метод

Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування можна застосувати й у тривимірному просторі, проте це застосування пов'язане з такими громіздкими побудовами, що стає практично неможливим.

Розглянемо симплексний метод, який дає можливість розв'язувати задачі лінійного програмування з будь-якою скінченною кількістю змінних. Покажемо застосування цього методу до випадку, коли обмеження задаються у вигляді нерівностей одного знаку $\leq$ і усі праві частини нерівностей $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Для спрощення викладу приймемо, наприклад, $m = 3$, $n = 4$.

Отже, розглянемо задачу мінімізації: знайти такі числові значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &\leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &\leq b_3, \end{aligned} \quad (4.34)$$

умову невід'ємності

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (4.35)$$

і для яких цільова функція

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \quad (4.36)$$

досягає мінімуму.

Систему лінійних нерівностей (4.34) перетворимо у систему лінійних рівнянь, додавши до лівої частини кожної нерівності по одній невід'ємній змінній x_5, x_6, x_7 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + x_5 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + x_6 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + x_7 &= b_3. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Змінні x_5, x_6, x_7 називають додатковими змінними. В цільову функцію (4.36) їх вводять із нульовими коефіцієнтами, тобто вигляд цільової функції не змінюється.

Прийmemo змінні x_5, x_6, x_7 за базисні й виразимо їх із системи (4.37) через всі інші змінні:

$$\begin{aligned}x_5 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4, \\x_6 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4, \\x_7 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4.\end{aligned}\tag{4.38}$$

За опорний розв'язок візьmemo такий розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0, x_4^{(0)} = 0, x_5^{(0)} = b_1, x_6^{(0)} = b_2, x_7^{(0)} = b_3.\tag{4.39}$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції (4.36) $u^{(0)} = 0$.

Подальше розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом ділиться на ряд етапів, які полягають у тому, що від одного розв'язку потрібно перейти до іншого за умови, щоб цільова функція не зростала. Цього досягають вибором нового базису і нових значень вільних змінних.

Вияснимо, чи є розв'язок (4.39) оптимальним. Оскільки $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 7$), то ми можемо тільки збільшувати їх значення. Якщо всі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4 у формулі (4.36) невід'ємні, то при збільшенні будь-якої змінної $x_1, \dots, x_4$ цільова функція не може зменшитися. В цьому випадку розв'язок (4.39) буде оптимальним.

Нехай серед коефіцієнтів формули (4.36) є хоча б один від'ємний, наприклад, $c_1 < 0$. Це означає, що при збільшенні змінної x_1 цільова функція (4.36) буде зменшуватися порівняно зі значенням $u^{(0)}$, яке відповідає розв'язку (4.39). Тому за новий опорний розв'язок вибираємо розв'язок при таких значеннях вільних параметрів:

$$x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_3 = x_4 = 0.\tag{4.40}$$

При цьому базисні змінні обчислюємо за формулами

$$x_5 = b_1 - a_{11}x_1^{(1)}, x_6 = b_2 - a_{21}x_1^{(1)}, x_7 = b_3 - a_{31}x_1^{(1)}.\tag{4.41}$$

Якщо всі коефіцієнти a_{11}, a_{21}, a_{31} не є додатні, то x_1 можна збільшувати необмежено; в цьому випадку не існує оптимального розв'язку задачі.

Зазвичай серед цих коефіцієнтів є додатні числа, а тому існує можливість зробити деякі базисні змінні від'ємними.

Тому змінну x_1 можна збільшувати тільки доти, доки всі базисні змінні залишаються невід'ємними. Нехай, наприклад, у формулі (4.41) $a_{11} > 0$ та $a_{21} > 0$.

Знайдемо числа $\frac{b_1}{a_{11}}$ та $\frac{b_2}{a_{21}}$ і виберемо з них менше.

$$\text{Нехай } \min \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}} \right\} = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Тоді змінну x_1 можна збільшити тільки до значення $\frac{b_2}{a_{21}}$, оскільки при більших значеннях x_1 базисна змінна x_6 буде від'ємною.

Новий опорний розв'язок запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{b_2}{a_{21}}, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0, \\ x_5^{(1)} &= b_1 - a_{11} \frac{b_2}{a_{21}}, \quad x_6^{(1)} = 0, \quad x_7^{(1)} = b_3 - a_{31} \frac{b_2}{a_{21}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Цільова функція при цих значеннях проектних параметрів має значення $u^{(1)} = c_1 \cdot \frac{b_2}{a_{21}}$. Оскільки за припущенням $c_1 < 0$, $b_2 > 0$ і $a_{21} > 0$, то $u^{(1)} < u^{(0)}$.

На цьому закінчується перший етап оптимізації. Тепер потрібно зробити другий крок, використовуючи аналогічну процедуру. Прийнемо ненульові змінні в (4.42) x_1, x_5, x_7 за базисні змінні, а нульові змінні x_2, x_3, x_4, x_6 за вільні. Із системи (4.37) виразимо x_1, x_5, x_7 через вільні змінні x_2, x_3, x_4, x_6 . Вираз для цільової функції також виразимо через вільні параметри. Після другого кроку ми або знайдемо нові оптимальні значення змінних і відповідне їм значення цільової функції $u^{(2)} < u^{(1)}$, або доведемо, що розв'язок (4.42) є оптимальним. Загалом після скінченної кількості кроків прийдемо до оптимального розв'язку. Зауважимо, що на відміну від методу простого перебирання симплексний метод дає можливість вести пошук оптимального розв'язку цілеспрямовано, зменшуючи на кожному кроці значення цільової функції.

Якщо для системи обмежень не справджуються прийняті припущення, то для розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом використовують штучний базис.

Приклад 4.1. Визначити найменше значення функції $f(x) = e^{-x} - 2\cos x$ на відрізку $[0, 1]$. Точку ξ , в якій дана функція приймає це найменше значення, знайти з абсолютною похибкою $\varepsilon \leq 0,01$.

Розв'язування. Перевіримо, чи приймає дана функція своє найменше значення на відрізку $[0, 1]$ в деякій внутрішній точці ξ цього відрізка. Знайдемо критичні точки функції $f(x)$, які містяться на відрізку $[0, 1]$. $f'(x) = -e^{-x} + 2\sin x$. Оскільки $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1,315$, то існує принаймні одна така точка ξ , $0 < \xi < 1$, що $f'(\xi) = 0$.

Можна переконатися, наприклад, графічним способом, що така точка ξ на відрізку $[0, 1]$ єдина. Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < \xi$ і $f'(x) > 0$ при $x > \xi$, то в точці $x = \xi$ функція $f(x)$ має мінімум. Отже, функція $f(x)$ приймає в точці $x = \xi$ своє найменше значення на відрізку $[0, 1]$.

Позначимо $\gamma_k = f(c_k) - f(d_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). За умовою задачі $a_0 = a = 0$, $b_0 = b = 1$. Застосовуючи формули $c = 0,618a + 0,382b$, $d = 0,382a + 0,618b$, отримаємо $c = c_0 = 0,382$, $d = d_0 = 0,618$. Обчислюємо $f(c_0) = -1,17335$, $f(d_0) = -1,09106$. Оскільки $f(c_0) < f(d_0)$, тобто $\gamma_0 < 0$, то $\xi \in [0; 0,618]$ Згідно з формулою $a_1 = a$; $b_1 = d$; $d_1 = c$; $c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1$. приймаємо $a_1 = 0$, $b_1 = 0,618$, $d_1 = 0,382$ і обчислюємо $c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1 = 0,236$. Обчислюємо $f(c_1) = -1,15478$. Оскільки $f(c_1) > f(d_1)$, тобто $\gamma_1 > 0$, то $\xi \in [0,236; 0,618]$. Згідно з формулою $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$, $c_{k+1} = d_k$ приймаємо $a_2 = 0,236$, $b_2 = 0,618$, $c_2 = 0,382$ і обчислюємо $d_2 = 0,382a_2 + 0,618b_2 = 0,472$. Подальші обчислення проводимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, як тільки справдиться нерівність $h_k = b_k - a_k < 0,01$.

Результати обчислень доцільно записати у таблицю.

k	a_k	b_k	c_k	d_k	$f(c_k)$	$f(d_k)$	Знак γ_k	h_k
0	0	1	0,382	0,618	-0,17335	-1,09106	—	1
1	0	0,618	0,236	0,382	-1,15478	-1,17335	+	0,618
2	0,236	0,618	0,382	0,472	-1,17335	-1,15757	—	0,382
3	0,236	0,472	0,326	0,382	-1,17286	-1,17335	+	0,236
4	0,326	0,472	0,382	0,416	-1,17335	-1,16975	—	0,146
5	0,326	0,416	0,360	0,382	-1,17412	-1,17335	—	0,090
6	0,236	0,382	0,347	0,360	-1,17399	-1,17412	+	0,056
7	0,347	0,382	0,360	0,369	-1,17412	-1,17395	—	0,035
8	0,347	0,369	0,355	0,360	-1,174120	-1,174117	—	0,022
9	0,347	0,360	0,352	0,355	-1,174090	-1,174120	+	0,013
10	0,352	0,360						0,008

Оскільки $h_{10} = 0,008 < 0,01$, то процес мінімізації закінчено. За наближене значення ξ приймаємо $\xi^* = \frac{0,352 + 0,360}{2} = 0,356$; $f_{\min} = f(0,356) = -1,174124$.

Приклад 4.2. Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$ з точністю $\varepsilon = 0,02$, взявши за

початкове наближення вектор $\vec{x}^{(0)}$, якщо A – симетрична додатно визначена матриця третього порядку, $(\vec{x}, \vec{y})$ – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. За формулою $\text{grad } f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$ при $k=0$ обчислимо $\text{grad } f(\vec{x}^{(0)})$:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\vec{x}^{(0)}) &= A\vec{x}^{(0)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,8 + 1,3 - 1,2 \\ 0,6 + 5,2 + 2,4 \\ -0,6 + 2,6 + 7,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 8,2 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Формулу $\alpha^{(k)} = \frac{(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}{(A(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}$ запишемо у вигляді $\alpha^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}}{\eta^{(k)}}$.

$$\gamma^{(0)} = (A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = (-0,1)^2 + 0,2^2 + 0,2^2 = 0,09.$$

$$A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 + 0,2 - 0,2 \\ -0,1 + 0,8 + 0,4 \\ 0,1 + 0,4 + 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 1,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(0)} = (A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = -0,1(-0,3) + 0,2 \cdot 1,1 + 0,2 \cdot 1,7 = 0,59.$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{\gamma^{(0)}}{\eta^{(0)}} = \frac{0,09}{0,59} = 0,1525.$$

За формулою $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \text{grad } f(\vec{x}^{(k)})$ при $k=0$ знаходимо перше наближення:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \alpha^{(0)} \text{grad } f(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - 0,1525 \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix}.$$

Наступні обчислення виконуємо аналогічно. Знаходимо $\text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}$:

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix}.$$

$$A(A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0667 \\ -0,0542 \\ -0,2670 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(1)} = (-0,0544)^2 + 0,0322^2 + (-0,0643)^2 = 0,00813.$$

$$\eta^{(1)} = -0,0544(-0,0667) + 0,0322(-0,0544) - 0,0643(-0,2670) = 0,01905.$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)}}{\eta^{(1)}} = \frac{0,00813}{0,01905} = 0,4268.$$

Друге наближення:

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - \alpha^{(1)} \text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - 0,4268 \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix}.$$

Знову обчислюємо $\text{grad } f(\vec{x}^{(2)})$:

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(2)}) = A\vec{x}^{(2)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ 0,0545 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(2)} = (-0,0256)^2 + 0,0555^2 + 0,0545^2 = 0,00671$$

$$A(A\vec{x}^{(2)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ 0,0545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0758 \\ 0,3054 \\ 0,4636 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(2)} = -0,0256(-0,0758) + 0,0555 \cdot 0,3054 + 0,0545 \cdot 0,4636 = 0,04416.$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{\gamma^{(2)}}{\eta^{(2)}} = \frac{0,00671}{0,04416} = 0,1519.$$

Третє наближення:

$$\vec{x}^{(3)} = \vec{x}^{(2)} - \alpha^{(2)} \text{grad } f(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - 0,1519 \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ -0,0545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо $\text{grad } f(\vec{x}^{(3)})$:

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(3)}) = A\vec{x}^{(3)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0140 \\ 0,0092 \\ 0,0162 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\max_i \left| \frac{\partial f(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})}{\partial x_i} \right| = 0,0162 < 0,02$, то обчислення закінчуємо.

Знайдемо найменше значення функції, яке дорівнює $f(\vec{x}^{(3)})$.

$$f(\vec{x}^{(3)}) = \frac{1}{2} (A\vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(3)}) - (\vec{b}, \vec{x}^{(3)}).$$

$$A\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9860 \\ 8,0092 \\ 8,9838 \end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{x}^{(3)}) = \frac{1}{2}(1,9860 \cdot 0,6424 + 8,0092 \cdot 1,2474 + 8,9838 \cdot 1,1886) - \\ - (2 \cdot 0,6424 + 8 \cdot 1,2474 + 9 \cdot 1,1886) = \frac{1}{2} \cdot 21,9446 - 21,9614 = -10,9891.$$

Отже, $f_{\min} = -10,9891$ при $x_1 = 0,6424$, $x_2 = 1,2474$, $x_3 = 1,1886$.

Приклад 4.3. Знайти такі значення змінних x_1, x_2 , які задовольняють систему нерівностей

$$8x_1 + 5x_2 \geq 12,$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$x_2 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

і при яких цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ досягає найменшого та найбільшого значень.

Розв'язування. Побудуємо прямі

$$8x_1 + 5x_2 = 12, \quad (1)$$

$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 = 7, \quad (3)$$

$$x_2 = 1, \quad (4)$$

та зобразимо область G допустимих розв'язків даної задачі (чотирикутник $ABDE$).

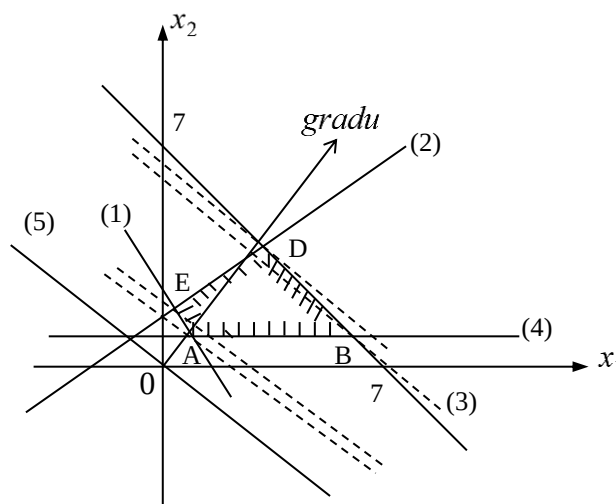


Рисунок 4.3

Побудуємо лінію рівня (5) $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, та вектор $\text{grad } u = (2, 3)$. Будемо переміщувати пряму $2x_1 + 3x_2 = 0$ паралельно самій собі в напрямі градієнта функції u . Оскільки в цьому напрямі цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ зростає, то найменшого значення в області допустимих розв'язків G вона досягає у вершині A , а найбільшого – у вершині D .

Щоб знайти координати точок A та D , розв'яжемо дві системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & 8x_1 + 5x_2 = 12, \\ & x_2 = 1; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{б)} & -2x_1 + 3x_2 = 6, \\ & x_1 + x_2 = 7. \end{array}$$

З першої системи одержимо $x_1 = \frac{7}{8}$, $x_2 = 1$, тобто $A\left(\frac{7}{8}, 1\right)$; з другої – $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, тобто $D(3, 4)$.

Отже, найменше значення цільової функції

$$u_{\min} = 2 \cdot \frac{7}{8} + 3 = 4,75,$$

а найбільше значення

$$u_{\max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Зауваження. Якщо поставимо задачу про екстремум, наприклад, цільової функції $u_1 = -2x_1 + 3x_2$ при тих самих обмеженнях на область допустимих значень, то за допомогою аналогічних міркувань можна пересвідчитися, що мінімального значення функція u_1 набуде у вершині B , а максимального – в будь-якій точці відрізка ED .

Приклад 4.4. У розпорядженні бригади робітників є ресурси: 420кг металу, 150м² скла та 210год. робочого часу. Бригаді доручено виготовляти вироби двох видів: A та B . Ціна одного виробу виду A – 48 грн., а виду B – 40 грн. На виготовлення одного виробу A потрібно 4кг металу, 2м² скла і 3год. робочого часу, а на виготовлення одного виробу B – 6кг металу, 1м² скла і 2год. робочого часу. Потрібно так спланувати обсяг випуску продукції, щоб її вартість була максимальною.

Розв'язування. Складемо математичну модель цієї задачі. Нехай x_1 та x_2 – кількість виробів видів A та B , які потрібно запланувати; x_1 та x_2 є цілими невід'ємними числами. Наявні ресурси сировини і робочого часу задамо у вигляді обмежень – нерівностей

$$4x_1 + 6x_2 \leq 420,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 150,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 210.$$

Повну вартість запланованої до виробництва продукції виражають формулою

$$u = 48x_1 + 40x_2.$$

Таким чином, потрібно визначити такі значення проектних параметрів x_1 та x_2 , які задовольняють систему лінійних нерівностей і для яких цільова функція досягає максимуму.

Введемо додаткові змінні $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$, при цьому виберемо їх так, щоб обмеження-нерівності перетворилися у рівняння

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 = 420,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 150,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 210.$$

Зауважимо, що цільова функція не змінить свого вигляду. Фактично x_3, x_4 та x_5 будуть означати залишки ресурсів, що не використані у виробництві.

Якщо змінити знак цільової функції тобто розглянути нову цільову функцію

$$z = -u = -48x_1 - 40x_2,$$

то одержимо задачу мінімізації для цільової функції.

Прийmemo x_3, x_4, x_5 за базисні змінні й виразимо їх через вільні змінні x_1 та x_2 з рівнянь обмеження

$$x_3 = 420 - 4x_1 - 6x_2,$$

$$x_4 = 150 - 2x_1 - x_2,$$

$$x_5 = 210 - 3x_1 - 2x_2.$$

За початковий опорний візьmemo розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних

$$x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 420, x_4^{(0)} = 150, x_5^{(0)} = 210.$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції

$$z^{(0)} = 0.$$

Отримане значення не є мінімальним, оскільки значення цільової функції z можна зменшити шляхом збільшення вільних параметрів x_1 та x_2 . У формулі, що отримали, обидва коефіцієнти від'ємні, але оскільки $48 > 40$, то прийmemo $x_2 = 0$, а будемо збільшувати змінну x_1 доти, доки базисні змінні будуть невід'ємними.

x_1 можна збільшувати до значення $x_1 = 70$, бо при більших його значеннях базисна змінна x_5 буде від'ємною.

Таким чином, при $x_1 = 70, x_2 = 0$ одержимо новий опорний розв'язок

$$x_1^{(1)} = 70, x_2^{(1)} = 0, x_3^{(1)} = 140, x_4^{(1)} = 10, x_5^{(1)} = 0.$$

Значення цільової функції для цього розв'язку

$$z^{(1)} = -3360.$$

Новий розв'язок кращий, оскільки значення цільової функції зменшилося порівняно з попереднім.

Наступний крок почнемо з вибору нового базису. Прийmemo ненульові змінні x_1, x_3, x_4 за базисні змінні, а змінні x_2, x_5 – за вільні. Із системи знайдемо:

$$x_1 = 70 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5,$$

$$x_3 = 140 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_5,$$

$$x_4 = 10 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5.$$

Виразимо цільову функцію через вільні параметри x_2, x_5 :

$$z = -3360 - 8x_2 + 16x_5.$$

Значення цільової функції можна зменшити за рахунок збільшення x_2 , оскільки коефіцієнт при цій змінній від'ємний. При цьому зростання змінної x_5 недопустиме, бо це призвело б до зростання цільової функції. Тому приймемо $x_5 = 0$.

Швидше від змінної x_1 нульового значення досягне змінна x_3 при $x_2 = 42$. Подальше збільшення x_2 неможливе, оскільки змінна x_3 буде від'ємною.

Отже, одержуємо наступний опорний розв'язок при $x_2 = 42, x_3 = 0$

$$x_1^{(2)} = 42, x_2^{(2)} = 42, x_3^{(2)} = 0, x_4^{(2)} = 24, x_5^{(2)} = 0.$$

Значення цільової функції для цього розв'язку

$$z^{(2)} = -3696.$$

Для виконання наступного кроку змінні x_1, x_2, x_4 приймемо за базисні, а x_3, x_5 – за вільні змінні. Із отриманої системи знайдемо:

$$x_1 = 42 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5,$$

$$x_2 = 42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5,$$

$$x_4 = 24 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{4}{5}x_5.$$

Цільова функція набуде вигляду

$$z = -3360 - 8 \left(42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5 \right) + 16x_5,$$

тобто

$$z = -3696 + \frac{12}{5}x_3 + \frac{64}{5}x_5.$$

Оскільки в цій формулі коефіцієнти при x_3 та x_5 додатні, то при збільшенні цих параметрів значення функції зростає.

Отже, мінімальне значення цільової функції відповідає нульовим значенням змінних x_3 та x_5 і одержаний розв'язок є оптимальним. Значення цільової функції для цього розв'язку є максимальним і воно дорівнює $u_{\max} = 3696$.

Таким чином, для одержання максимальної вартості продукції при заданих ресурсах необхідно виготовити по 42 вироби виду А та В. Вартість запланованої продукції дорівнює 3696 грн. При цьому всі ресурси металу і робочого часу будуть використані, а скла залишиться 24 м^2 .

Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом можна оформити у вигляді послідовності симплекс-таблиць. Покажемо це на прикладі розв'язаної задачі. Цільову функцію запишемо у вигляді

$$z + 48x_1 + 40x_2 = 0.$$

У стовпець “базис” запишемо назву цільової функції та базисні невідомі, у стовпець “план” – праві частини обмежень та константу у представленні цільової функції. У стовпці $x_1, \dots, x_5$ запишемо коефіцієнти при відповідних змінних.

У випадку пошуку мінімуму функції z розв'язок (план) буде оптимальним, якщо числа, одержані в рядку z , не є додатні. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислення закінчено. Оптимальні значення базисних невідомих і цільової функції можна знайти у стовпці “план”.

Якщо розв'язок не є оптимальним, то серед додатних коефіцієнтів рядка z вибираємо найбільший. Він визначає змінну, яка буде включена в новий базис, та ведучий стовпець.

Обчислюємо відношення чисел стовпця “план” до відповідних додатних елементів ведучого стовпця і серед них вибираємо найменше. Воно визначає ведучий рядок та змінну, яка буде виключена з базису. На перетині ведучого рядка та ведучого стовпця міститься ведучий елемент.

Якщо всі елементи ведучого стовпця від'ємні, то цільова функція необмежена.

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінну ведучого стовпця включаємо в базис. Відповідний їй рядок отримуємо шляхом ділення ведучого рядка на ведучий елемент. Помножимо цей рядок на елемент з протилежним знаком i -го рядка ведучого стовпця і додамо його до цього ж i -го рядка. Такі ж перетворення виконаємо з усіма рядками. Одержимо нову симплекс-таблицю, яку перевіримо на оптимальність. Побудову наступних симплекс-таблиць виконаємо аналогічно.

Базис	План	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	48	40	0	0	0
x_3	420	4	6	1	0	0
x_4	150	2	1	0	1	0
$\leftarrow x_5$	210	<u>3</u>	2	0	0	1
z	-3360	0	$8\downarrow$	0	0	-16
$\leftarrow x_3$	140	0	<u>$10/3$</u>	1	0	$-4/3$
x_4	10	0	$-1/3$	0	1	$-2/3$
x_1	70	1	$2/3$	0	0	$1/3$
z	-3696	0	0	$-12/5$	0	$-64/5$
x_2						

x_4	42	0	1	3/10	0	-2/5
x_1	24	0	0	1/10	1	-4/5
	42	1	0	-1/5	0	3/5

Отже, $z_{\min} = -3696$ при $x_1 = 42, x_2 = 42, x_3 = 0, x_4 = 24, x_5 = 0$.

Тема 5. Теорія графів.

Роком виникнення теорії графів одностайно вважається рік 1736, коли Леонард Ейлер опублікував розв'язок так званої задачі про кенігсберзькі мости, а також знайшов загальний критерій існування ейлерового циклу в графі. Отримання дальших суттєвих результатів у цій галузі датують серединою XIX століття. Однак початок проведення активних систематичних досліджень та становлення теорії графів як окремішнього авторитетного розділу сучасної математики відбулося ще майже 100 років по тому, тобто в середині XX століття. Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ.

Великою мірою це пов'язано з виникненням, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру. Математика від "обслуговування" переважно фізики переходить до проникнення своїх методів у інші сфери людської діяльності. Одним з потужних інструментів такого проникнення є граф.

Із суто формальної точки зору граф можна розглядати як один з різновидів алгебраїчної системи (а саме, як модель), а отже, і всю теорію графів – як розділ сучасної алгебри. Справді, результати та методи алгебри широко використовуються в теорії графів. Однак за останні півстоліття активного інтенсивного та екстенсивного розвитку теорія графів виробила свою достатньо специфічну власну проблематику і методологію. На сьогодні теорія графів є однією зі складових математичного апарату кібернетики, важливим розділом дискретної математики.

1. Поняття графа. Способи завдання графів

Нехай V – деяка непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V .

Графом (неорієнтованим графом) G називається пара множин (V, E) , де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$ ($E \subseteq V^{(2)}$); позначається $G = (V, E)$

Елементи множини V називаються вершинами графа G , а елементи множини E – ребрами графа G . Відповідно V називається множиною вершин і E – множиною ребер графа G .

Традиційно ребра $\{v, w\}$ записуються за допомогою круглих дужок (v, w) (іноді просто vw).

Граф, який складається з однієї вершини, називається тривіальним.

Оскільки для тривіального графа або так званих порожніх графів $G = (V, \emptyset)$ переважну більшість властивостей та тверджень перевірити неважко, то надалі

не будемо кожен раз при формулюванні та доведенні тих чи інших загальних тверджень теорії графів спеціально обумовлювати, що йдеться про нетривіальні графи (при цьому для тривіального або порожнього графів результат може бути дещо іншим).

Нехай задано граф $G=(V,E)$. Якщо $(v,w) \in E$, то кажуть, що вершини v і w є суміжними, у протилежному разі вершини v і w є несуміжними. Якщо $e=(v,w)$ – ребро графа, то вершини v і w називаються кінцями ребра e . У цьому випадку кажуть також, що ребро e з'єднує вершини v і w . Вершина v і ребро e називаються інцидентними, якщо v є кінцем e .

Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають спільну вершину.

Існує декілька способів завдання графів.

Одним зі способів завдання графа $G=(V,E)$ є завдання кожної з множин V і E за допомогою переліку їх елементів.

Граф $G=(V,E)$ зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають діаграмою графа G . Вершинам графа G ставляться у бієктивну відповідність точки площини; точки, що відповідають вершинам v і w , з'єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді і тільки тоді, коли v і w суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінюватиме свій вигляд у залежності від вибору відповідних точок на площині.

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Занумеруємо всі вершини графа G натуральними числами від 1 до n . Матрицею суміжності A графа G називається квадратна $n \times n$ -матриця, в якій елемент a_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 у протилежному разі.

Очевидно, що матриці суміжності графів – симетричні.

Занумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n і всі його ребра – числами від 1 до m . Матрицею інцидентності B графа G називається $n \times m$ -матриця, в якій елемент b_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершина v_i з номером i інцидентна ребру e_j з номером j , і дорівнює 0 у протилежному разі.

Нарешті, ще одним способом завдання графів є списки суміжності. Кожній вершині графа відповідає свій список. У список, що відповідає вершині v , послідовно записуються всі суміжні їй вершини.

Вибір та зручність того чи іншого зі способів завдання графів залежать від особливостей задачі, яка розв'язується.

2. Підграфи. Ізоморфізм графів. Алгебра графів.

Граф $G_1=(V_1,E_1)$ називається підграфом графа $G=(V,E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ і $E_1 \subseteq E$.

Важливі класи підграфів складають підграфи, які отримуються в результаті застосування до заданого графа операції вилучення вершини і/або операції вилучення ребра.

Операція вилучення вершини v з графа $G=(V,E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v , а з множини E – всіх ребер, інцидентних v .

Операція вилучення ребра e з графа $G=(V,E)$ – це вилучення елемента e з множини E . При цьому всі вершини зберігаються.

Графи $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називаються ізоморфними, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2 , що ребро $(v,w) \in E_1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$. Відображення φ називається ізоморфним відображенням або ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2 .

Таким чином, ізоморфні граfi відрізняються фактично лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. З точки зору теорії графів ця відмінність не є суттєвою, тому звичайно ізоморфні граfi ототожнюють і, зображаючи граfi у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їхні вершини, або нумерують вершини натуральними числами.

Ізоморфне відображення графа G на себе називається автоморфізмом графа G . Автоморфізм φ графа $G=(V,E)$, при якому для кожної вершини $v \in V$ виконується $\varphi(v)=v$, називається тривіальним автоморфізмом.

Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності на сукупності графів.

Теорема 1. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого графа за допомогою відповідних перестановок рядків та стовпчиків.

Доведення. Справді, як було зазначено вище, ізоморфні граfi G_1 і G_2 відрізняються між собою лише порядком нумерації вершин, тобто існує бієктивне відображення φ множини номерів вершин першого графа на множину номерів вершин другого. Отже, кожен елемент $a_{ij}^{(1)}$ матриці суміжності A_1 графа G_1 збігається з елементом $a_{\varphi(i)\varphi(j)}^{(2)}$ (тобто елементом, який знаходиться в рядку з номером $\varphi(i)$ і стовпчику з номером $\varphi(j)$) матриці суміжності A_2 графа G_2 . Таким чином, шляхом послідовного одночасного обміну місцями (перестановок) рядків і стовпчиків з номерами i та $\varphi(i)$ для всіх $i=1,2,\dots,n$ матрицю суміжності A_1 можна перетворити у матрицю суміжності A_2 і навпаки.

Якщо відображення φ відоме, то таке перетворення виконати неважко. У разі ж, коли потрібно перевірити за допомогою матриць суміжності, чи є ізоморфними два задані граfi з n вершинами кожний, необхідно здійснити різноманітні одночасні перестановки рядків і стовпчиків однієї з них. Якщо після чергової з таких перестановок дістанемо матрицю, яка повністю збігається з іншою, то ці граfi ізоморфні. Однак, щоб в такий спосіб з'ясувати, що задані граfi не є ізоморфними, потрібно виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпчиків. Вже для порівняно невеликих значень n здійснити цей перебір практично неможливо навіть за допомогою обчислювальної машини. У прикладній теорії алгоритмів розробляються різноманітні алгоритми перевірки ізоморфізму графів, які для більшості графів (або окремих типів графів) дозволяють суттєво скоротити обсяг необхідних перевірок.

Для матриць інцидентності графів G_1 і G_2 з n вершинами і m ребрами кожний справедливий аналогічний міркування. Відмінність у тому, що коли G_1 і G_2 ізоморфні, тоді для їхніх множин вершин існує бієкція φ , а для множин ребер – інша бієкція ψ . Загальна ж кількість необхідних кроків для перевірки ізоморфізму графів G_1 і G_2 у цьому випадку не перевищує $n!m!$.

Граф $G=(V,E)$ називається повним, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E=V(V-1)/2$). Повний граф з n вершинами позначається K_n .

Очевидно, що будь-яка підстановка множини вершин повного графа K_n є автоморфізмом цього графа. Тому кількість усіх можливих автоморфізмів графа K_n дорівнює $n!$

Для графів можна означити операції об'єднання, перетину і доповнення.

Об'єднанням графів $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називається граф $G=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$; позначається $G=G_1 \cup G_2$. Об'єднання $G=G_1 \cup G_2$ називається прямою сумою графів G_1 і G_2 , якщо $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Перетином і різницею графів $G_1=(V,E_1)$ і $G_2=(V,E_2)$ з однаковими множинами вершин називаються графи $G'=(V,E_1 \cap E_2)$ і $G''=(V,E_1 \setminus E_2)$ відповідно; позначаються $G'=G_1 \cap G_2$ і $G''=G_1 \setminus G_2$.

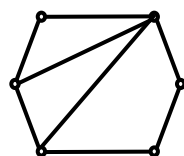
Доповненням графа $G=(V,E)$ називається граф $\bar{G}=(V, V(V-1)/2 \setminus E)$. Отже, граф $\bar{G}$ має ту саму множину вершин V , що і граф G , а вершини графа $\bar{G}$ суміжні тоді і лише тоді, коли вони несуміжні в G . Для графа G з n вершинами виконується $\bar{\bar{G}}=K_n \setminus G$.

Таким чином можна означити алгебру графів $A=\langle \Gamma, \{\cup, \cap, \setminus\} \rangle$ (типу $(2,2,1)$), носієм якої є множина Γ всіх графів. Існують й інші операції для графів, отже, сигнатуру алгебри A можна розширювати.

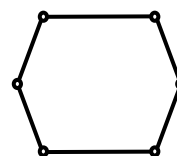
Неважко переконатись у справедливості такого твердження.

Теорема 2. Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\bar{G}_1$ і $\bar{G}_2$.

Приклад 7. Об'єднання і перетин графів H_1 і H_2 з попереднього прикладу зображені на рис.5.1. Доповнення графів G_2 і H_2 зображені на рис.5.2.

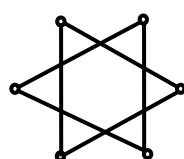


$H_1 \cup H_2$

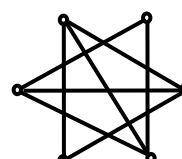


$H_1 \cap H_2$

Рисунок 5.1



$\bar{G}_2$



$\bar{H}_2$

Рисунок 5.2

3. Граф як модель. Застосування теорії графів

Останнім часом графи і пов'язані з ними методи досліджень використовуються практично в усіх розділах сучасної математики і, зокрема, дискретної математики.

Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів.

Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені:

- електричні і транспортні мережі;
- інформаційні і комп'ютерні мережі;
- карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів;
- моделі кристалів;
- структури молекул хімічних речовин;
- моделі ігор;
- різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, решітки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми і програми тощо);
- лабіринти;
- плани діяльності або плани виконання певних робіт (розклади);
- генеалогічні дерева тощо.

Приклади застосування теорії графів:

- пошук зв'язних компонентів у комунікаційних мережах;
- пошук найкоротших, “найдешевших” та “найдорожчих” шляхів у комунікаційних мережах;
- побудова кістякового дерева: зв'язність з найменшою можливою кількістю ребер;
- пошук максимальної течії для транспортної мережі, в якій визначено вхідні та вихідні вершини та пропускні спроможності ребер;
- ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);
- знаходження циклів графів:
- гамільтонів цикл: обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера);
- ейлерів цикл: обійти всі ребра (контроль дієздатності мережі);
- розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;
- планарність графів: проектування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;
- знаходження центрів графа: вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графа є мінімальною (“столиць”)

Приклад 5.1. Графи G_1 та G_2 ($G=(V,E)$) задані множинами V та E за допомогою переліку їх елементів: $G_1=(V_1,E_1)$, $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ і $E_1=\{(v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4)\}$ – граф із чотирма вершинами і п'ятьма ребрами. А граф $G_2=(V_2,E_2)$, $V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ і $E_2=\{(v_1,v_2), (v_2,v_4), (v_1,v_5), (v_3,v_2), (v_3,v_5), (v_4,v_1), (v_5,v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами і сімома ребрами.

Необхідно записати для цих графів 1) діаграми, 2) матриці суміжності, 3) матриці інцидентності, 4) списки суміжності,

Розв'язування.

1. На рисунку 6 зображені діаграми графів G_1 і G_2



Рисунок 5.3

2. Для графів G_1 і G_2 отримаємо матриці графів відповідно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0011 \\ 0011 \\ 1101 \\ 1110 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 01011 \\ 10110 \\ 01001 \\ 11001 \\ 10110 \end{pmatrix}$$

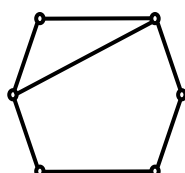
3. Для графів G_1 і G_2 отримаємо матриці інцидентності

$$B_1 = \begin{pmatrix} 11000 \\ 00110 \\ 10101 \\ 01011 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1010010 \\ 1101000 \\ 0001100 \\ 0100011 \\ 0010101 \end{pmatrix}$$

4. Для графів G_1 і G_2 отримаємо списки суміжності

G_1 : v_1 : v_3, v_4 v_2 : v_3, v_4 v_3 : v_1, v_2, v_4 v_4 : v_1, v_2, v_3	G_2 : v_1 : v_2, v_4, v_5 v_2 : v_1, v_3, v_4 v_3 : v_2, v_5 v_4 : v_1, v_2, v_5 v_5 : v_1, v_3, v_4
---	---

Приклад 5.2. Визначити об'єднання і перетин графів H_1 і H_2 , що задані діаграмами:



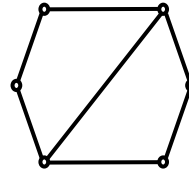
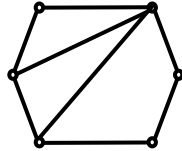
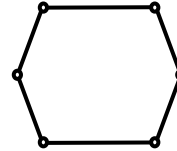
H_1  H_2

Рисунок 5.4

Розв'язування. $H_1 \cup H_2$  $H_1 \cap H_2$ **Приклад 5.3.**

Задача про 15 мостів.

У деякій місцевості через протоки перекинуто 15 мостів (рисунок 8).

Чи можна обійти всі мости пройшовши по кожному тільки один раз?

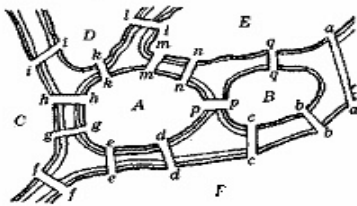


Рисунок 8

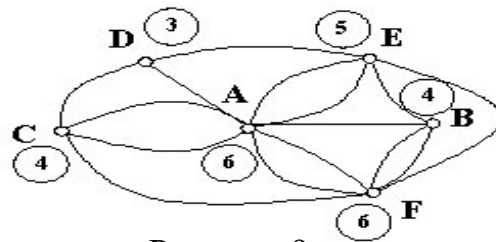


Рисунок 9

Розв'язування.

Побудуємо граф, де вершини - острови і береги, а ребра – мости (рисунок 9).

Непарні вершини: D, E.

Отже, оскільки кількість непарних вершин дорівнює 2, то обхід можливий.

Його початок може бути в місцевості D, а кінець в місцевості E.

Тема 6. Рівняння математичної фізики.

Математична фізика – теорія математичних моделей фізичних явищ. Вона займає особливе положення і в математиці і в фізиці, знаходячись на стику цих наук. Математична фізика тісно пов'язана з фізикою в тій частині, що стосується побудови математичної моделі, і, в той же час, математична фізика – розділ математики, оскільки методи дослідження моделей є математичними. В поняття методів математичної фізики включаються ті методи, які застосовуються для побудови і вивчення математичних моделей, що описують великі класи фізичних явищ. Коло питань математичної фізики глибоко пов'язане з дослідженням різних фізичних явищ: задач з теорії пружності, електродинаміки, гідродинаміки, теплопровідності і т. п.

I. Рівняння вільних коливань струни.

I.1. Метод Фур'є.

Метод відокремлення змінних або метод Фур'є (метод стоячих хвиль), є одним із найбільш поширених методів розв'язування рівнянь із частинними похідними. Викладення методу проведемо для задачі про коливання струни, закріпленої на кінцях.

Необхідно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

яке задовольняє однорідним граничним умовам

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, (t > 0)$$

$$\text{і початковим умовам } \left. \begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= F(x) \end{aligned} \right\} (0 \leq x \leq l).$$

Оскільки диференціальне рівняння лінійне і однорідне, його загальний розв'язок можна знайти як суму частинних розв'язків.

Частинні розв'язки рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

де $X(x)$ – функція лише змінної x , $T(t)$ – функція лише змінної t .

Таким чином, отримаємо: $a^2 X''(x)T(t) = T''(t)X(x)$. Поділивши обидві частини рівняння на $a^2 X(x)T(t)$, отримаємо рівняння, права частина якого є функцією лише змінної t , а ліва – лише x .

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Якщо позначити рівність двох відношень через $-\lambda$, де λ – постійна, яку для зручності візьмемо із знаком « $-$ », то отримаємо звичайні диференціальні рівняння для визначення $X(x)$ і $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0,$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0.$$

Крайові умови

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= X(0) \cdot T(t) = 0, \\ u(l, t) &= X(l) \cdot T(t) = 0 \end{aligned} \right\}$$

вносять обмеження лише на функцію $X(x)$, оскільки $T(t) \neq 0$.

Таким чином, для знаходження функції $X(x)$ ми прийшли до **задачі про власні значення**: знайти такі значення параметра λ , при яких існують нетривіальні розв'язки задачі:

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) &= X(l) = 0, \end{aligned} \right\}$$

а також знайти ці розв'язки.

Такі значення параметра λ називаються **власними значеннями**, а відповідні нетривіальні розв'язки – **власними функціями задачі**.

Сформульовану таким чином задачу називають **задачею Штурма-Ліувілля**.

Координатна функція та часовий множник частинних розв'язків задачі. Розв'язок звичайного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами шукаємо у вигляді

$$X(x) = e^{rx}$$

і складаємо відповідне характеристичне рівняння $r^2 + \lambda = 0$

Розглянемо окремо випадки, коли параметр λ від'ємний, дорівнює нулю або додатний.

1. При $\lambda < 0$ задача має лише тривіальні розв'язки. Внаслідок того, що корені дійсні і різні ($r_1 = -\sqrt{-\lambda}$, $r_2 = \sqrt{-\lambda}$), то загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничні умови дають: $X(0) = C_1 + C_2 = 0$; $X(l) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0$,

тобто $C_1 = -C_2$ і $C_1(e^{-\sqrt{-\lambda}x} - C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}) = 0$.

Звідси $C_1 = C_2 = 0$ і $X(x) = 0$.

2. При $\lambda = 0$ задача також не має нетривіальних розв'язків. В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничні умови дають:

$$X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; \quad X(l) = C_1 l = 0,$$

тобто $C_1 = C_2 = 0$ і $X(x) = 0$.

3. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння записується у вигляді

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничні умови дають:

$$X(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 = 0; \quad X(l) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

тобто $C_1 = 0$ і $C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Якщо $X(x) \neq 0$, то $C_2 \neq 0$, $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ і

$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, де $n \in \mathbf{Z}$. Таким чином, нетривіальні розв'язки можливі лише при

значеннях $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Цим власним значенням λ_n , які називаються

власними числами задачі, відповідають **власні функції**

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де $C_n \neq 0$ – довільні постійні, які можна прийняти рівними одиниці.

Таким чином, власним числам λ_n задачі відповідають функції $\sin \frac{\pi n}{l} x$ ($n \in \mathbf{N}$), тобто задача має власні числа

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \left(2\frac{\pi}{l}\right)^2, \left(3\frac{\pi}{l}\right)^2, \dots, \left(n\frac{\pi}{l}\right)^2, \dots$$

і їм відповідають власні функції

$$\sin \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{3\pi}{l} x, \dots, \sin \frac{n\pi}{l} x, \dots$$

Отже, координатна функція знайдена у вигляді

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Розв'язок диференціального рівняння

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0$$

буде мати ті самі значення власних чисел λ_n . Його можна записати у вигляді

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at,$$

де A_n і B_n – довільні постійні.

Отриманий розв'язок визначає часовий множник $T(t)$.

Частинні розв'язки задачі про коливання скінченної струни.

Для різних значень n частинні значення X_n та T_n і їх добутку $u_n(x, t)$ можемо записати

n	1	2	3	...	n	...
X_n	X_1	X_2	X_3	...	X_n	...
T_n	T_1	T_2	T_3	...	T_n	...
$u_n(x, t)$	$X_1 \cdot T_1$	$X_2 \cdot T_2$	$X_3 \cdot T_3$	...	$X_n \cdot T_n$	...

Підставивши у $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ значення координатної функції $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$ і часового множника $T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at$, отримаємо частинні розв'язки у вигляді

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Похідна по часу дорівнює

$$\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = \frac{\pi n a}{l} \left(B_n \cos \frac{\pi n}{l} at - A_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Знайдені розв'язки задовольняють крайові умови задачі

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Початкові умови задачі для частинних розв'язків $u_n(x, t)$ легко знайти із знайдених функцій і їх похідних при $t = 0$:

$$u_n(x, 0) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\pi n a}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Загальний розв'язок задачі про коливання скінченної струни.

частинних розв'язків задачі $u_n(x, t)$ складемо загальний розв'язок задачі $u(x, t)$ таким чином, щоб він задовольняв початкові умови

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= F(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq l).$$

Внаслідок лінійності і однорідності вихідного диференціального рівняння сума частинних розв'язків задачі

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

також задовольняє це рівняння і граничним умовам. Виконання початкових умов дозволить нам визначити невідомі постійні A_n та B_n . Позначимо утворену суму через $u(x, t)$ і знайдемо похідну по часу від цієї функції

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} \left(B_n \cos \frac{\pi n}{l} at - A_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Будемо вимагати, щоб виконувались початкові умови задачі:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Таким чином, отримуємо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \text{ і } F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Запишемо знайдені значення у розгорнутому вигляді

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\pi}{l} x + A_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + A_3 \sin \frac{3\pi}{l} x + \dots + A_n \sin \frac{\pi n}{l} x + \dots,$$

$$F(x) = B_1 \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi}{l} x + B_2 \frac{2\pi a}{l} \sin \frac{2\pi}{l} x + \dots + B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x + \dots$$

Помножимо рівності на $\sin \frac{\pi n}{l} x dx$ і проінтегруємо в інтервалі $(0, l)$. В лівих частинах рівностей отримаємо інтеграли

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

В правих частинах рівностей отримаємо

$$A_n \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{A_n}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right) dx = \frac{l A_n}{2},$$

$$B_n \frac{\pi n a}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = B_n \frac{\pi n a}{2l} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right) dx = B_n \frac{\pi n a}{2l}.$$

Всі інші інтеграли в правих частинах рівностей дорівнюють нулю.

Таким чином, отримуємо

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \text{ і } B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що довільна кусочно-неперервна і кусочно-диференційовна функція $z(x)$, яка задана в проміжку $(0, l)$, розкладається в ряд Фур'є

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \text{ де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l z(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Якщо функції $f(x)$ і $F(x)$ задовольняють умовам розкладу в ряд Фур'є, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Порівняння цих рядів із знайденими показує, що функції $f(x)$ і $F(x)$, якщо вони кусково-неперервні і кусково-диференційовні, можна розглядати як розклади цих функцій в ряд Фур'є по синусах в інтервалі $(0, l)$. Тому, для виконання початкових умов необхідно прийняти

$$f_n = A_n \text{ та } B_n = \frac{l}{\pi a} F_n.$$

Таким чином загальний розв'язок задачі записуємо у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi a} F_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\text{де } f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \text{ і } F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Інтерпретація розв'язків.

Використавши тригонометричні властивості, запишемо функцію $u_n(x, t)$ у вигляді

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = a_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} at + \delta_n \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\text{де } a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\arctg \frac{A_n}{B_n}.$$

Кожна точка струни здійснює гармонічне коливання з частотою

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a$$

і знаходиться в однаковій фазі $\omega_n t + \delta_n$. Амплітуда коливань залежить від x і дорівнює

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Рух струни вигляду

$$u_n(x, t) = a_n \sin(\omega_n t + \delta_n) \sin \omega_n \frac{x}{a}$$

називається **стоячою хвилею**.

Точки $x = \frac{ml}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), в яких $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, протягом всього процесу залишаються нерухомими і називаються **вузлами** стоячої хвилі.

Точки $x = \frac{2m+1}{2n}l$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n-1$), в яких $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$,

здійснюють коливання з максимальною амплітудою a_n і називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Запишемо декілька частинних розв'язків:

$$u_1(x, t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin \omega_1 \frac{x}{a}, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{l};$$

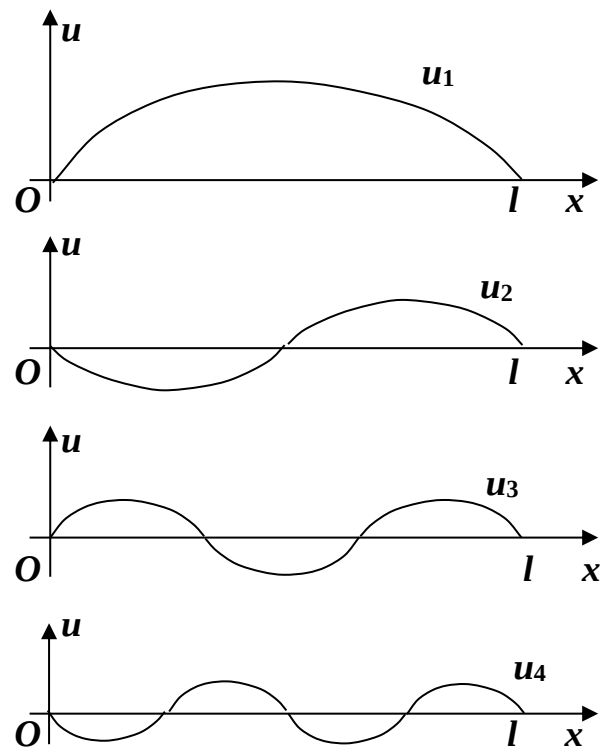
$$u_2(x, t) = a_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \sin \omega_2 \frac{x}{a}, \quad \omega_2 = 2 \frac{\pi a}{l} \text{ і т.д.}$$

В кожному з цих розв'язків всі точки струни одночасно досягають максимального відхилення (якщо $\sin(\omega_n t + \delta_n) = \pm 1$) і одночасно проходять через положення рівноваги (якщо $\sin(\omega_n t + \delta_n) = 0$). На малюнку показано профілі коливань $u_1, u_2, u_3, \dots$ – синусоїди. В коливанні u_2 струна поділяється на дві рівні частини, в коливанні u_3 – на три і т.д. Частоти $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ коливань $u_1, u_2, u_3, \dots$ є власними частотами струни. Всі частоти пропорційні числам натурального ряду, тобто $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \dots = 1 : 2 : 3 \dots$. Найменшій частоті ω_1 відповідає **основний тон**, а іншим – **обертони**.

Коливання струни сприймаються нами переважно по звуку, який виділяє струна. Кожний член ряду є стоячою хвилею. Розв'язок, тобто звук, який відтворює струна, складається із цих окремих тонів, або **гармонік**, тобто звук є наслідком накладання «**простих тонів**», які відповідають стоячим хвилям. Цей розклад звуку на прості тони є не лише математичною операцією. Виділення простих тонів можна здійснити експериментально за допомогою резонаторів.

Висота тону залежить від частоти коливання, який відповідає цьому тону. Сила тону визначається його енергією і, отже, його амплітудою. Найнижчий тон, який може відтворювати струна, визначається найменшою власною частотою. Тембр звуку залежить від присутності поряд з основним тоном обертонів і від розподілу енергії по гармонікам (n -а стояча хвиля є n -ю гармонікою).

Звуки поділяють на музикальні, або **ноти**, і немусикальні, або **шуми**; ноти породжуються періодичними, а шуми – неперіодичними коливаннями. У



відтворюваній музикальним інструментом ноті завжди є наявними декілька тонів – основний тон і обертони. переважно амплітуди гармонік швидко зменшуються із збільшенням їх номеру. Тому вирішальний внесок в ноту вносить основний тон. обертони надають звуку цей або інший тембр. Таким чином, фізично отримане рівняння, яке ми можемо переписати у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

означає, що струна відтворює музикальну ноту, частота якої $\frac{\omega_1}{2\pi}$; початкові

умові визначають сукупність амплітуд $A_1, A_2, \dots$, які характеризують спектр (тембр) цієї ноти.

Цікавим з точки зору теорії коливання струни є такий факт: якщо доторкнутися точно посередині до струни, яка звучить, то відбувається процес погашення стоячих хвиль, які мають в цій точці пучності із збереженням лише цих гармонік, які мають в цій точці вузли. Таким чином, залишаються лише парні гармоніки, і найнижчою частотою буде ω_2 . Якщо доторкнутись до струни на відстані третини її довжини, то висота тону підвищується втричі, так як зберігаються лише гармоніки з вузлами в точці $x = \frac{l}{3}$.

1.2. Рівняння вимушених коливань струни

Неоднорідне рівняння. Нехай на однорідну пружну струну із закріпленими кінцями $x = 0$ і $x = l$ діє додатково зовнішня сила $g(x, t)$, яка спрямована по осі струни. Граничні і крайові умови такі самі, як і при дослідженні вільних коливань струни. Необхідно знайти закон коливання такої струни. Математичною моделлю процесу буде неоднорідне рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t),$$

яке задовольняє однорідним граничним умовам

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, (t > 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \end{array} \right\} (0 \leq x \leq l).$$

і початковим умовам

Як і при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок будемо шукати у вигляді суми двох функцій:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

Отримуємо дві задачі для знаходження двох функцій $v(x, t)$ і $w(x, t)$.

Перша задача. Необхідно знайти розв'язок *однорідного* диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

із **неоднорідними** умовами

$$\left. \begin{aligned} v(x,0) &= f(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} &= F(x) \end{aligned} \right\}, \quad v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad (t > 0).$$

Друга задача. Необхідно знайти розв'язок **неоднорідного** диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t)$$

із **нульовими** умовами

$$\left. \begin{aligned} w(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad (t > 0).$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння. Функція $v(x,t)$ описує вільні коливання струни, зумовлені наявністю початкових відхилень $v(x,0) = f(x)$ та початкових швидкостей $\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x)$ точок струни.

Внаслідок лінійності диференціального рівняння, крайових і початкових умов, можемо використати метод відшукування закону вільних коливань. Отримаємо:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} F_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\text{де } f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \text{ і } F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Так записаний розв'язок задовольняє нульові граничні та неоднорідні крайові умови першої задачі.

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння з нульовими умовами. Функція $w(x,t)$ описує **вимушені** коливання струни, зумовлені дією зовнішніх сил $g(x,t)$, якщо немає початкових відхилень та швидкостей. Як і у випадку вільних коливань, будемо шукати функцію $w(x,t)$ у вигляді ряду

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

так що граничні умови $v(0,t) = v(l,t) = 0$ безпосередньо виконуються.

Функції $T_n(t)$ залежатимуть від початкових умов і від функції $g(x,t)$.

Внаслідок того, що

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \text{ і } \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

отримуємо після підстановки у диференціальне рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \sin \frac{n\pi}{l} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x + g(x, t).$$

Зробивши заміну $\omega_n = n \frac{\pi a}{l} = n \omega_1$, отримуємо для функції $g(x, t)$

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 T_n(t) \right) \sin \frac{\omega_n}{a} x.$$

Розглядаючи випадки, коли функція $g(x, t)$ задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є, розкладемо її в ряд в інтервалі $(0, l)$ за синусами як функцію однієї змінної x :

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Прирівнявши розклади в ряд Фур'є, отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 T_n(t) - g_n(t) \right) \sin \frac{\omega_n}{a} x = 0.$$

Таким чином маємо ряд звичайних диференціальних рівнянь

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = g_n(t) \quad (n \in \mathbf{N})$$

із початковими умовами $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$, внаслідок того, що

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \quad \text{і} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

Диференціальне рівняння розв'яжемо методом варіації довільної сталої. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$$

має вигляд: $T_n(t) = C_{n1} \cos \omega_n t + C_{n2} \sin \omega_n t$. Приймаючи $C_{n1} = z_{n1}(t)$ і $C_{n2} = z_{n2}(t)$, із системи рівнянь

$$\begin{cases} z_{n1}'(t) \cos \omega_n t + z_{n2}'(t) \sin \omega_n t &= 0, \\ -z_{n1}'(t) \sin \omega_n t + z_{n2}'(t) \cos \omega_n t &= \frac{1}{\omega_n} g_n(t) \end{cases}$$

знаходимо $z_{n1}'(t)$ і $z_{n2}'(t)$:

$$z_{n1}'(t) = -\frac{1}{\omega_n} g_n(t) \sin \omega_n t, \quad z_{n2}'(t) = \frac{1}{\omega_n} g_n(t) \cos \omega_n t.$$

Звідси, враховуючи початкові умови, отримуємо:

$$z_{n1}(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau + A_n, \quad z_{n2}(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau + B_n \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned}
T_n(t) &= A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t - \frac{\cos \omega_n t}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau + \\
&\quad + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \\
&\quad + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) (\cos \omega_n \tau \sin \omega_n t - \sin \omega_n \tau \cos \omega_n t) d\tau.
\end{aligned}$$

Таким чином

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

або

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} C_n(t),$$

де $C_n(t) = \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$.

Із початкової умови $T_n(0) = 0$ робимо висновок, що $A_n = 0$. Знайдемо B_n із початкової умови $T'_n(0) = 0$:

$$T'_n(t) = \omega_n B_n \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} C'_n(t) \text{ і } T'_n(0) = 0 = \omega_n B_n + \frac{1}{\omega_n} C'_n(0).$$

Звідси $B_n = -\frac{C'_n(0)}{\omega_n^2}$ і

$$T_n(t) = -\frac{C'_n(0)}{\omega_n^2} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} C_n(t), \text{ де } C_n(t) = \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau.$$

Остаточно, отримуємо закон вимушених коливань струни

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos n\omega_1 t + \frac{l}{\pi n a} F_n \sin n\omega_1 t + T_n(t) \right) \sin \frac{n\omega_1}{a} x,$$

де

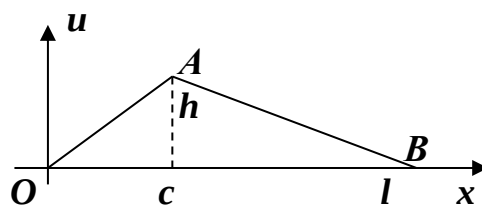
$$\frac{n\pi a}{l} = \omega_n = n\omega_1, \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\omega_1}{a} x dx, \quad F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\omega_1}{a} x dx,$$

$$T_n(t) = -\frac{C'_n(0)}{\omega_n^2} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} C_n(t), \quad C_n(t) = \int_0^t g_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau,$$

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x, t) \sin \frac{n\omega_1}{a} x dx.$$

Приклад 6.1. Визначити закон коливань струни з закріпленими кінцями $x = 0$ і $x = l$, якщо початкова швидкість точок струни дорівнює нулю, а початкове відхилення має форму трикутника з вершиною в точці (c, h) .

Розв'язування. Рівняння прямої OA з кутовим коефіцієнтом $\frac{h}{c}$ дорівнює $u = \frac{h}{c}x$.



Пряма AB проходить через точки $A(c, h)$ і $B(l, 0)$. Її рівняння $u = \frac{h}{l-c}(l-x)$.

Таким чином за умовою задачі $F(x) \equiv 0$, а $f(x)$ визначається рівняннями прями які проходять через сторони трикутника

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & \text{коли } 0 \leq x \leq c; \\ \frac{h}{l-c}(l-x), & \text{коли } c \leq x \leq l. \end{cases}$$

Розв'язок задачі визначиться формулою

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} F_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де $f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$ і $F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$.

Підстановка значень початкових функцій $f(x)$ і $F(x)$ дає: $F_n = 0$,

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} \left(\frac{h}{c} \int_0^c x \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \frac{h}{l-c} \int_c^l (l-x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right).$$

Знаходимо записані інтеграли:

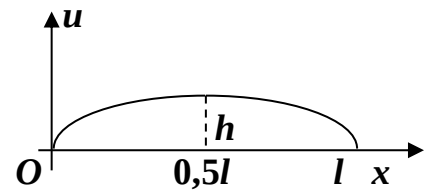
$$\begin{aligned} \int_0^c x \sin \frac{\pi n}{l} x dx &= \left[\frac{x=u}{dv = \sin \frac{\pi n}{l} x dx} \left| \frac{dx=du}{v = \int \sin \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x} \right. \right] = \\ &= -\frac{l}{\pi n} \left(x \cos \frac{\pi n}{l} x \right) \Big|_0^c + \frac{l}{\pi n} \int_0^c \cos \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{lc}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{l} + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{\pi n c}{l}, \\ \int_0^c (l-x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx &= \frac{lc}{\pi n} (l-c) \cos \frac{\pi n c}{l} + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{\pi n c}{l}. \end{aligned}$$

Тоді $f_n = \frac{2hl^2}{n^2 \pi^2 c(l-c)} \sin \frac{\pi n c}{l}$. Підставляючи значення f_n і F_n у формулу для визначення зміщення точок струни, отримаємо закон коливання струни $u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \cos \frac{\pi n}{l} at$.

Знайдена формула визначає профіль струни, який виникає внаслідок суперпозиції стоячих хвиль, в довільний момент часу.

Приклад 6.2. Знайти закон коливань струни $(0,l)$ під дією гармонічної зовнішньої сили $G(x,t) = \varphi(x) \sin \omega t$, якщо частота змушувальної сили не збігається ні з однією із власних частот коливання струни і наявними є нульові початкові умови

$$u(x,0) = 0 \text{ і } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$



Розв'язування. Розкладемо функцію $G(x,t)$

в ряд Фур'є, враховуючи, що $\omega \neq \frac{\pi a}{l} = \omega_1$ ($\omega_n = n \omega_1$):

$$G(x,t) = \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n \omega_1}{a} x, \text{ де } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n \omega_1}{a} x dx.$$

Так як $g_n(t) = a_n \sin \omega t$, то звичайні диференціальні рівняння матимуть вигляд

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = a_n \sin \omega t \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Загальний розв'язок рівняння, враховуючи початкові умови запишемо у вигляді:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{a_n}{\omega_n} C_n(t), \text{ де } C_n(t) = \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau.$$

Із початкової умови $T_n(0) = 0$ визначаємо A_n :

$$T_n(0) = A_n \cos \omega_n 0 + B_n \sin \omega_n 0 + \frac{a_n}{\omega_n} \int_0^0 \sin \omega \tau \sin \omega_n (0 - \tau) d\tau = 0, \quad A_n = 0.$$

Враховуючи це, що

$$\sin \omega \tau \sin \omega_n (t - \tau) = \frac{1}{2} (\cos((\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t) - \cos((\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t)),$$

$$\int_0^t \cos((\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t) d\tau = \frac{1}{\omega + \omega_n} \sin((\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t) \Big|_0^t = \frac{\sin \omega t + \sin \omega_n t}{\omega + \omega_n},$$

$$\int_0^t \cos((\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t) d\tau = \frac{1}{\omega - \omega_n} \sin((\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t) \Big|_0^t = \frac{\sin \omega t - \sin \omega_n t}{\omega - \omega_n},$$

отримаємо

$$C_n(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2\omega_n \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2} + \frac{2\omega \sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} \right) = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \text{ і}$$

$$T_n(t) = B_n \sin \omega_n t + \frac{a_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right).$$

Так як $T'_n(t) = B_n \omega_n \cos \omega_n t + \frac{a_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$, то з початкової умови $T'_n(0) = 0$ маємо:

$$T'_n(0) = B_n \omega_n \cos 0 + \frac{a_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos 0 - \cos 0) = 0, \text{ тобто } B_n = 0.$$

Остаточно маємо шуканий закон коливань струни $(0, l)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\omega_1}{a} x.$$

І.3. Рівняння поперечних коливань мембрани

Диференціальне рівняння коливань мембрани. До цього часу ми розглядали одновимірні хвильові рівняння. Задачі для хвильового рівняння у двовимірному і тривимірному випадках значно важчі для розв'язання. Розглянемо двовимірне хвильове рівняння, а саме, розглянемо задачу знаходження рівнянь для поперечних коливань мембрани. При цьому будемо на площині розглядати найпростіші випадки, коли основною областю, для якої розв'язується задача, є прямокутник або круг.

Під **мембраною** розуміється надзвичайно тонка плівка, яка працює лише на розтяг, але не на згин. Мембрана вважається абсолютно гнучкою, пружною і однорідною, а коливання, які вона може здійснювати – малими. Якщо мембрану натягнути на деякий замкнутий контур S площею S , то дію відкинутої частини можна замінити силами T_0 , які розміщені вздовж контура за напрямком нормалей до контура (мембрана знаходиться під дією рівномірного натягу). Площа мембрани вважається незмінною, тобто такою як і в стані спокою. В стані спокою мембрана повністю знаходиться в площині Oxy .

Якщо мембрану вивести з стану спокою (натиснути і відпустити, вдарити по ній або прикласти зовнішню силу), то вона почне коливатися. Прикладом є коливання мембрани барабана (музичного інструмента) або мембрани мікрофона чи телефону.

Якщо ми обмежуємось лише цим випадком, коли рух відбувається в перпендикулярному до площини Oxy напрямку, то зміщення u точки (x, y) мембрани буде функцією від x, y, t : $u = u(x, y, t)$.

Закон коливання мембрани визначається із диференціального рівняння, яке аналогічне до диференціального рівняння струни.

Не зупиняючись на виведенні рівняння будемо вважати, що функція u є розв'язком диференціального рівняння, яке має вигляд:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G(x, y, t),$$

де $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, ρ – поверхнева густина мембрани, $\rho a^2 G(x, y, t)$ – зовнішня сила або навантаження.

Якщо $G(x, y, t) \neq 0$, то мембрана буде здійснювати вимушені коливання. Якщо ж $G(x, y, t) = 0$, то диференціальне рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

і визначає закон вільного коливання мембрани.

Початкові і крайові умови. Крім записаного диференціального рівняння необхідно для визначення функції $u = u(x, y, t)$ необхідно означити початкові і крайові умови. Для мембрани ці умови аналогічні відповідним умовам для струни. У загальному випадку в початковий момент часу точки мембрани мають певні відхилення від положення рівноваги і певні швидкості:

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y).$$

Тут $f(x, y)$ і $F(x, y)$ – дві задані в області визначення D функції. Якщо край мембрани закріплено, то

$$u(x, y, t)|_c = 0,$$

тобто значення функції $u(x, y, t)$ в точках контура c дорівнює нулю в довільний момент часу. Можливими є і інші крайові умови.

Порівняно з задачею про коливання струни задача про коливання мембрани складніша. Це пов'язано із геометрією контура c . Однією з найпростіших є задача про коливання прямокутної мембрани.

1.3.1. Закон коливання прямокутної мембрани

Постановка задачі. Розглянемо вільні коливання прямокутної мембрани. Нехай контур мембрани, обмежений відрізками $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$. Задача про малі вільні коливання мембрани зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

з початковими умовами

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y)$$

і крайовими умовами на сторонах прямокутника

$$u(0, y, t) = 0, u(l, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, u(x, m, t) = 0.$$

Використаємо для розв'язання знову метод стоячих хвиль (метод Фур'є). Для цього знаходимо перш за все часткові розв'язки рівняння.

Власні функції. Розв'язок рівняння, який задовольняє крайові умови, шукаємо у вигляді добутку трьох функцій $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$, кожна з яких залежить лише від одного аргументу:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Перша крайова умова $u(0, y, t) = 0$ дає $X(0)Y(y)T(t) = 0$. Оскільки шукані розв'язки не повинні бути тривіальними, робимо висновок, що $X(0) = 0$. Аналогічно з інших трьох умов, робимо висновок:

$$X(l) = 0, Y(0) = 0, Y(m) = 0.$$

Частинні похідні другого порядку так записаного рівняння запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''YT, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XYT''.$$

Підставимо ці значення у диференціальне рівняння і поділимо на добуток $X(x)Y(y)T(t)$; дістанемо

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Ліва частина отриманої рівності не залежить від координат x та y , а права – від часу t . Тому рівність справджується лише при умові, коли ні ліва, ні права частини не залежать від змінних і кожна з них дорівнює постійній:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{const}.$$

Розглянувши окремо праву частину подвійної рівності, можемо записати

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \text{const}; \quad \frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{і} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \text{const} \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu,$$

де λ і μ – постійні, для яких можемо записати $\lambda + \text{const} = -(\lambda + \mu)$.

Отже, для функцій $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$ маємо такі рівняння та умови

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0;$$

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0;$$

$$T'' + a^2(\lambda + \mu)T = 0.$$

Для перших двох рівнянь розв'язки такі самі, як і при розгляді коливань струни. Отримаємо:

Власне число	Власна функція	Власне число	Власна функція
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$	$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$	$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2$	$Y_k = \sin \frac{k\pi}{m} y$
$n, k = 1, 2, 3, \dots$			

Третє рівняння для кожної пари чисел n і k перепишемо у вигляді

$$T'' + \pi^2 a^2 \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2} \right) T = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння буде функція

$$T_{n,k} = a_{n,k} \cos \omega_{n,k} t + b_{n,k} \sin \omega_{n,k} t,$$

де

$$\omega_{n,k} = a\pi \sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}}$$

є власними частотами коливань мембрани. Два індекси у розв'язках вказують на це, що індекси n і k можуть набирати різних цілих значень незалежно один від одного.

Добуток знайдених трьох функцій визначає часткові розв'язки задачі:

$$u_{n,k} = (a_{n,k} \cos \omega_{n,k} t + b_{n,k} \sin \omega_{n,k} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y.$$

Стоячі хвилі прямокутної мембрани. Якщо переписати рівняння для часткових розв'язків задачі у вигляді

$$u_{n,k} = A_{n,k} \sin(\omega_{n,k} t + \delta_{n,k}) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y,$$

то видно, що точки мембрани гармонічно коливаються за записаним законом з амплітудою $A_{n,k} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y$ і частотою $\omega_{n,k}$. При заданих значеннях n та k всі точки мембрани коливаються в одній фазі, яка дорівнює $\omega_{n,k} t + \delta_{n,k}$. Це означає, що ми отримуємо стоячі хвилі.

Нерухомі точки мембрани утворюють вузлові лінії, які визначаються із рівняння $u_{n,k} = 0$, тобто $\sin \frac{n\pi}{l} x = 0$ і $\sin \frac{k\pi}{m} y = 0$. Отримаємо n паралельних до сторін $x = 0$ і $x = l$ вузлових ліній

$$x = 0, x = \frac{l}{n}, x = 2\frac{l}{n}, x = 3\frac{l}{n}, \dots, x = n\frac{l}{n} = l,$$

і k паралельних до сторін $y = 0$ і $y = m$ вузлових ліній

$$y = 0, y = \frac{m}{k}, y = 2\frac{m}{k}, y = 3\frac{m}{k}, \dots, y = k\frac{m}{k} = m.$$

В коливальному процесі $u_{n,k}$ мембрана ділиться на n вертикальних і k горизонтальних смуг, тобто на nk однакових прямокутників із нерухомими сторонами.

Коливний процес мембрани відрізняється від випадку струни тим, що для останньої кожній частоті власних коливань відповідає своя форма струни (стояча хвиля), яка просто відділяється вузлами на декілька рівних частин. Для мембрани

може виявитись, що одній і тій же частоті відповідає декілька фігур мембрани з однаковим розміщенням вузлових ліній.

В коливанні $u_{n,k}$ частоті $\omega_{n,k}$ можуть відповідати декілька наборів чисел n та k , наприклад, (n_1, k_1) та (n_2, k_2) . У цьому випадку суперпозиція коливань $u_{n_1,k_1} + u_{n_2,k_2}$ також буде давати стоячу хвилю. Отже, якщо у випадку струни кожній власній частоті відповідає одна стояча хвиля, то у випадку мембрани одній і тій же власній частоті коливань може відповідати кілька різних стоячих хвиль. **Кожному власному числу може відповідати кілька власних функцій.**

Цікаво розглянути квадратну мембрану $l = m = r$. В цьому випадку частота

$$\omega_{n,k} = \frac{a\pi}{r} \sqrt{n^2 + k^2} = \alpha \sqrt{n^2 + k^2},$$

де $\alpha = \frac{a\pi}{r}$ є множник, який не залежить від n та k . Приймавши $n = k = 1$,

отримаємо основний тон $u_{1,1}$ мембрани з частотою $\omega_{1,1} = \alpha\sqrt{2}$:

$$u_{1,1} = A_{1,1} \sin(\omega_{1,1}t + \delta_{1,1}) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}.$$

Вузлових ліній всередині мембрани при цьому нема зовсім. Приймавши $n = 1, k = 2$ або $n = 2, k = 1$, маємо два інших тони однакової частоти $\omega_{1,2} = \omega_{2,1} = \alpha\sqrt{5}$, а саме

$$u_{1,2} = A_{1,2} \sin(\omega_{1,2}t + \delta_{1,2}) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r}, \quad u_{2,1} = A_{2,1} \sin(\omega_{2,1}t + \delta_{2,1}) \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}.$$

Крім коливань $u_{1,2}$ і $u_{2,1}$ будуть існувати ще нескінченна кількість інших коливань цієї ж частоти $\omega_{1,2} = \alpha\sqrt{5}$, які утворюються лінійною комбінацією $u_{1,2}$ і $u_{2,1}$. Приймавши для простоти $\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = 0$, отримаємо такі коливання:

$$\left(A_{1,2} \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r} + A_{2,1} \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r} \right) \sin \omega t,$$

де $\omega = \omega_{1,2} = \omega_{2,1}$.

Загальний розв'язок задачі про коливання прямокутної мембрани.

Запишемо розв'язок, який складається із суми частинних розв'язків (це можна зробити, оскільки диференціальне рівняння лінійне і однорідне)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n,k} \cos \omega_{n,k}t + b_{n,k} \sin \omega_{n,k}t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y.$$

Функція u буде задовольняти диференціальне рівняння і крайові умови, оскільки всі $u_{n,k}$ їх задовольняють. Будемо вважати, що утворений ряд збіжний і двічі диференційований.

Визначимо постійні $a_{n,k}$ і $b_{n,k}$ із початкових умов задачі. Приймавши $t = 0$ у формулах

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n,k} \cos \omega_{n,k} t + b_{n,k} \sin \omega_{n,k} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n,k} (b_{n,k} \cos \omega_{n,k} t - a_{n,k} \sin \omega_{n,k} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y,$$

отримаємо з початкових умов задачі

$$u|_{t=0} = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n,k} b_{n,k} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y.$$

Формули можна розглядати як розклад функцій двох змінних $f(x, y)$ і $F(x, y)$ в **подвійні ряди Фур'є**. Відшукування коефіцієнтів розкладу аналогічний до відповідного методу для рядів однієї змінної. Метод ґрунтується на використанні властивості **ортогональності системи функцій** $\sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{m} y$, за якими здійснюється їх розклад в ряд.

Нагадаємо коротко поняття ортогональності сукупностей функцій на визначених інтервалах.

Визначені в інтервалі $[a, b]$ функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ є ортогональними між собою, якщо інтеграл від добутку цих функцій дорівнює нулю:

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Сукупності функцій $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$ та $\left\{ \sin \frac{k\pi}{m} y \right\}$ будуть ортогональними в інтервалі $[0, l]$, оскільки

$$\int_0^l \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{q\pi}{l} x dx = 0 \text{ і } \int_0^l \sin \frac{p\pi}{m} y \sin \frac{q\pi}{m} y dy = 0$$

для будь-яких цілих чисел p і q , якщо $p \neq q$.

Поняття ортогональності поширюється і на функції двох змінних.

Сукупність функцій $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{m} y \right\}$ ортогональна в області $x \in [0, l]$, $y \in [0, m]$, якщо подвійний інтеграл по цій області від добутку двох різних функцій даної системи дорівнює нулю. Справді,

$$\int_0^l \int_0^m \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y \sin \frac{q\pi}{l} x \sin \frac{s\pi}{m} y dx dy =$$

$$= \left(\int_0^l \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{q\pi}{l} x dx \right) \left(\int_0^m \sin \frac{r\pi}{m} y \sin \frac{s\pi}{m} y dy \right) = 0,$$

якщо p, q, r, s – цілі числа і виконується хоча б одна з двох нерівностей:
 $p \neq q$ або $r \neq s$. Якщо ж $p = q$ або $r = s$, то відповідний інтеграл буде

$$\int_0^l \int_0^m \sin^2 \frac{p\pi}{l} x \cdot \sin^2 \frac{r\pi}{m} y dx dy = \left(\int_0^l \sin^2 \frac{p\pi}{l} x dx \right) \cdot \left(\int_0^m \sin^2 \frac{r\pi}{m} y dy \right) = \frac{lm}{4}.$$

Обчислимо тепер всі коефіцієнти подвійного ряду Фур'є. для цього помножимо ліву і праву частини розкладів функцій $f(x, y)$ і $F(x, y)$ на добуток функцій $\sin \frac{p\pi}{l} x \cdot \sin \frac{r\pi}{m} y$, де p і r – фіксовані цілі числа, і про інтегруємо по площі прямокутника. Тоді всі члени про інтегрованого виразу перетворюються в нуль при $n \neq p$ і $k \neq r$. У цих випадках, коли $n = p$ і $k = r$, отримаємо

$$a_{n,k} \int_0^l \int_0^m \sin^2 \frac{p\pi}{l} x \cdot \sin^2 \frac{r\pi}{m} y dx dy = \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y dx dy,$$

$$a_{n,k} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y dx dy.$$

Аналогічно, для коефіцієнтів $b_{n,k}$, отримаємо

$$b_{n,k} = \frac{4}{lm\omega_{n,k}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y dx dy.$$

Таким чином задача про відшукування закону коливань прямокутної мембрани зводиться до подвійного ряду

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n,k} \cos \omega_{n,k} t + b_{n,k} \sin \omega_{n,k} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{m} y$$

з коефіцієнтами $a_{n,k}$ і $b_{n,k}$, що визначаються подвійними інтегралами:

$$a_{n,k} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y dx dy,$$

$$b_{n,k} = \frac{4}{lm\omega_{n,k}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{p\pi}{l} x \sin \frac{r\pi}{m} y dx dy.$$

Вимушені коливання мембрани досліджуються так само, як і вимушені коливання струни, з цією лише різницею, що зовнішня сила $G(x, y, t) \neq 0$ розкладається не в простий, а в подвійний ряд Фур'є.

Приклад 6.3. Розглянути частоти і найпростіші стоячі хвилі коливань мембрани, яка має форму квадрата з стороною π ($l = m = \pi$), якщо початкові швидкості точок дорівнюють нулю: $F(x, y) = 0$.

Розв'язування. Із умови $F(x, y) = 0$ випливає, що $b_{n,k} = 0$ і частинні розв'язки мають вигляд

$$u_{n,k}(x, y, t) = a_{n,k} \cos \omega_{n,k} t \sin nx \sin ky.$$

Проведемо дослідження утвореної формули.

1). При $n = k = 1$ частота власних коливань мембрани є найменшою і дорівнює $\omega_{1,1} = \alpha\sqrt{2}$. Цій частоті відповідає єдина стояча хвиля $u_{1,1} = a_{1,1} \cos \alpha\sqrt{2}t \sin x \sin y$.

2). При $n = 2, k = 1$ або $n = 1, k = 2$ частота одна і та сама:

$$\omega_{1,2} = \omega_{2,1} = \alpha\sqrt{5}.$$

Цій частоті відповідають дві стоячі хвилі:

$$u_{2,1} = a_{2,1} \cos \alpha\sqrt{5}t + \delta_{2,1}) \sin 2x \sin y, \quad u_{1,2} = a_{1,2} \cos \alpha\sqrt{5}t \sin x \sin 2y.$$

В першій з цих двох стоячих хвиль мембрана ділиться на дві рівні вертикальні фази, а в другій – на дві горизонтальні.

У цьому ж випадку мембрана може здійснювати також коливання з частотою $\omega = \alpha\sqrt{5}$ і в нескінченній кількості випадків, які визначаються суперпозицією коливань $u_{1,2}$ і $u_{2,1}$:

$$U_{1,2} = u_{1,2} + u_{2,1} = 2 \cos \alpha\sqrt{5}t \sin x \sin y (a_{2,1} \cos x + a_{1,2} \cos y).$$

Рівняння вузлових ліній такого коливання:

$$a_{2,1} \cos x + a_{1,2} \cos y = 0.$$

Розглянемо часткові випадки розміщення вузлових ліній:

1. $a_{2,1} = -a_{1,2}$. Отримуємо, $\cos x = \cos y$ і, отже, $y = x$. В цьому випадку вузловою лінією є діагональ квадрата.

2. $a_{2,1} = a_{1,2}$. Отримуємо, $\cos x = -\cos y$, $\cos(\pi - x) = \cos y$ і, отже, $y = \pi - x$. В цьому випадку вузловою лінією є друга діагональ квадрата.

При розгляді різних більш високих частот можуть статися різноманітні випадки. Для деяких частот стояча хвиля тільки одна, для інших їх буде дві або три і більше.

I.3.2. Закон коливань круглої мембрани. Рівняння та функції Бесселя.

До цього часу при розгляді задач математичної фізики ми використовували клас відомих функцій. В той же час математичне моделювання реальних фізичних процесів приводить до необхідності використання, для успішного знаходження розв'язків, спеціальних функцій, таких як функції Бесселя, Неймана, Ханкеля і т.д. Тому, перш ніж приступити до знаходження закону коливань круглої мембрани введемо поняття функції Бесселя n -го порядку

Рівняння Бесселя. Лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами (в звичайних похідних) інтегруються в елементарних функціях. Якщо ж коефіцієнти не є сталими, то навіть і лінійні рівняння лише в окремих випадках можна проінтегрувати в елементарних функціях. Тому кожний новий тип диференціальних рівнянь визначає по суті новий клас функцій.

Математичне моделювання процесів теоретичної фізики, астрономії, прикладних наук (теорії пружності, гідродинаміки і т.д.) приводить до диференціального рівняння

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

яке називають **диференціальним рівнянням Бесселя**. Його розв'язки називають **бесселівськими функціями** (циліндричними функціями).

Рівняння Бесселя є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, коефіцієнти якого є певними функціями. Параметр n , який входить у рівняння Бесселя, може мати довільне значення. Тут буде досліджено випадок, який нам пригодиться в подальшому, коли n – ціле додатне число, $n \geq 0$. Розв'язок рівняння Бесселя при заданому значенні n називається **бесселівською функцією n -го порядку**. Диференціальне рівняння другого порядку має лінійно незалежні розв'язки, тобто такі, відношення яких не дорівнює сталій.

Розв'язок диференціального рівняння будемо шукати у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}.$$

Перша і друга похідні цього ряду запишуться так:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p) x^{k+p-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2}.$$

Підставимо знайдені степеневі ряди у диференціальне рівняння:

$$y''(x) \cdot 1 + y'(x) \cdot \frac{1}{x} + y(x) \cdot \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0.$$

Отримаємо,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p-2} ((k+p)(k+p-1) + (k+p) - n^2) = 0$$

Скоротивши обидва ряди на x^{p-2} , запишемо їх у вигляді, який зручний для порівняння коефіцієнтів при однакових степенях

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ((k+p)^2 - n^2)$$

Ряд з лівого боку починається з x^2 , а ряд з правого боку – з x в нульовому степені. Тому, коефіцієнти при x^0 і x^1 дорівнюють нулю:

$$a_0 (p^2 - n^2) = 0, \quad a_1 ((1+p)^2 - n^2) = 0.$$

Із рівностей отримуємо: $p = \pm n$ і $a_1 = 0$. Приймаємо $p = n$.

Для більш високих степенів x виконується рекурентна рівність:

$$a_{k-2} = -a_k ((k+n)^2 - n^2), \text{ де } k = 2, 3, \dots$$

Записавши рекурентну формулу у вигляді

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n)},$$

робимо висновок:

- Всі непарні коефіцієнти визначаються через $a_1 = 0$ і, також дорівнюють нулю:
 $a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$, де $k = 2, 3, \dots$.
- Всі парні коефіцієнти визначаються через a_0 за допомогою співвідношення:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+n)(2+n)\dots(k+n)},$$

тобто

$$a_2 = \frac{(-1)^1 a_0}{2^2 1!(1+n)} = -\frac{a_0}{2^2 (1+n)}, a_4 = \frac{a_0}{2^{2 \cdot 2} 2!(1+n)(2+n)}, \dots$$

Підставивши обчислені коефіцієнти в ряд для $y(x)$, матимемо частинний розв'язок рівняння Бесселя

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k} k!(1+n)(2+n)\dots(k+n)}.$$

Першим частинним розв'язком рівняння Бесселя є **функція Бесселя першого роду, порядок якої n** . Її позначають $I_n(x)$ і скорочено записують у вигляді:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

За ознакою Д'Аламбера легко можна довести, що цей ряд є збіжним при будь-якому x .

При $n = 0$ отримуємо

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (k+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

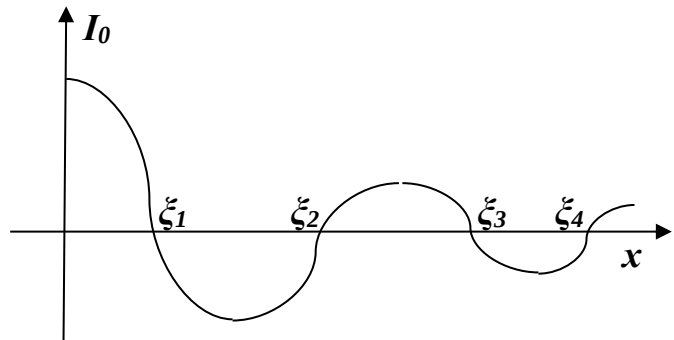
При $x \gg 1$ функцію Бесселя можна замінити її асимптотичною формулою:

$$I_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

з якої видно, що для великих x крива $I_n(x)$ наближено описує затухаючу косинусоїду. Зміна n приводить до зміщення графіків функцій вздовж осі абсцис. Функція $I_n(x)$ має нескінченну

кількість коренів $\xi_k^{(n)}$ (де $k = 1, 2, \dots$), для яких $I_n(\xi_k^{(n)}) = 0$.

Диференціальне рівняння Бесселя має два лінійно незалежних розв'язки, і першим з них є $I_n(x)$.



Другий розв'язок рівняння Бесселя при цілому додатному n , лінійно незалежний від $I_n(x)$, позначають через $N_n(x)$ і називають **функцією Бесселя другого роду** (або **функцією Неймана**) n -го порядку. Для великих значень x асимптотичним наближенням для $N_n(x)$ буде функція

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Найбільш важливою властивістю функції $N_n(x)$ є це, що при спрямуванні x до нуля функції Неймана будь-якого порядку прямують до нескінченності.

При $n = 0$ функція Бесселя другого роду при наближенні x до

нуля перетворюється в нескінченність як $\ln x$, а при $n = 1, 2, \dots$ – як x^{-n} .

Загальний розв'язок рівняння Бесселя визначається лінійною комбінацією знайдених функцій:

$$y(x) = AI_n(x) + BN_n(x),$$

де $I_n(x)$ та $N_n(x)$ – функції Бесселя першого та другого роду n -го порядку; A та B – довільні сталі.

Рекурентні формули для функцій Бесселя. Встановимо наступні співвідношення, які існують між функціями Бесселя першого роду різних порядків. Нехай $n = 1, 2, \dots$ – ціле додатне число. Помножимо ряд, який визначає $I_n(x)$ на x^n і про диференціюємо по x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n I_n(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n}{k!(k+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k) x^{2n+2k-1}}{2^{n+2k-1} k!(k+n)!} = \\ &= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n}{k!(n-1+k)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k} = x^n I_{n-1}(x), \end{aligned}$$

тобто

$$\frac{d}{dx}(x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Аналогічно, якщо помножити на x^{-n} , отримаємо

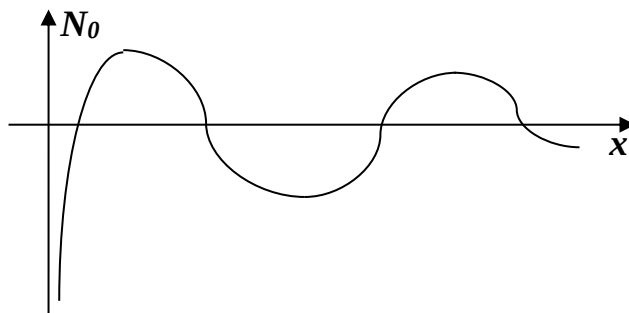
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{I_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{I_{n+1}(x)}{x^n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Розглянемо два часткові випадки використання співвідношень:

1. При $n = 0$ із другого співвідношення будемо мати

$$I_0'(x) = -I_1(x);$$

2. При $n = 1$ із першого співвідношення будемо мати



$$(xI_1(x))' = xI_0(x) \text{ або } xI_1(x) = \int_0^x uI_0(u)du.$$

Проведемо диференціювання отриманих співвідношень з наступним діленням першого з них на x^n , а другого – на x^{-n} :

$$(x^n I_n(x))' = nx^{n-1} I_n(x) + x^n I_n'(x) = x^n I_{n-1}(x),$$

$$\left(\frac{I_n(x)}{x^n} \right)' = \frac{x^n I_n'(x) - nx^{n-1} I_n(x)}{x^{2n}} = -\frac{I_{n+1}(x)}{x^n}$$

або після відповідного ділення

$$\left. \begin{aligned} I_n'(x) + \frac{n}{x} I_n(x) &= I_{n-1}(x), \\ I_n'(x) - \frac{n}{x} I_n(x) &= -I_{n+1}(x) \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots).$$

Віднімаючи та додаючи ці рівності, знайдемо співвідношення

$$\left. \begin{aligned} I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) &= 2I_n'(x), \\ I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} I_n(x) \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots).$$

Друга з цих формул дає можливість виразити функції Бесселя будь-якого порядку через дві з них: $I_0(x)$ і $I_1(x)$. Справді, з того, що

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) - I_{n-1}(x),$$

отримуємо, наприклад, для $I_2(x)$ і $I_3(x)$ відповідні співвідношення:

$$I_2(x) = \frac{2 \cdot 1}{x} I_1(x) - I_0(x) = \frac{2}{x} I_1(x) - I_0(x);$$

$$I_3(x) = \frac{4}{x} I_2(x) - I_1(x) = \frac{4}{x} \left(\frac{2}{x} I_1(x) - I_0(x) \right) - I_1(x) = \frac{8 - x^2}{x^2} I_1(x) - \frac{4}{x} I_0(x).$$

І.3.3. Вільні коливання круглої мембрани

Постановка задачі. Випадок круглої мембрани дає нам приклад розкладу даної функції на функції Бесселя. Цей приклад важливий і тому, що такі розклади зустрічаються в інших надзвичайно важливих задачах математичної фізики.

Отже, дослідимо вільні (власні) коливання круглої мембрани, контуром якої є коло радіусом q з центром у початку координат. Будемо вважати, що на контурі мембрана не зміщується.

Задача про малі вільні коливання мембрани зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

з початковими умовами

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y)$$

і крайовими умовами

$$u(x, y, t)|_c = 0,$$

тобто значення функції $u(x, y, t)$ в точках контура (кола) c дорівнює нулю в довільний момент часу.

Оператор Лапласа функції двох змінних має вигляд

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Метод стоячих хвиль. Використаємо для розв'язання знову метод стоячих хвиль (метод Фур'є). Частинні розв'язки задачі будемо шукати у вигляді добутку двох функцій: $u(x, y, t) = T(t) \cdot U(x, y)$. Тоді отримаємо

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda^2.$$

Таким чином задача розбивається на розв'язання двох диференціальних рівнянь

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, T(t) \neq 0,$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0, U(x, y) \neq 0.$$

В другому диференціальному рівнянні перейдемо до полярної системи координат за допомогою формул переходу

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

В полярній системі координат диференціальне рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + a^2 \lambda^2 U = 0$$

Функція $U(\rho, \varphi)$ залежить тепер від двох полярних координат ρ, φ ; продовжуючи далі метод розподілу змінних, беремо

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$$

і подамо записане диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{\Phi}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{R}{\rho^2} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda^2 R \Phi = 0$$

або

$$\frac{R}{\rho^2} \Phi'' + \frac{\Phi}{\rho} (\rho R')' + \lambda^2 R \Phi = 0.$$

Після множення рівняння на множник $\frac{\rho^2}{R\Phi}$, отримаємо

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\left(\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} + \lambda^2 \rho^2\right) = -\mu^2,$$

де μ^2 – нова стала.

Таким чином маємо такі рівняння для шуканих T , R , Φ :

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$\Phi''(t) + \mu^2 \Phi = 0,$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2}\right) R = 0.$$

Частинні розв'язки вільних коливань круглої мембрани. Із записаних вище рівнянь робимо висновок, що частинні розв'язки диференціального рівняння будемо шукати у вигляді

$$u(\rho, \varphi, t) = T(t)\Phi(\varphi)R(\rho)$$

Запишемо спочатку в загальному вигляді розв'язки відповідних рівнянь:

- Перше рівняння при інтегруванні дає розв'язки

$$T(t) = A_1 \cos a\lambda t + A_2 \sin a\lambda t.$$

- Друге рівняння при інтегруванні дає розв'язки

$$\Phi(\varphi) = B_1 \cos \mu\varphi + B_2 \sin \mu\varphi.$$

Таким чином, внаслідок того, що функція $u(\rho, \varphi, t)$ періодична з періодом 2π по змінній φ , маємо: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Ця умова визначає μ цілим числом, тобто $\mu = n$ ($n = 1, 2, \dots$). Отже, інтеграл запишеться у вигляді

$$\Phi_n(\varphi) = B_{1n} \cos n\varphi + B_{2n} \sin n\varphi,$$

де B_{1n} , B_{2n} – сталі інтегрування.

- Для функції $R(\rho)$ рівняння матиме вигляд

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0.$$

Це диференціальне рівняння Бесселя. Його загальний розв'язок

$$R(\rho) = C_1 I_n(\lambda\rho) + C_2 N_n(\lambda\rho).$$

Оскільки розв'язок повинен біти скінченним, необхідно прийняти $C_2 = 0$ (функція Неймана при спрямуванні ρ до нуля прямує у нескінченність). Приймавши крім цього $C_1 = 1$, отримаємо:

$$R(\rho) = I_n(\lambda\rho).$$

Таким чином, можемо записати

$$u(\rho, \varphi, t) = (A_1 \cos a\lambda t + A_2 \sin a\lambda t)(B_{1n} \cos \mu\varphi + B_{2n} \sin \mu\varphi)I_n(\lambda\rho).$$

Знайдемо тепер невідомі коефіцієнти, які входять у рівняння. Гранична умова в полярній системі координат

$$u(q, \varphi, t) = 0 \text{ або } R(q) = I_n(\lambda q) = 0$$

вказує, що мембрана закріплена по колу $\rho = q$. Позначимо $\tau = \lambda q$. З трансцендентного рівняння $I_n(\tau) = 0$ отримуємо безліч дійсних коренів $\tau_{n1} = \lambda_{n1}q, \tau_{n2} = \lambda_{n2}q, \dots, \tau_{nm} = \lambda_{nm}q, \dots$. Таким чином задача

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0; R(q) = 0; R(q) < \infty$$

має безліч власних чисел $\lambda_{nm} = q^{-1}\tau_{nm}$ ($m = 1, 2, \dots$), яким відповідають власні функції

$$R_m(\rho) = I_n(\lambda_{nm}\rho).$$

Перші дев'ять коренів перших шести функцій Бесселя подані в таблиці

m	τ_{1m}	τ_{2m}	τ_{3m}	τ_{4m}	τ_{5m}	τ_{6m}
1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,076	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813
9	27,494	29,047	30,571	32,050	33,512	34,983

Наступні корені можуть бути обчислені наближеною формулою:

$$\tau_{nm} = \frac{1}{4} \pi(2n-1+4m) - \frac{4n^2-1}{\pi(2n-1+4m)},$$

яка при заданому n буде більш точною при збільшенні m .

З того, що власні числа λ_{nm} входять у розв'язок $T(t)$, отримуємо

$$T_{nm}(t) = A_{1nm} \cos a\lambda_{nm}t + A_{2nm} \sin a\lambda_{nm}t.$$

Отримані нами часткові розв'язки можна записати у вигляді

$$u_{nm} = (A_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + B_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \cos n\varphi + \\ + (C_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + D_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \sin n\varphi \quad (n, m \in \mathbf{N}),$$

де $A_{nm} = A_{1nm} B_{1n}$, $B_{nm} = A_{2nm} B_{1n}$, $C_{nm} = A_{1nm} B_{2n}$, $D_{nm} = A_{2nm} B_{2n}$.

Формула для u_{nm} визначає частинні розв'язки диференціального рівняння, які задовольняють крайову умову.

Фізичний зміст частинних розв'язків такий самий, що і у випадку струни та прямокутної мембрани: вони визначають стоячі хвилі. Для дослідження характеру цих хвиль необхідно переписати u_{nm} у вигляді, який відображає гармонічне коливання мембрани. Не проводячи тут дослідження, зазначимо лише, що вузловими лініями мембрани є n діаметрів кола; мембрана поділяється цими діаметрами на $2n$ однакових секторів, які коливаються з частотою $\omega_{nm} = a\lambda_{nm}$. Є також і вузлові лінії у вигляді концентричних кіл, які

визначаються множником $I_n(\lambda_{nm}\rho)$. Між вузловими колами містяться кола гребенів, які відповідають тим значенням ρ , для яких $I_n(\lambda_{nm}\rho)$ досягає максимуму.

Загальний розв'язок вільних коливань круглої мембрани. Загальний розв'язок задачі про коливання круглої мембрани знаходиться методом суперпозиції стоячих хвиль із врахуванням початкових умов задачі

$$u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi); \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(\rho, \varphi).$$

З цією метою будемо шукати u у вигляді подвійного ряду

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + B_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + D_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \sin n\varphi.$$

Обчислимо похідну по часу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\lambda_{nm} (B_{nm} \cos a\lambda_{nm}t - A_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\lambda_{nm} (D_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + C_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \sin n\varphi$$

і знайдемо розклади функцій $f(\rho, \varphi)$, $F(\rho, \varphi)$ при $t = 0$:

$$f(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos n\varphi + C_{nm} \sin n\varphi) I_n(\lambda_{nm}\rho),$$

$$F(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\lambda_{nm} (B_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi) I_n(\lambda_{nm}\rho).$$

Розкладаючи $f(\rho, \varphi)$, як періодичну функцію від ρ і φ , у звичайний ряд Фур'є, матимемо

$$f(\rho, \varphi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\varphi + \psi_n \sin n\varphi),$$

$$F(\rho, \varphi) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \cos n\varphi + \Psi_n \sin n\varphi),$$

де

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad \psi_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \varphi) \sin n\varphi d\varphi, \\ F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad \Psi_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho, \varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Прирівнявши вирази для $f(\rho, \varphi)$ і $F(\rho, \varphi)$, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} I_0(\lambda_{0m} \rho), \\ f_n &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} I_n(\lambda_{nm} \rho), \\ \psi_n &= \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} I_n(\lambda_{nm} \rho) \end{aligned} \right\} \text{ i } \left. \begin{aligned} F_0 &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} a \lambda_{0m} B_{0m} I_0(\lambda_{0m} \rho), \\ F_n &= \sum_{m=1}^{\infty} a \lambda_{nm} B_{nm} I_n(\lambda_{nm} \rho), \\ \psi_n &= \sum_{m=1}^{\infty} a \lambda_{nm} D_{nm} I_n(\lambda_{nm} \rho). \end{aligned} \right\}$$

Отримані коефіцієнти залежать від ρ і, тому, нам необхідно розкласти функції від ρ в ряд по функціях $I_n(\lambda_{nm} \rho)$ – при фіксованому n . Маючи ці розклади, ми визначимо коефіцієнти A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} і D_{nm} .

Враховуючи властивість ортогональності сукупності функцій Бесселя, розкладемо, наприклад, функцію $G(\rho)$ в ряд

$$G(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m I_n(\lambda_{nm} \rho).$$

Нехай такий розклад можливий і може бути проінтегрований почленно. Покажемо, як визначити коефіцієнти E_m .

Для функцій $I_n(\lambda_{n1} \rho)$, $I_n(\lambda_{n2} \rho)$, ..., $I_n(\lambda_{nm} \rho)$, ... виконується властивість ортогональності, тобто:

$$\int_0^q \rho I_n(\lambda_{ni} \rho) I_n(\lambda_{nj} \rho) d\rho = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{і} \quad \int_0^q \rho I_n^2(\lambda_{nm} \rho) d\rho = \|I_n\|^2 \quad \text{при} \quad i = j = m.$$

Помножимо обидві частини розкладу на $\rho I_n(\lambda_{np} \rho)$ і проінтегруємо на інтервалі $(0, q)$ при $p \in \mathbf{N}$

$$\int_0^q G(\rho) I_n(\lambda_{np} \rho) \rho d\rho = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \int_0^q \rho I_n(\lambda_{nm} \rho) I_n(\lambda_{np} \rho) d\rho.$$

У правій частині залишиться, внаслідок ортогональності функцій, лише норма функції Бесселя

$$\|I_n\|^2 = \int_0^q \rho I_n^2(\lambda_{nm} \rho) d\rho,$$

яка виникає при $p = m$. Таким чином, отримаємо

$$\int_0^q G(\rho) I_n(\lambda_{nm} \rho) \rho d\rho = E_m \cdot \|I_n\|^2 \quad \text{або} \quad E_m = \frac{\int_0^q G(\rho) I_n(\lambda_{nm} \rho) \rho d\rho}{\int_0^q \rho I_n^2(\lambda_{nm} \rho) d\rho}.$$

При цьому

$$\|I_n\|^2 = \frac{q^2}{2} (I_n'(\lambda_{nm} \rho))^2.$$

Використавши викладене, записуємо для шуканих коефіцієнтів

$$A_{0m} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^q \varphi_0 I_0(\lambda_{0m} \rho) \rho d\rho}{\int_0^q \rho I_0^2(\lambda_{0m} \rho) d\rho} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^q f(\rho, \varphi) I_0(\lambda_{0m} \rho) \rho d\rho}{2\pi \int_0^q \rho I_0^2(\lambda_{0m} \rho) d\rho},$$

$$A_{nm} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\varphi d\varphi \int_0^q f(\rho, \varphi) I_n(\lambda_{nm} \rho) \rho d\rho}{\pi \int_0^q \rho I_n^2(\lambda_{nm} \rho) d\rho},$$

$$C_{nm} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\varphi d\varphi \int_0^q f(\rho, \varphi) I_n(\lambda_{nm} \rho) \rho d\rho}{\pi \int_0^q \rho I_n^2(\lambda_{nm} \rho) d\rho}.$$

Користуючись цими ж міркуваннями, визначаються і коефіцієнти F_0 , F_n і Ψ_n – необхідно лише зробити просту заміну функцій з наступним діленням їх на λ_{nm} .

Провівши обчислення коефіцієнтів A_{0m} , B_{0m} , A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} і D_{nm} , та підставивши їх у рівняння

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + B_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \cos n\varphi +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm} \cos a\lambda_{nm}t + D_{nm} \sin a\lambda_{nm}t) I_n(\lambda_{nm}\rho) \sin n\varphi$$

отримаємо загальний розв'язок вільних коливань круглої мембрани.

II. Рівняння теплопровідності.

Виведемо рівняння поширення теплоти в прямолінійному стержні завдовжки l . Якщо температура у різних точках тіла неоднакова, то у ньому відбувається перерозподіл тепла у відповідності з емпіричним законом Фур'є, згідно якого кількість тепла dQ , що протікає через малу площадку dS за короткий проміжок часу прямо пропорційна площі dS , довжини проміжку часу dt і похідній від температури по нормалі до площини:

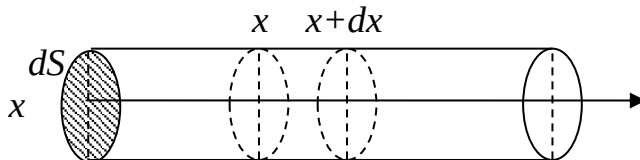
$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt,$$

де k – коефіцієнт (внутрішньої) теплопровідності речовини.

Введемо у розгляд поняття вектора густини теплового потоку $\vec{q}$, який співпадає за напрямком з градієнтом температури $\nabla T = \text{grad}T$, а по модулю дорівнює кількості тепла, яке протікає за одну секунду через одиничну площадку, яка розміщена перпендикулярно до градієнта температури. У цьому випадку закон теплопровідності зображується у векторній формі:

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad}T.$$

Знак « $-$ » у рівнянні вказує на те, що градієнт температури спрямований в бік зростання температури, а тепло поширюється до більш холодних точок тіла.



Нехай нам задано однорідне тіло, температура якого є функцією координат x, y, z і часу t : $T = T(x, y, z, t)$. Нехай всередині тіла існують джерела тепла, потужність яких дорівнює $Q = Q(x, y, z, t)$. Виділимо в тілі деякий малий об'єм ΔV і складемо його тепловий баланс. За час dt в ньому виділиться кількість тепла:

$$\Delta Q = dt \int_{\Delta V} Q(x, y, z, t) dV.$$

Частина цього тепла ΔQ_1 піде на підвищення температури малого об'єму ΔV , а інша частина ΔQ_2 внаслідок теплопровідності перейде в навколишні області тіла.

Визначимо ці кількості тепла. Кількість тепла, яке необхідне для підвищення температури нескінченно малого об'єму dV від $T(t)$ до $T(t + dt)$, дорівнює:

$$dQ_1 = c\rho dV(T(t + dt) - T(t)) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV,$$

де c – питома теплоємність тіла, ρ – його густина.

Інтегруючи цю рівність по об'єму $c\rho dV$, отримаємо:

$$\Delta Q_1 = dt \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Щоб визначити ΔQ_2 , врахуємо, що за одну секунду через поверхню ΔS , яка обмежує об'єм ΔV , протікає кількість тепла $\oint_{\Delta S} q_n dS$.

Тому

$$\Delta Q_2 = dt \oint_{\Delta S} q_n dS.$$

Прирівнявши ΔQ до суми ΔQ_1 і ΔQ_2 , отримаємо:

$$\int_{\Delta V} Q(x, y, z, t) dV = \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{\Delta S} q_n dS.$$

В цій рівності знаходяться інтеграли по різним змінним. Тому використаємо в останньому інтегралі теорему Остроградського-Гаусса:

$$\oint_{\Delta S} q_n dS = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV.$$

Тоді рівність матиме вигляд:

$$\int_{\Delta V} Q(x, y, z, t) dV = \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV$$

або

$$\int_{\Delta V} \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right) dV = 0.$$

Оскільки останнє співвідношення справедливе для довільного об'єму ΔV , то повинен дорівнювати нулю підінтегральний вираз:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q = 0.$$

Враховуючи це, що $\vec{q} = -k \cdot \operatorname{grad} T$, отримаємо:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) - Q = 0.$$

Якщо тіло однорідне, то $k = \text{const}$ і

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T + Q(x, y, z, t),$$

тобто, отримаємо диференціальне рівняння поширення тепла:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q(x, y, z, t).$$

Розглянемо часткові випадки цього рівняння.

Розподіл тепла без тепловиділення. Якщо всередині розглядуваної області нема джерел тепла ($Q = 0$), то рівняння теплопровідності має більш простий вигляд:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t},$$

де $a = \frac{k}{c\rho}$ – *коефіцієнт температуропровідності*.

Стаціонарний потік тепла. Для стаціонарного потоку теплообміну температура в кожній точці тіла не змінюється з часом $T'_t = 0$. Рівняння теплопровідності в цьому випадку приймає форму рівняння Пуассона:

$$\Delta T = -\rho, \text{ де } \rho = \frac{Q}{k}.$$

Стаціонарний потік тепла без тепловиділення. В цьому випадку $Q = 0$, і $T'_t = 0$, тому розподіл температури здійснюється по закону, який визначається рівнянням Лапласа: $\Delta T = 0$.

Рівняння динамічної теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

містить похідні другого порядку по координатах і похідну першого порядку по часу. Тому для однозначності його розв'язку необхідно задати одну початкову умову і дві граничні умови для кожної координати.

Стаціонарні рівняння Пуассона і Лапласа не містять змінної t , тому для однозначності розв'язків для них необхідні лише граничні умови.

Початкова умова полягає в тому, що температура всіх точок тіла в момент часу $t = 0$ є певною функцією координат:

$$T|_{t=0} = f(x, y, z).$$

Граничні або **крайові** умови при розв'язанні фізичних задач є трьох видів.

У випадку крайових умов **першого** роду задається температура на поверхні S тіла в будь-який момент часу:

$$T|_S = \varphi(x, y, z).$$

(В загальному випадку функція φ може залежати і від часу t , але у переважній більшості випадків температура на поверхні вважається постійною).

У випадку крайових умов **другого** роду температура на поверхні невідома, але вказується тепловий потік q , який протікає через поверхню (або всередину, або назовні), як функція координат точок поверхні:

$$q_n = \psi(x, y, z),$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні. Так як $q_n = -k \cdot \frac{dT}{dn}$, то

граничні умови мають диференціальний характер:

$$\frac{dT}{dn} = \psi(x, y, z).$$

Крайові умови **третього** роду є узагальненням умов першого і другого роду:

$$\frac{dT}{dn} - hT|_S = F(x, y, z).$$

Постійна h – **коефіцієнт зовнішньої теплопровідності**.

Крайова умова третього роду використовується тоді, коли наявним є процес тепловіддачі (охолодження), тобто переносу тепла від тіла до навколишнього середовища.

Якщо розглядається задача про розподіл температури у стержні, то крайові умови задаються на кінцях стержня: $x = 0$ (лівий кінець) і $x = l$ (правий кінець). За законом Ньютона через правий кінець стержня до оточуючого середовища за час Δt надходить кількість теплоти $h_1(T - T_1)S\Delta t$, де T_1 – задана температура

зовнішнього середовища (може бути функцією часу). Ця кількість тепла надходить до правого кінця стержня через поперечний переріз стержня, який нескінченно близький до цього кінця. Тому її можна подати також за законом

Фур'є $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} S \Delta t$. Прирівнюючи ці два вирази, знаходимо

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = h_1 (T(l, t) - T_1).$$

Аналогічно знаходимо, що для лівого кінця стержня (враховано, що на лівому кінці нормаль до перерізу направлена в бік зменшення абсциси x)

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 (T(0, t) - T_0).$$

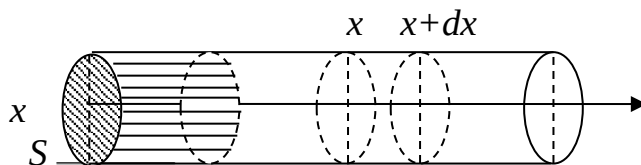
Кінці стержня можуть знаходитись в різних середовищах, тому сталі h_0 , h_1 , T_0 , T_1 взято різними.

Це є загальний запис крайових умов: якщо, наприклад, правий кінець стержня знаходиться при сталій температурі T_0 , то $T(l, t) = T_0$, можуть бути інші випадки.

III. Рівняння дифузії.

Виведення рівняння дифузії здійснимо по аналогії із рівнянням теплопровідності. Якщо концентрація розчиненої речовини в заданому об'ємі не є сталою, то відбувається процес дифузії речовини від місць з більшою концентрацією до місць з меншою концентрацією.

Виведемо рівняння дифузії для випадку дифузії солі в воді. Нехай сіль займає частину циліндричної пробірки і дифундує у воду. Концентрацію солі в довільному



поперечному перерізі x в момент часу t будемо вважати функцією $u(x, t)$. За законом Нернста, маса солі, що пройшла за час dt через поперечний переріз x трубки дорівнює $dQ_x = -D \frac{\partial u}{\partial x} S dt$, де D – коефіцієнт дифузії, який вважаємо постійним; S – площа поперечного перерізу.

За тим же законом через переріз $x + dx$ за час dt проходить маса

$$dQ_{x+dx} = -D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) S dx dt.$$

Приріст кількості солі в елементі об'єму $S dx = S(x + dx - x)$ за час dt дорівнює

$$dQ = dQ_x - dQ_{x+dx} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx dt.$$

Приріст кількості солі зумовлює зміну концентрації розчину з часом, тобто

$$dQ = \frac{\partial u}{\partial t} S dx dt$$

Прирівнюючи два вирази для dQ , знайдемо рівняння дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Початкова і крайові умови цієї задачі задаються аналогічно, до попередньої задачі.

Інтеграл Фур'є. Інтегрування рівнянь теплопровідності вимагають в ряді випадків використовувати інтеграли Фур'є, які можна розглядати як певне узагальнення рядів Фур'є.

Із курсу математичного аналізу відомо, що всяку періодичну функцію $f(x)$, яка задовольняє умови Діріхле (функція $f(x)$ задовольняє в інтервалі (a, b) умови Діріхле, якщо вона або неперервна в цьому інтервалі, або має скінченну кількість розривів першого роду і, крім того, має скінченну кількість максимумів та мінімумів в цьому інтервалі), можна подати тригонометричним рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right),$$

де коефіцієнти ряду виражаються формулами

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ряд Фур'є проводить розклад періодичної функції (період дорівнює $2l$) на гармонічні компоненти (на суму гармонік), частоти яких становлять дискретну сукупність значень

$$\frac{\pi}{l}, 2 \frac{\pi}{l}, 3 \frac{\pi}{l}, \dots, k \frac{\pi}{l}, \dots$$

Інтеграл Фур'є є формулою для розкладу неперіодичної функції на гармонічні компоненти з неперервною сукупністю частот.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє на кожному скінченному відрізку умови Діріхле і абсолютно інтегрована, тобто інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

дорівнює скінченному числу, то справедливою є рівність

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

де коефіцієнти дорівнюють

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du.$$

Інтеграл Фур'є є узагальненням ряду Фур'є. у випадку інтеграла Фур'є частота λ набуває неперервних значень з інтервалу $(0, \infty)$.

Інтеграл Фур'є часто подають в більш компактній формі

$$f(x) = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du.$$

Останню формулу можна розглядати як граничну формулу ряду Фур'є для функції з періодом $2l$, коли $l \rightarrow \infty$.

Оскільки $\cos \lambda(u-x)$ парна функція відносно λ , то розклад функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є можна подати таким чином:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du$$

або

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

де

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du.$$

Метод Фур'є для рівнянь теплопровідності

Поширення тепла в нескінченному стержні. Розглянемо задачу про поширення теплоти в необмеженому стержні (абсциса лівого кінця $x = -\infty$ а правого $- x = \infty$), коли температура $U(x, t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

де $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, c – теплоємність

стержня, ρ – лінійна густина стержня і початкову умову

$$U(x, 0) = f(x).$$

Для таких задач (задач Коші) крайових умов не потрібно. Внаслідок того, що ми будемо використовувати при розв'язуванні задачі метод Фур'є, температура стержня позначається буквою $U(x, t)$, координатна функція буквою $X(x)$, функція часу – $T(t)$. Сформульована задача має таке практичне значення: $U(x, t)$ характеризує температуру середньої частини досить довгого стержня протягом деякого проміжку часу (доки температурні умови на кінцях стержня не впливають на розподіл температури в середній частині).

Частинні розв'язки задачі будемо шукати у вигляді добутку функцій: $U(x,t) = T(t) \cdot X(x)$. Підстановка функції у диференціальне рівняння дає $T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$ або

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

де λ^2 – постійна. Ми отримуємо таким чином

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

звідки, відкидаючи постійний множник у виразі $T(t)$:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

постійні A і B можуть залежати від λ .

Таким чином

$$U(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x).$$

Так як ніяких граничних умов нема, то параметр λ залишається довільним, і при складанні функції $U(x,t)$ у вигляді суми

$$\sum_{(\lambda)} e^{-\lambda^2 a^2 t} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)$$

всі значення λ є рівноправними, то суму по окремим значенням λ можна замінити інтегралом по параметру λ в інтервалі $(-\infty, \infty)$, тобто

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$$

Початкова умова нам дає

$$U(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$$

Порівнюючи інтеграл в правій частині з формулою Фур'є для функції $f(x)$, робимо висновок:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \lambda v dv, \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \lambda v dv.$$

Підставивши отримані значення $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ у функцію $U(x,t)$, отримаємо

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} (\cos \lambda v \cos \lambda x + \sin \lambda v \sin \lambda x) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(v-x) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(v-x) d\lambda, \end{aligned}$$

тут враховано, що підінтегральна функція є парною функцією від λ .

Формула

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(v-x) d\lambda$$

є розв'язком нашої задачі. Її можна спростити, використавши той факт, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2 t}}$$

і тому

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(v-x) d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}},$$

тобто

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}} dv.$$

Представлення розподілу температури у такій формі дає можливість отримати важливий фізичний зміст. Функція $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}}$ дає розподіл температури, який називається **миттєвим джерелом тепла** $Q = c\rho$, який розміщений в початковий момент часу $t = 0$ в точці $x = v$ стержня. В цьому випадку, щоб надати перетину $x = v$ стержня температури $f(v)$ в початковий момент, ми повинні розподілити на малому елементі dv біля цієї точки кількість тепла $dQ = c\rho f(v)dv$, або помістити в точці $x = v$ миттєве джерело тепла dQ ; розподіл температури, який породжується цим джерелом, становить

$$\frac{f(v)dv}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Загальна ж дія від початкової температури $f(v)$ у всіх точках стержня сумується з цих окремих елементів, що і дає результуючу формулу розподілу температури.

При поширенні тепла в нескінченному стержні розв'язок, який відповідає початковій температурі $f(x)$, можна також розглядати як суперпозицію (накладання) температур, які виникають в точці x в момент часу t внаслідок неперервного розподілу по стержню теплових імпульсів інтенсивності $f(v)dv$ (в інтервалі $(v, v + dv)$), прикладених в момент $t = 0$.

Поширення тепла в обмеженому з одного кінця стержні. Розглянемо задачу про поширення теплоти в обмеженому з одного кінця стержні (абсциса лівого кінця $x = 0$ а правого — $x = \infty$), коли температура $U(x,t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Нехай на лівому кінці стержня маємо випромінювання в навколишнє середовище з температурою 0° .

В цьому випадку ми маємо, крім початкової умови

$$U(x,0) = f(x),$$

граничну умову

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = hU|_{x=0}.$$

Внаслідок початкової умови функція $f(x)$ визначена лише в інтервалі $(0, \infty)$, і тому розв'язок попередньої не годиться. Щоб його можна було використати необхідно продовжити функцію $f(x)$ в проміжок $(-\infty, 0)$. Для цього перепишемо результат попередньої задачі у вигляді

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2t}} + f(-v) e^{-\frac{(x+v)^2}{4a^2t}} \right) dv.$$

Це можна легко показати, розбивши $\int_{-\infty}^\infty$ на два: $\int_{-\infty}^0$ і $\int_0^\infty$ і зробивши заміну в першому інтегралі v на $(-v)$.

Знайдемо похідну по x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(f(v) \frac{v-x}{2a^2t} e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2t}} - f(-v) \frac{v+x}{2a^2t} e^{-\frac{(x+v)^2}{4a^2t}} \right) dv.$$

При $x = 0$ знаходимо

$$U|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} (f(v) + f(-v)) dv,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \frac{v(f(v) - f(-v))}{2a^2t} e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv.$$

Проінтегруємо частинами кожен з цих інтегралів, вважаючи, що при $v \rightarrow \infty$ $e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} f(v) \rightarrow 0$.

$$\int_0^\infty \frac{vf(v)}{2a^2t} e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv = - \int_0^\infty f(v) d \left(e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} \right) = \left[\begin{array}{c|c} \int pdz = pz - \int zdp & \\ \hline \frac{f(v) = p}{d \left(e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} \right) = dz} & \frac{dp = f'(v)dv}{z = e^{-\frac{v^2}{4a^2t}}} \end{array} \right] =$$

$$= \left(f(v) e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty f'(v) e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv = f(+0) + \int_0^\infty f'(v) e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv.$$

Аналогічно

$$\int_0^\infty \frac{vf(-v)}{2a^2t} e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv = f(-0) - \int_0^\infty f'(-v) e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} dv.$$

Продовжуючи $f(x)$ неперервно і на проміжок $(-\infty, 0)$, будемо вважати, що $f(+0) = f(-0) = f(0)$. Тоді отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} (f'(v) + f'(-v)) dv.$$

Використавши граничну умову задачі, будемо мати

$$\frac{h}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} (f(v) + f(-v)) dv = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} (f'(v) + f'(-v)) dv$$

$$\text{або } \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4a^2t}} (f'(v) + f'(-v) - h(f(v) + f(-v))) dv = 0.$$

Цей вираз буде виконуватись, якщо припустити, що

$$f'(-v) + f'(v) = h(f(-v) + f(v)).$$

Позначимо $\Phi(v) = f(-v)$, $\Phi'(v) = f'(-v)$, і визначимо невідому функцію $\Phi(v)$ з диференціального рівняння

$$\Phi'(v) + h\Phi(v) = f'(v) - hf(v) \quad (v \geq 0).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\Phi(v) = e^{-hv} \left(C + \int_0^v e^{hv} (f'(v) - hf(v)) dv \right).$$

Постійну інтегрування визначаємо з умови $v = 0$: $C = \Phi(0) = f(0)$ і обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^v e^{hv} f'(v) dv &= \int_0^v e^{hv} d(f(v)) = \left[\begin{array}{c|c} \int pdz = pz - \int zdp & \\ \hline e^{hv} = p & dp = he^{hv} dv \\ \hline d(f(v)) = dz & z = f(v) \end{array} \right] = \\ &= \left(f(v) e^{hv} \right) \Big|_{v=0}^{v=v} - h \int_0^v f(v) e^{hv} dv = f(v) e^{hv} - f(0) - h \int_0^v f(v) e^{hv} dv. \end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи $\Phi(v) = f(-v)$, отримаємо

$$f(-v) = f(v) - 2he^{-hv} \int_0^v f(v) e^{hv} dv.$$

Підставивши знайдений вираз, знаходимо розв'язок задачі

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+v)^2}{4a^2t}} \right) f(v) dv - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} 2h \int_0^\infty e^{-\frac{(x+v)^2}{4a^2t}} e^{-hv} \left(\int_0^v f(v) e^{hv} dv \right) dv.$$

Розв'язок задачі практичніше записувати у вигляді

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2t}} + f(-v) e^{-\frac{(x+v)^2}{4a^2t}} \right) dv,$$

де

$$f(-v) = f(v) - 2he^{-hv} \int_0^v f(v) e^{hv} dv.$$

Поширення тепла в обмеженому з обох кінців стержні. Дослідимо за диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

один із найбільш поширених випадків знаходження розподілу температури $U(x,t)$ в обмеженому з обох кінців стержні, якщо

- на лівому кінці $x = 0$ підтримується температура 0° : $U(0,t) = 0$;
- на правому кінці $x = l$ тепло випромінюється в навколишнє середовище з температурою 0° :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = -hU|_{x=l};$$

- початкова температура: $U(x,0) = f(x)$ ($0 \leq x \leq l$).

Задачу будемо розв'язувати методом Фур'є. Так як задача має граничні умови, то будемо вимагати, щоб знайдений раніше розв'язок

$$U(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

задовольняв цим умовам

$$U(0,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} (A \cos \lambda \cdot 0 + B \sin \lambda \cdot 0) = 0, \text{ тобто } A = 0.$$

Тому, отримаємо

$$U(x,t) = Be^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \text{ і } \frac{\partial U}{\partial x} = -\lambda Be^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x.$$

Визначимо λ із граничної умови на правому кінці стержня:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = -hU|_{x=l} \text{ і, } -\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda l = -h e^{-\lambda^2 a^2 t} B(\lambda) \sin \lambda l,$$

тобто $\lambda \cos \lambda l = h \sin \lambda l$. Приймавши $\lambda l = v$, отримаємо рівняння

$$\operatorname{tg} v = \alpha v, \text{ де } \alpha = -\frac{1}{hl}.$$

Це рівняння має нескінченну кількість дійсних коренів, з яких виберемо лише додатні: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$. Цим кореням відповідає нескінченна множина значень

$$\lambda: \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots, \text{ де } \lambda_n = \frac{v_n}{l},$$

а їм, в свою чергу, – нескінченна кількість часткових розв’язків диференціального рівняння

$$U_n(x, t) = B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x \quad (n \in \mathbf{N}),$$

яке задовольняє граничні умови.

Для того, щоб задовольнити початкові умови, будемо шукати $U(x, t)$ у вигляді ряду

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x.$$

При $t = 0$ отримаємо

$$U(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \text{ де } X_n(x) = \sin \lambda_n x.$$

Доведемо ортогональність функцій $X_n(x) = \sin \lambda_n x$. Для цього запишемо для двох із них відповідні диференціальні рівняння

$$X_m''(x) + \lambda_m^2 X_m(x) = 0, \quad X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0.$$

Помножимо почленно перше рівняння на $X_n(x)$, друге на $X_m(x)$, віднімемо почленно отримані рівняння і проінтегруємо в проміжку інтегрування $(0, l)$:

$$\int_0^l (X_m''(x) X_n(x) - X_n''(x) X_m(x)) dx + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Інтегруючи в першому інтегралі частинами, отримаємо} \\ X_m'(l) X_n(l) - X_n'(l) X_m(l) + X_m'(0) X_n(0) - X_n'(0) X_m(0) + \\ + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Для $X_n(x)$ і $X_m(x)$ виконуються граничні умови, тобто

$$X_m(0) = X_n(0) = 0, \quad X_m'(l) = -h X_m(l), \quad X_n'(l) = -h X_n(l).$$

Внаслідок цих рівностей вираз поза інтегралом перетворюється в нуль, і, приймаючи до уваги, що $\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \neq 0$ при різних значеннях m і n , отримуємо

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

Встановивши ортогональність, робимо висновок, що коефіцієнти B_n визначаються формулою

$$B_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

Таким чином, отримуємо розв'язок задачі про розподіл температури в обмеженому стержні

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x, \text{ де } B_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

Тема 7. Метод скінченних різниць.

1. Поняття методу скінченних різниць, різницева схема.

Метод скінченних різниць (*метод сіток*) є ефективним засобом наближеного вирішення диференціальних рівнянь. Його суть полягає в тому, що неперервна функція замінюється набором значень у фіксованих точках. При цьому похідні функції виражаються через різниці значень функції в точках, завдяки чому диференціальне рівняння замінюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо деяку функцію однієї змінної, графік якої приведений на рис. 7.1.

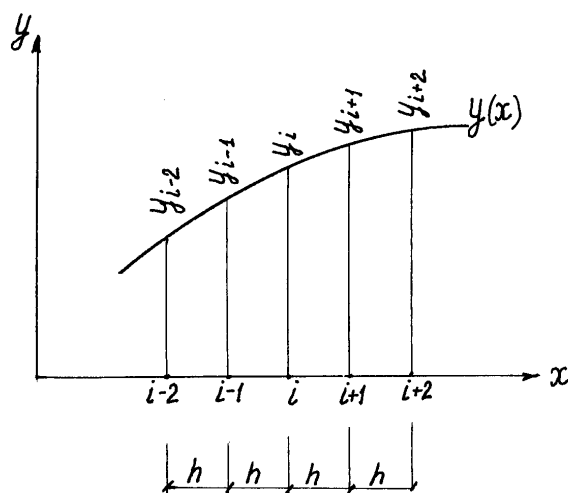


Рис. 7.1

Виберемо на осі x точки, віддалені один від одної на однакову відстань h , що називається кроком. Тоді значення першої похідної $\frac{dy}{dx}$ в i -вій точці можна записати:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (7.1)$$

Застосовуючи двічі вираз (1), запишемо другу похідну:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2h}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1}\right] = \frac{1}{4h^2}(y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}).$$

Скорочуючи інтервал в два рази, отримуємо:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \quad (7.2)$$

Аналогічно, застосовуємо двічі (7.2), отримаємо вираз для четвертої похідної:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_i = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}). \quad (7.3)$$

7.2 Використання методу сіток в задачах теорії пружності.

Визначення невідомих напружень плоскої задачі теорії пружності зводиться до інтегрування двох рівнянь рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

та рівняння суцільності: $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$.

Рівняння такого вигляду називається гармонійним, а функція $(\sigma_x + \sigma_y)$, що задовольняє йому, є *гармонічною*.

Введемо деяку функцію φ так, щоб:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (7.4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x.$$

Функція φ називається *функцією напружень* (функцією Ері).

Підставимо напруження, виражені через функцію Ері (7.4) в рівняння суцільності. Отримуємо

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

тобто

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

або

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (7.5)$$

Позначення ∇^4 читається «набла чотири» і називається *подвійним диференціальним оператором Лапласа*. У розгорненому вигляді рівняння (7.5) запишеться так:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (7.6)$$

Функція, що задовольняє рівнянню (7.5), називається *бігармонічною*.

Виразимо граничні умови також через функцію напружень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) m &= X_v, \\ - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= Y_v. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Таким чином, рішення плоскої задачі зводиться до відшукування бігармонічної функції, що задовольняє граничним умовам.

Для плоскої задачі диференціальне рівняння записується в частинних похідних. Розіб'ємо область (рис. 7.2) сіткою з однаковими розмірами $\Delta x = \Delta y = h$.

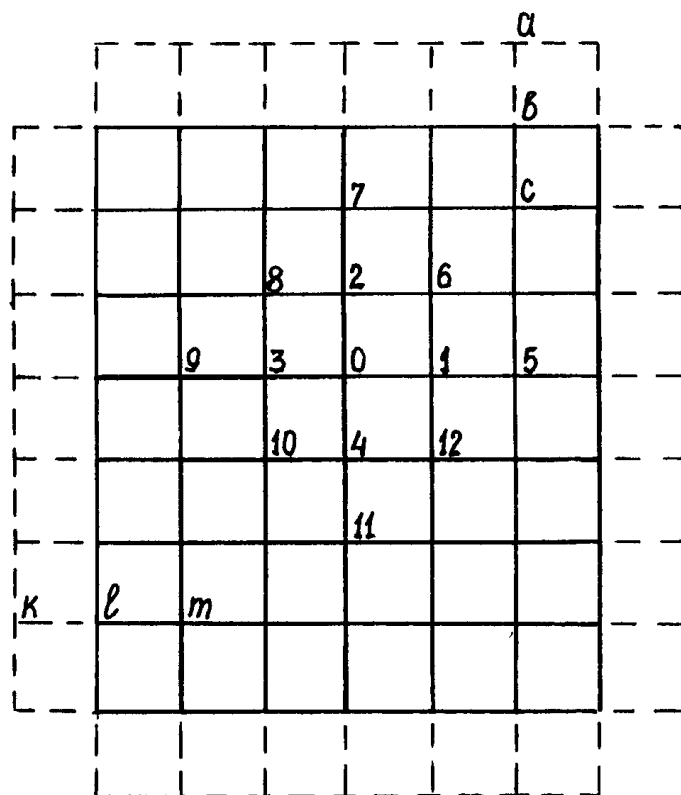


Рис. 7.2

Пронумеруємо точки навколо досліджуваної точки 0 і запишемо похідні, використовуючи вирази (7.1) (7.2) (7.3):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_3); \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_4); \quad (7.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_4 \right] & &= \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}); \end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_0 &= \frac{1}{h^4} (\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9); \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_0 &= \frac{1}{h^4} (\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}); \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_2 - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Тепер, використовуючи (7.10), можна записати бігармонічне рівняння (7.5) в кінцевих різницях. Після скорочення на $\frac{1}{h^4}$ для точки 0 воно набуде вигляду:

$$\begin{aligned} 20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\ + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рівняння (7.11) можуть бути записані для кожної точки усередині контура. У них увійдуть також значення функції напружень для точок на контурі та віддалених на один крок за контуром (штрихові лінії на рис.7.2).

Значення функції на контурі і за контуром знаходять з граничних умов. У такому разі отримують повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення значень φ в точках усередині контура.

Для запису граничних умов проф. Л.П.Синіцин запропонував використовувати балочну аналогію. Розглядаючи верхню грань контура як балку, можна скласти залежність між згиним моментом та навантаженням:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

В той же час для напруження σ_y з граничної умови маємо:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q.$$

Порівнюючи приведені залежності отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 M}{dx^2}$$

або, після інтегрування:

$$\varphi = M + C_1 x + C_2.$$

Оскільки напруження виражається через другі похідні, то значення констант C_1 і C_2 не враховуються у визначенні їх величини, тому можна прийняти: $\varphi = M$.

При цьому, оскільки константи залежать тільки від характеру закріплень балки, останні можна приймати будь-якими. Як правило, визначають згинні

моменти вважаючи контур рамою з шарнірними з'єднаннями стержнів у вузлах (рис. 7.3). Позитивними при цьому вважаються моменти, що розтягують волокна стержнів, розташовані усередині рами.

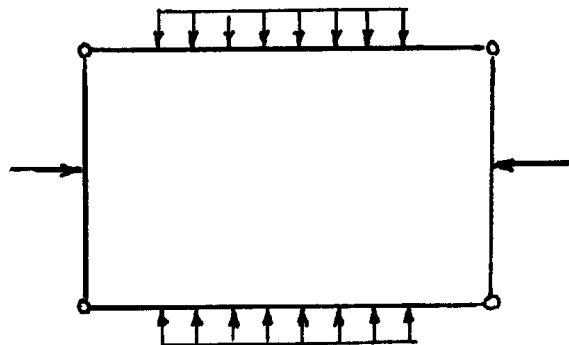


Рис. 7.3

Для визначення значення φ в точці a за контуром (рис. 7.3), запишемо її похідну для відповідної точки b на контурі:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_b = \frac{1}{24} (\varphi_a - \varphi_c).$$

Звідси отримуємо:

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_b.$$

Значення похідної $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ на верхній грані знайдемо з виразу

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Дійсно $\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$, звідки $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\int \tau_{xy} dx + C$.

За відсутності дотичного навантаження на контурі $\int \tau_{xy} dx = 0$, отже похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ постійна уздовж грані. Враховуючи, що на лівій вертикальній грані $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ дорівнює похідній згинального моменту $\frac{dM}{dy}$, отримуємо що при $x=0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dM}{dy} = Q.$$

Для прямокутного контура за відсутності дотичного навантаження отримуємо:

$$\varphi_a = \varphi_c + 2hN_b. \quad (7.12)$$

З урахуванням відповідності знаків між поперечними і подовжніми силами у вузлах рами, аналогічне співвідношення справедливе для точок за контуром на інших гранях. Наприклад, на лівій грані для т. k отримаємо:

$$\varphi_K = \varphi_m - 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_l = \varphi_m + 2hN_l.$$

Після складання і розв'язування системи рівнянь виду (7.11) напруження визначаються по формулах (7.4), записаних в кінцевих різницях. Наприклад, для точки 0 отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{h^2} (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ \sigma_y &= \frac{1}{h^2} (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{4h^2} (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Як вже обумовлювалось, метод кінцевих різниць є наближеним. Точність розрахунку підвищується зі зменшенням кроку сітки. Метод дає можливість знаходити розв'язок плоскої задачі при складному контурі та за наявності вирізів усередині області.

Приклад 7.1 Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень у пластині, наведеній на рисунку 7.9 при вихідних даних таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

а, м	а:б	с/а	l/b	q ₁ кН/м ²	q ₂ кН/м ²	d/a	f/b	F ₁ кН/м	F ₂ кН/м
2,5	5:4	0,22	0	8	4	0,3	0,5	10	3

Розв'язання.

Схема пластинки і навантаження відповідно даних табл. 7.1 наведена на рис.7.9.

Відповідно до завдання ($a : b = 5:4$) розбиваємо пластинку сіткою з однаковим кроком уздовж осей x та y (рис. 7.10). Для цього необхідно довжину a пластинки поділити на задану у співвідношенні $a:b$ кількості кроків:

$h = \frac{2,5}{5} = 0,5$ м . Пунктиром доповнюємо сітку на один крок від контуру. Вузли сітки нумеруємо, враховуючи наявність двох осей симетрії.

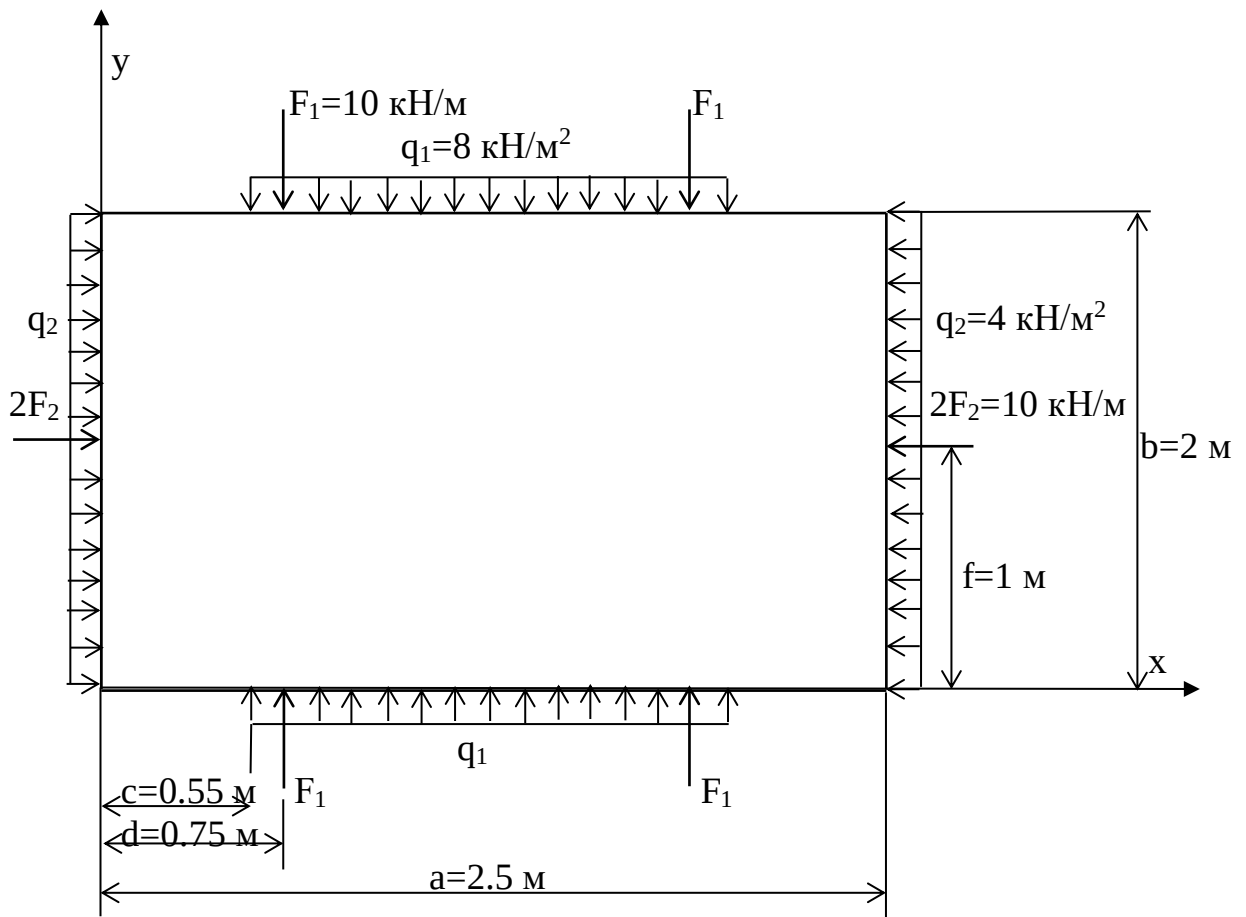


Рисунок 7.9

Враховуючи симетрію, складаємо рівняння для кожної внутрішньої точки у чверті контуру за схемою, наведеною на рис. 7.11. Ця схема показує, з яким множником необхідно брати значення функції φ для точки, відповідно розташованої відносно точки, в якій записується рівняння.

Отже отримаємо:

для т. 1: $20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_3' + \varphi_5 + \varphi_3) + 2(\varphi_4' + \varphi_6' + \varphi_6 + \varphi_4) + (\varphi_2'' + \varphi_8' + \varphi_{10} + \varphi_8) = 0;$

для т. 2: $20\varphi_2 - 8(\varphi_2'' + \varphi_4' + \varphi_1 + \varphi_4) + 2(\varphi_4''' + \varphi_3' + \varphi_3 + \varphi_4'') + (\varphi_1'' + \varphi_9' + \varphi_5 + \varphi_9) = 0;$

для т. 3: $20\varphi_3 - 8(\varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_8) + 2(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9) + (\varphi_4'' + \varphi_3' + \varphi_{11} + \varphi_{14}) = 0;$

для т. 4: $20\varphi_4 - 8(\varphi_4'' + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_9) + 2(\varphi_2'' + \varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_9'') + (\varphi_3'' + \varphi_4' + \varphi_6 + \varphi_{15}) = 0.$

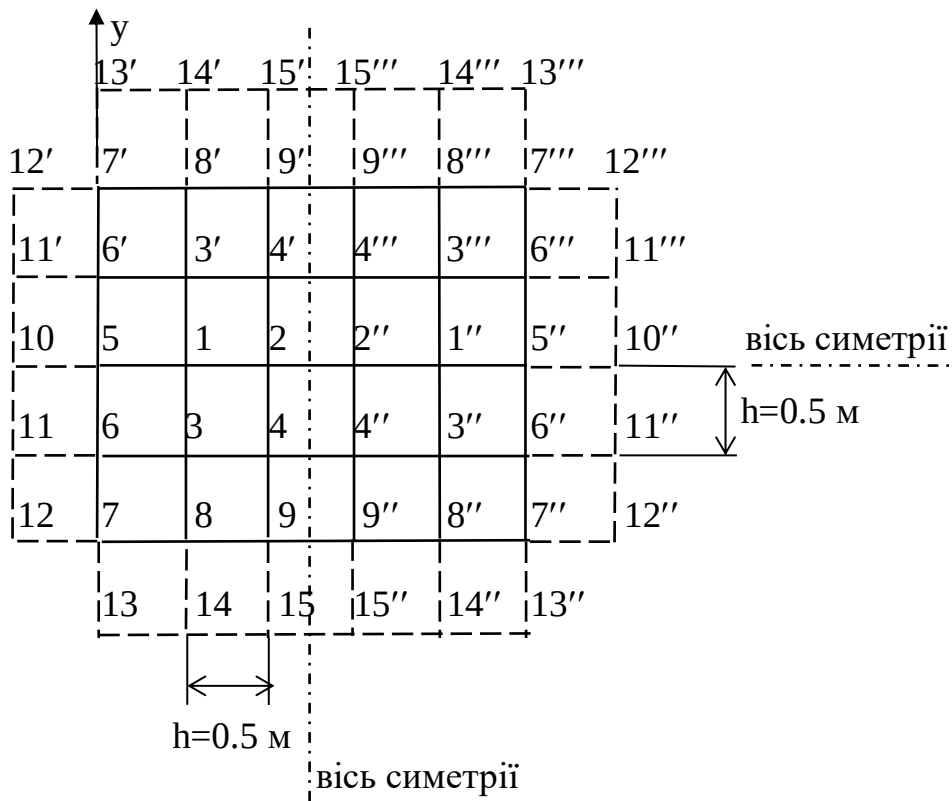


Рисунок 7.10

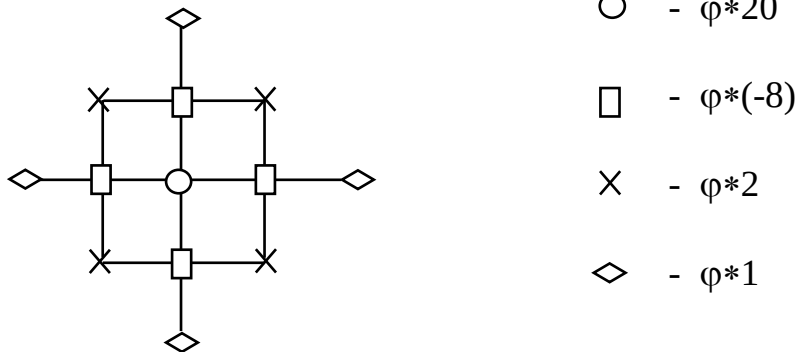


Рис. 7.11

Враховуючи, що в симетричних точках значення функції напружень однакові ($\varphi_i = \varphi_{i'} = \varphi_{i''} = \varphi_{i'''}$), одержуємо:

$$20\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 + \varphi_{10} = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 21\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_{14} = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 13\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 + \varphi_{15} = 0.$$

Утворюємо раму (рис. 7.12) з осями, що відповідають контуру рами і будуємо для неї епюри згинаючих моментів M і поздовжніх сил N від заданого на контурі навантаження (рис. 7.13).

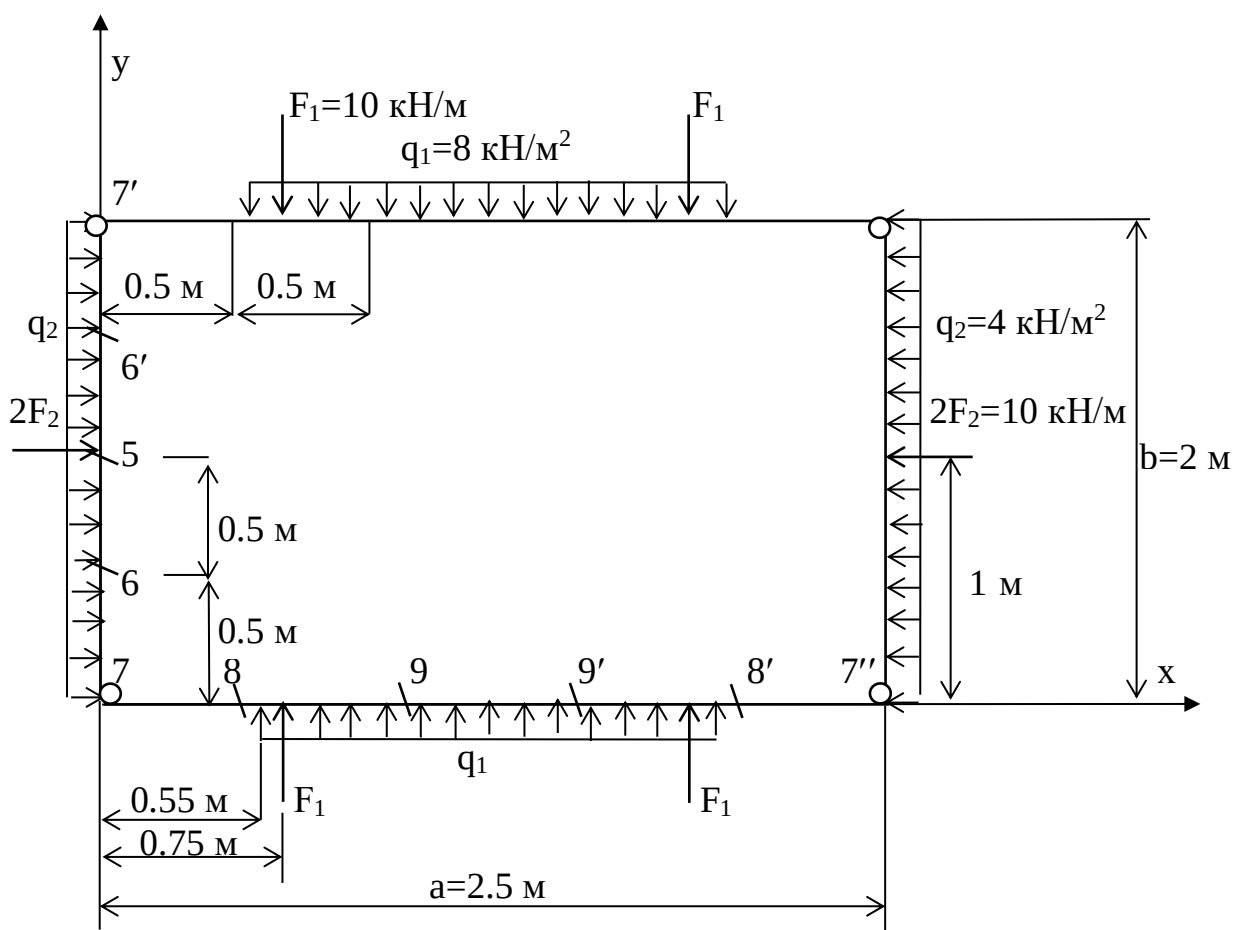


Рис. 7.12

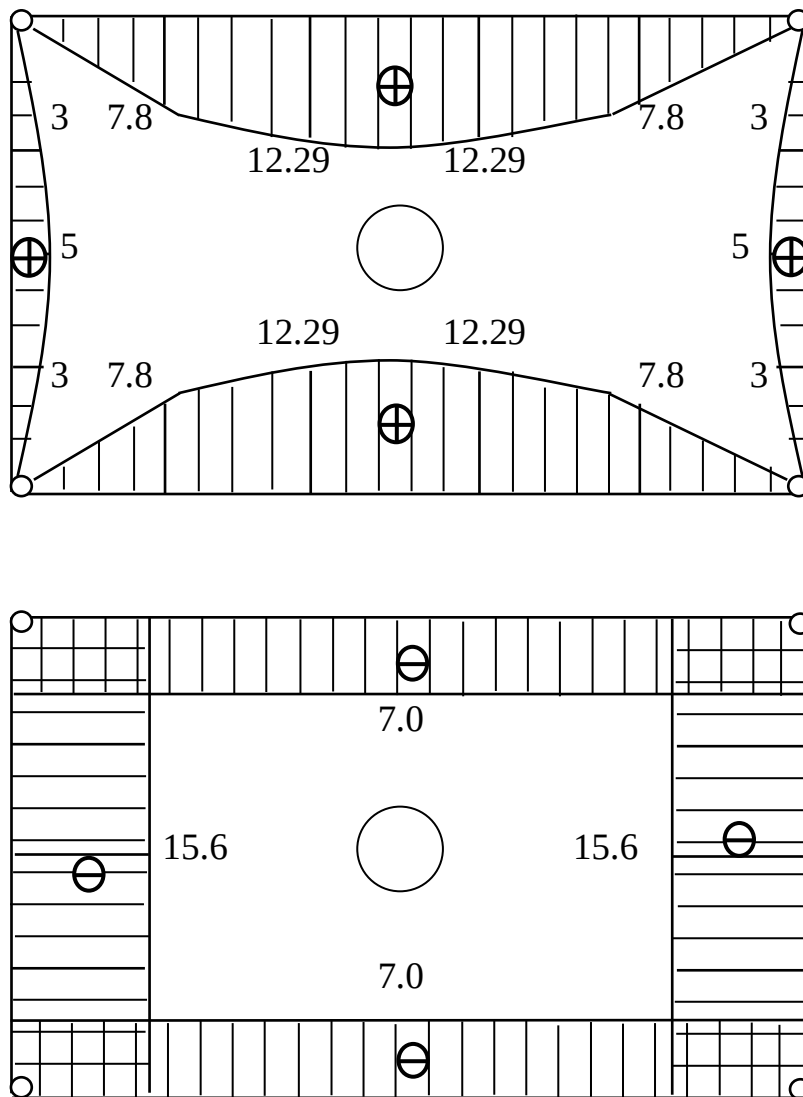


Рис. 7.13

Для визначення згинаючих моментів кожний стержень рами розглянемо окремо як балку на двох шарнірних опорах (рис. 7.14). Поздовжні сили в стержнях рами дорівнюють відповідним реакціям балок.

Визначаємо функції напружень у точках поза контуром. Для цього використовуємо співвідношення:

$$\varphi_{10} = \varphi_1 + 2h \cdot N_5 = \varphi_1 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = \varphi_1 - 15,6;$$

$$\varphi_{11} = \varphi_3 + 2h \cdot N_6 = \varphi_3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = \varphi_3 - 15,6;$$

$$\varphi_{14} = \varphi_3 + 2h \cdot N_8 = \varphi_3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = \varphi_3 - 7;$$

$$\varphi_{15} = \varphi_4 + 2h \cdot N_9 = \varphi_4 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = \varphi_4 - 7.$$

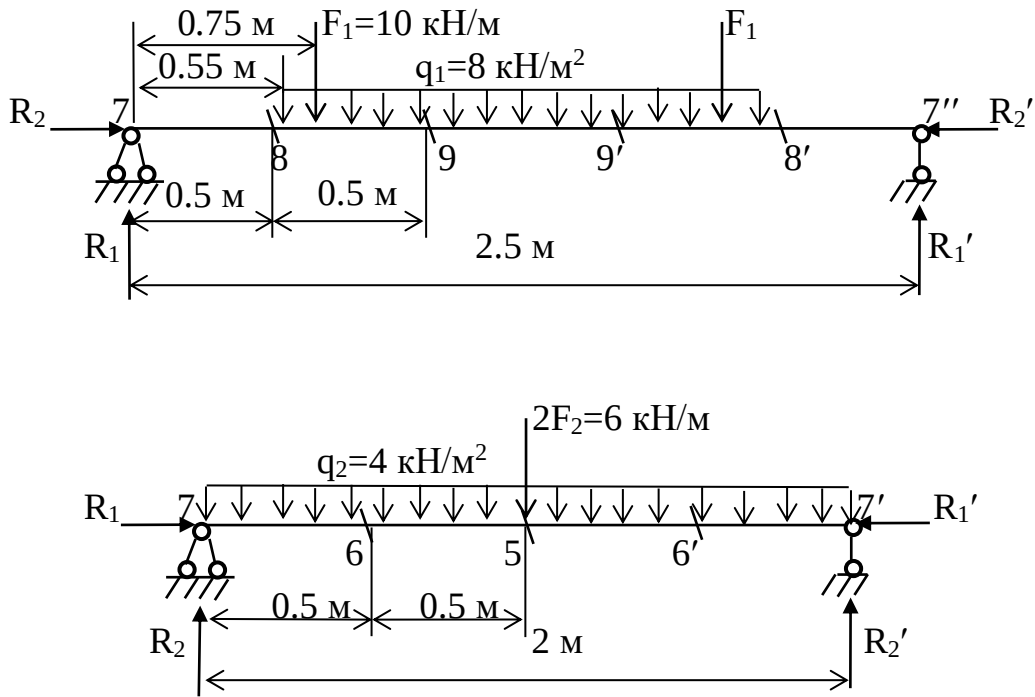


Рис. 7.14

Підставляючи ці співвідношення у попереднє рівняння, після зведення подібних одержуємо:

$$21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 - 15,6 = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 - 22,6 = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 - 7 = 0.$$

Значення функції напружень у точках на контурі визначаємо за рівностями еквівалентності моментам в точках на контурі:

$$\varphi_5 = M_5 = 5,0;$$

$$\varphi_6 = M_6 = 3,0;$$

$$\varphi_7 = M_7 = 0;$$

$$\varphi_8 = M_8 = 7,8;$$

$$\varphi_9 = M_9 = 12,29.$$

З урахуванням цих значень рівняння скінченних різниць набувають такого вигляду:

$$21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 28 = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + 29,58 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 - 74,42 = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 - 62,14 = 0.$$

Розв'язуємо цю систему алгебраїчних рівнянь.

В результаті одержимо наступні значення функції напружень в точках 1-4:

$$\varphi_1 = 11,60; \quad \varphi_2 = 15,42; \quad \varphi_3 = 10,37; \quad \varphi_4 = 14,58.$$

Далі обчислюємо значення φ у точках поза контуром:

$$\varphi_{10} = 11,60 - 15,6 = -4,0;$$

$$\varphi_{11} = 10,37 - 15,6 = -5,23;$$

$$\varphi_{14} = 10,37 - 7 = 3,37$$

$$\varphi_{15} = 14,58 - 7 = 7,58;$$

$$\varphi_{13} = \varphi_6 + 2hN_7 = 3 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-7) = -4;$$

$$\varphi_{12} = \varphi_8 + 2hN_7 = 7,8 + 2 \cdot 0,5 \cdot (-15,6) = -7,8.$$

Тепер можна перейти до визначення нормальних і дотичних напружень (у кПа) за формулами:

$$(\sigma_x)_1 = (\varphi_{3'} - 2\varphi_1 + \varphi_3) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 11,6 + 10,37) \cdot 4 = -9,84;$$

$$(\sigma_x)_2 = (\varphi_{4'} - 2\varphi_2 + \varphi_4) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 15,42 + 14,58) \cdot 4 = -6,72;$$

$$(\sigma_x)_3 = (\varphi_1 - 2\varphi_3 + \varphi_8) / h^2 = (11,6 - 2 \cdot 10,37 + 7,8) \cdot 4 = -5,36;$$

$$(\sigma_x)_4 = (\varphi_2 - 2\varphi_4 + \varphi_9) / h^2 = (15,42 - 2 \cdot 14,58 + 12,29) \cdot 4 = -5,80;$$

$$(\sigma_x)_5 = (\varphi_{6'} - 2\varphi_5 + \varphi_6) / h^2 = (3 - 2 \cdot 5 + 3) \cdot 4 = -16,0;$$

$$(\sigma_x)_6 = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7) / h^2 = (5 - 2 \cdot 3 + 0) \cdot 4 = -4,0;$$

$$(\sigma_x)_7 = (\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_{13}) / h^2 = (3 - 2 \cdot 0 - 4) \cdot 4 = -4,0;$$

$$(\sigma_x)_8 = (\varphi_3 - 2\varphi_8 + \varphi_{14}) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 7,8 + 3,37) \cdot 4 = -7,44;$$

$$(\sigma_x)_9 = (\varphi_4 - 2\varphi_9 + \varphi_{15}) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 12,29 + 7,58) \cdot 4 = -9,68.$$

$$(\sigma_y)_1 = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2) / h^2 = (5 - 2 \cdot 11,6 + 15,42) \cdot 4 = -11,12;$$

$$(\sigma_y)_2 = (\varphi_{2''} - 2\varphi_2 + \varphi_1) / h^2 = (15,42 - 2 \cdot 15,42 + 11,6) \cdot 4 = -15,28;$$

$$(\sigma_y)_3 = (\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_6) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 10,37 + 3) \cdot 4 = -12,64;$$

$$(\sigma_y)_4 = (\varphi_{4''} - 2\varphi_4 + \varphi_3) / h^2 = (14,58 - 2 \cdot 14,58 + 10,37) \cdot 4 = -16,84;$$

$$(\sigma_y)_5 = (\varphi_1 - 2\varphi_5 + \varphi_{10}) / h^2 = (11,6 - 2 \cdot 5 - 4) \cdot 4 = -9,6;$$

$$(\sigma_y)_6 = (\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_{11}) / h^2 = (10,37 - 2 \cdot 3 - 5,23) \cdot 4 = -3,44;$$

$$(\sigma_y)_7 = (\varphi_8 - 2\varphi_7 + \varphi_{12}) / h^2 = (7,8 - 2 \cdot 0 - 7,8) \cdot 4 = 0;$$

$$(\sigma_y)_8 = (\varphi_9 - 2\varphi_8 + \varphi_7) / h^2 = (12,29 - 2 \cdot 7,8 + 0) \cdot 4 = -13,24;$$

$$(\sigma_y)_9 = (\varphi_{9''} - 2\varphi_9 + \varphi_8) / h^2 = (12,29 - 2 \cdot 12,29 + 7,58) \cdot 4 = -17,96.$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{xy})_1 &= (\varphi_{4'} - \varphi_{6'} + \varphi_6 - \varphi_4) / (4h^2) = 0; \\
(\tau_{xy})_2 &= (\varphi_{4'''} - \varphi_{3'} + \varphi_3 - \varphi_{4''}) / (4h^2) = 0; \\
(\tau_{xy})_3 &= (\varphi_2 - \varphi_5 + \varphi_7 - \varphi_9) / (4h^2) = (15,42 - 5 + 0 - 12,29) \cdot 1 = -1,87; \\
(\tau_{xy})_4 &= (\varphi_{2''} - \varphi_1 + \varphi_8 - \varphi_{9''}) / (4h^2) = (15,42 - 11,6 + 7,8 - 12,29) \cdot 1 = -0,67.
\end{aligned}$$

Дотичні напруження на контурі дорівнюють нулю:

$$(\tau_{xy})_5 = (\tau_{xy})_6 = (\tau_{xy})_7 = (\tau_{xy})_8 = (\tau_{xy})_9 = 0.$$

Виходячи з одержаних значень, на рис. 7.15 побудовані епюри напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Слід зауважити, що нормальні напруження повинні задовольняти умовам симетрії, а дотичні напруження є кососиметричними. Кососиметрична функція для симетричних точок має протилежні за знаком значення.

Аналізуючи розподіл нормальних напружень, відзначимо, що вони вирівнюються при віддаленні від країв пластинки. Особливо це помітно на епюрі σ_x . Так, на краї платини при $x = 0$ різниця між напруженнями становить $16 - 4 = 12$ кПа, а поблизу середини $9,68 - 5,8 = 3,88$ кПа.

Це явище відповідає відомому принципу Сен-Венана, за яким результат дії самоврівноваженої системи сил зменшується при віддаленні від місця їх прикладання.

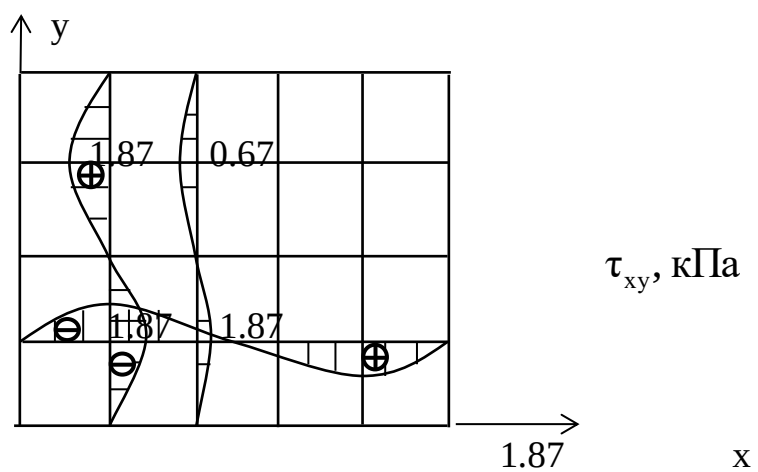
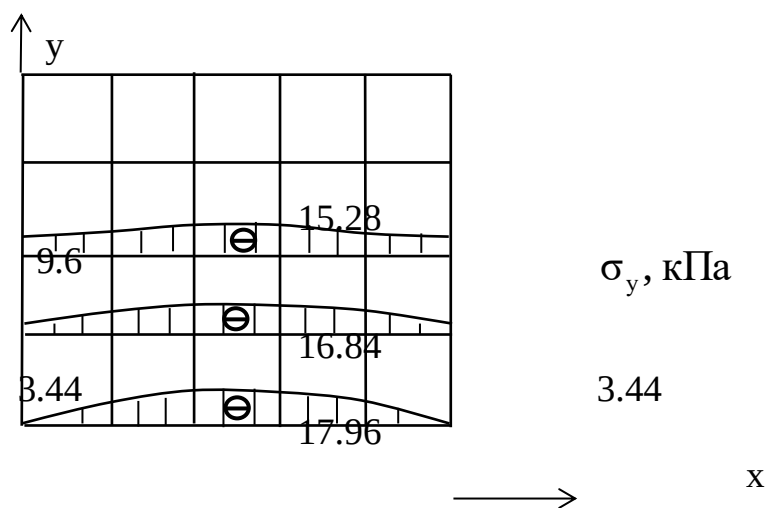
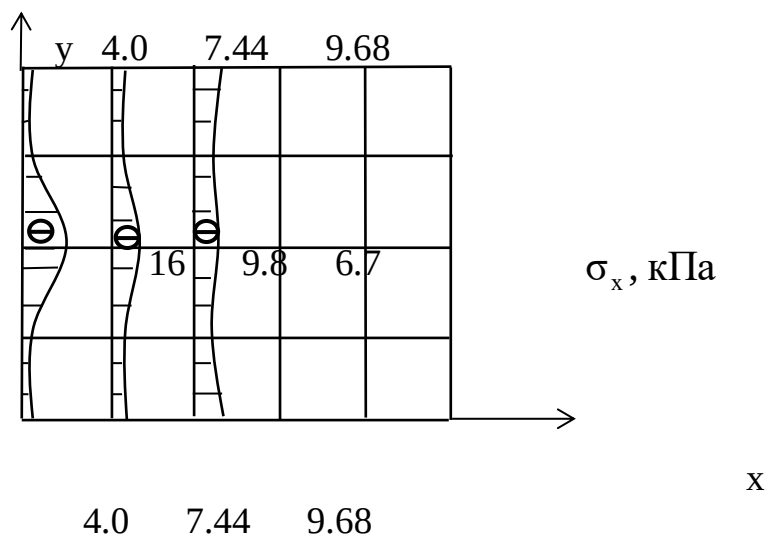


Рис. 7.15

ЛІТЕРАТУРА

1. Числові методи в опорі матеріалів та їх програмне забезпечення : навчальний посібник для студентів будівельних і механічних спеціальностей / Г.Т. Сулим, Л.І. Гурняк, В.З. Станкевич. - Луцьк : ЛДТУ, 2007. - 146 с.
2. Бігун Я.Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання : Навчальний посібник / Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича - Чернівці : Рута, 2005 - 80 с
3. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408 с.
4. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Навч. пос. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396с.
5. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. - К. : Видавнича група ВНУ, 2006 . - 480 с.
6. Ясинський В.К. Чисельні методи в інформатиці. – Чернівці: Вид-во „Прут”, 2003. – 308 с. (з грифом Міністерства освіти і науки України)
7. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в інформатиці й інформаційних технологіях економіки. – Чернівці: Вид-во "Прут", 2004. – 564 с.
8. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в моделюванні систем.- Чернівці: Золоті литаври, 2006.- 592 с.
9. Лабораторний практикум з дисципліни "Чисельні методи математики" для студентів спеціальностей 6.091501, 6.080401, 6.080402, 6.092401, 6.091503 / Черкаський держ. технологічний ун-т / Ю.В. Мітіхін (уклад.). — Черкаси : ЧДТУ, 2007. — 81с.
10. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., які навч. на напрямом "Інженерна механіка" / Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". — К. : НТУУ "КПІ", 2007. — 379с.
11. О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський Чисельні методи. Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2010. – 164с.
12. С.І.Федак. Методичний посібник з курсу «Математичні методи розрахунків у машинобудуванні» для фахової підготовки магістрів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»././ Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2023.– 52 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Тема 1. Теорія похибок в математичних методах	4
Тема 2. Чисельні методи розв'язання рівнянь та систем рівнянь	18
Тема 3. Апроксимація функцій	49
Тема 4. Задачі оптимізації	77
Тема 5. Теорія графів	98
Тема 6. Рівняння математичної фізики	105
Тема 7. Метод скінченних різниць	149
Література	163