

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

М.Р. Петрик, І.В. Бойко

**СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ
ПАРАМЕТРАМИ**
(лабораторний практикум
з використанням високопродуктивних технологій
комп'ютерної математики)

Навчальний посібник

Тернопіль 2024

УДК 519.62
М34

Укладачі:

Петрик М.Р., докт. фіз.-мат. наук, професор,

Бойко І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: Ясній Олег Петрович, доктор технічних наук, професор

Навчальний посібник розглянуто і затверджено на засіданні науково-методичної ради факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 02.09.2024 р.

Петрик М.Р., Бойко І.В. Системи з розподіленими параметрами
М34 (лабораторний практикум з використанням високопродуктивних технологій комп'ютерної математики)
– Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2024 – 62 с.

Даний посібник написано згідно програми дисциплін “Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях”, “Системи з розподіленими параметрами”, “Методологія та технологія створення складних програмних систем” та ін. з використанням підходів високопродуктивних обчислень, що читаються на кафедрі програмної інженерії факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії.

Для студентів спеціальності 121 – “Інженерія програмного забезпечення”, аспірантів та викладачів вищих навчальних закладів.

© Петрик М.Р., Бойко І.В.2024

© Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2024

Зміст

ЗМІСТ.....	3
РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ	4
РОЗДІЛ 2. РЕДУКЦІЯ ДО ЗАДАЧІ КОШІ	8
2.1. Метод стрільби.....	8
2.2. Метод варіації постійних.....	11
2.3. Диференціальна прогонка.....	12
ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ.....	18
РОЗДІЛ 3. РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД.....	20
3.1 Лінійна КЗ	20
3.2. Нелінійна КЗ.....	27
РОЗДІЛ 4. ІНТЕГРО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД.....	36
4.1. Консервативні РС.....	36
РОЗДІЛ 5. ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	43
5.1. Постановка задачі.....	43
5.2. Метод Рітца.....	46
5.3. Метод Гальоркіна.....	50
5.4. Метод скінченних елементів.....	54
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	61

1. ПОСТАНОВКА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

При заданні для ЗДР додаткових умов в одній точці маємо початкову задачу Коші. Наприклад, виділити на відрізку $[a, b]$ частковий розв'язок рівняння

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), a \leq x \leq b, \quad (1.1)$$

який задовільняє початкові умови $u(a) = u_0$, $u'(a) = u'_0$.

Однак в багатьох випадках як додаткові задаються граничні умови, які визначають значення невідомої функції і її похідних (або деяких виразів від них) при кількох фіксованих значеннях аргументу або й на усьому інтервалі визначення розв'язку. Задачу знаходження часткового розв'язку ДР, який задовольняє КУ, будемо називати КЗ.

Для рівняння (1.1) доточкові КУ мають вигляд

$$\varphi(u(a), u'(a)) = 0, \psi(u(b), u'(b)) = 0. \quad (1.2)$$

КУ можуть задаватись у формі нормування

$$\int_a^b u^2(x) dx = 1.$$

Лінійна КЗ записується у вигляді

$$u'' + p(x)u' + g(x)u = r(x), a \leq x \leq b. \quad (1.3)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \alpha_2 u(a) + \beta_2 u'(a) = \gamma_2, \quad (1.4)$$

$$|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

В умовах (1.2) і (1.4) передбачаються односторонні похідні. Якщо ввести функцію

$$K(x) = \exp \left(\int_0^x p(t) dt \right)$$

і врахувати, що

$$\frac{1}{K(x)} \frac{d}{dx} \left[K(x) \frac{du}{dx} \right] = u'' + p(x)u',$$

то відрівняння (1.3) перейдемо до рівняння

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \left[K(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = -f(x), \quad (1.5)$$

де

$$q(x) = -K(x)g(x), f(x) = -K(x)r(x).$$

Навпаки, якщо в (1.5) функція $K(x)$ диференційована, то від (1.5) просто перейти до (1.3). Але ряд практично важливих задач моделюється рівнянням вигляду (1.5), тому для нього будуть окремо розглянуті методи побудови наближеного розв'язку.

До КЗ для ЗДР зводяться різноманітні математичні і фізичні задачі. Ось деякі з них.

1. Задача про брахістохрону, тобто про криву, по якій матеріальна точка під дією сили тяжіння пройде із точки $A(x_1, y_1)$ в точку $B(x_2, y_2)$ у вертикальній площині за можливо коротший проміжок часу. Розв'язком цієї задачі є розв'язок КЗ

$$yy'' + 0.5(1 + y^2) = 0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2.$$

2. Задача визначення стану статичної рівноваги закріпленого в точках $x = 0$ і $x = l$ пружного стержня з коефіцієнтом пружності $K(x)$ під дією зовнішньої сили $f(x)$ зводиться до КЗ

$$(K(x)u')' = -f(x), \quad u(0) = u(l) = 0.$$

3. Розподіл тепла в стержні довжиною l у стаціонарному температурному режимі описується рівнянням (1.6), де

$$0 \leq x \leq l, \quad K(x) \geq K_0 > 0 - \text{коефіцієнт теплопровідності};$$

$f(x)$ – щільність внутрішніх джерел тепла;

$$q(x) \geq 0 - \text{коефіцієнт теплообміну з зовнішнім середовищем}.$$

Якщо на кінцях стержня підтримується постійна температура μ_1 і μ_2 , то маємо крайові умови першого роду

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2. \quad (1.6)$$

У разі задавання на кінцях стержня теплових потоків маємо КУ другого роду

$$-K(0) \frac{du}{dx}(0) = \mu_3, \quad K(l) \frac{du}{dx}(l) = \mu_4. \quad (1.7)$$

Якщо на кінцях стержня відбувається теплообмін за законом Ньютона, то задаються умови третього роду

$$-K(0) \frac{du}{dx}(0) + \beta_1 u(0) = \mu_5, \quad K(l) \frac{du}{dx}(l) + \beta_2 u(l) = \mu_6. \quad (1.8)$$

Питання існування і єдності розв'язку КЗ значно складніші порівняно з початковою задачею. Наприклад, легко перевірити, що задача

$$u'' = 0, 0 \leq x \leq \pi; u(0) - u(\pi) = 1, u'(0) + u'(\pi) = 0$$

не має розв'язку. Якщо ж замінити рівняння таким $u'' + u = 0$, то єдиний розв'язок $u(x) = 0.5 \cos x$. Для періодичної КЗ

$$u'' + u = 0, u(0) = u(\pi) = 0,$$

з множини розв'язків $u(x) = C \times \sin x$, де C – довільне число.

Якщо в рівняннях (1.3), (1.5) коефіцієнти неперервні і, крім того, $X(x) \in C^1[a, b]$, то під розв'язком розуміємо функцію $U(x) \in C^2[a, b]$, яка на

відрізку $[a, b]$ задовольняє рівняння, а при $x=a$ і $x=b$ – крайові умови. Такою ж функцією задається і розв’язок КЗ (1.1), (1.2).

У випадку $K(x) \in C$ або розриву функції $K(x)$ при $x = \xi \in (a, b)$ поняття розв’язку буде введено в § 4. Цей випадок характерний для задачі 2 і 3, коли стержень скомпонований із двох стержнів із різними значеннями K_1 і K_2 . У точці розриву $x=\xi$ накладаються при цьому умови спряження

$$[u]_{\xi} = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0, [w]_{\xi} = 0, \quad (1.9)$$

які забезпечують у точці $x = \xi$ неперервність розв’язку $U(x)$ і теплового потоку $W(x) = -K(x) U'(x)$.

Надалі передбачається, що виконані умови, за яких розв’язок КЗ і єдиний у деякому функціональному просторі.

2.РЕДУКЦІЯ ДО ЗАДАЧІ КОШІ

2.1.Метод стрільби

Даний метод полягає у зведенні КЗ до кількох задач Коші шляхом уточнення початкових значень. Розглянемо нелінійну КЗ

$$u' = f(x, u, v), v' = g(x, u, v), a \leq x \leq b, \quad (2.1)$$

$$\varphi(u(a), v(a)) = 0, \quad (2.2)$$

$$\psi(u(b), v(b)) = 0, \quad (2.3)$$

де f, g, φ, ψ —задані функції; a і b —відомі числа.

Нехай η — деяке наближене значення компоненти розв'язку $U(x)$ у точці $x=a$. Тоді умова (2.2) набуде вигляду $\varphi(\eta, v(a))=0$. З нього рівняння точно чи наближено визначається $v(a) = \xi(\eta)$. Застосуємо тепер один із числових методів розв'язування системи (2.1) з початковими умовами

$$u(a) = \eta, v(a) = \xi(\eta). \quad (2.4)$$

У результаті отримаємо значення $u(b, \eta), v(b, \eta)$ і перевіримо, наскільки точно задовольняється умова (2.3). Обчислимо нев'язку

$$\delta(\eta) = \psi[u(b, \eta), v(b, \eta)].$$

Тепер завдання полягає в уточненні η так, щоб величина нев'язки стала достатньо малою за модулем. Зауважимо, що ми маємо тільки числове значення $\delta(\eta)$, а не явну залежність функції ψ від η . Якщо відомо, наприклад, два значення η_{n-1} і η_n такі, що

$$\delta(\eta_{n-1}) \delta(\eta_n) < 0, \quad (2.5)$$

то можна застосувати метод хорд [5,7] і уточнити значення згідно з формулою

$$\eta_{n+1} = \eta_n - \frac{(\eta_n - \eta_{n-1})\delta(\eta_n)}{\delta(\eta_n) - \delta(\eta_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Методом січних рахунок також проводиться за формулою (2.6), однак виконання умови (2.5) при ньому не вимагається. Застосування методу Ньютона для цього випадку розглядається [7].

Таким чином, кожне уточнення початкових умов $u(a), v(a)$ зводиться до розв'язування задачі Коші (2.1), (2.4), аналізу незв'язки $\delta(\eta)$ й уточнення η , якщо точність для $\delta(\eta)$ не задовольняється. Якщо ж точність початкових умов досягнута, то розв'язок КЗ отримується як розв'язок задачі Коші з цими початковими умовами.

Лінійну КЗ

$$\begin{aligned} u' &= a_1(x)u + b_1(x)v + f_1(x) \\ v' &= a_2(x)u + b_2(x)v + f_2(x), \quad a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 v(a) &= \gamma_1 \alpha_2 u(b) + \beta_2 v(b) = \gamma_2, \\ |\alpha_i| + |\beta_i| &\neq 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

можна звести до трьох задач Коші.

Нехай $u(a) = \eta$, тоді $v(a, \eta) = (\gamma_1 - \alpha_1 \eta) / \beta_1$ (якщо $\beta_1 = 0$, то покладемо $v(a) = \eta$). В міру лінійності задачі функції $u(x, \eta)$ і $v(x, \eta)$ лінійно залежать від η . Обчислимо нев'язку

$$\delta(\eta) = \alpha_2 u(b, \eta) + \beta_2 v(b, \eta) - \gamma_2,$$

яка також лінійно залежить від η . Тому функція $\delta(\eta)$ визначається за двома різними значеннями η_1 і η_2 , після чого обчислюється початкове значення η згідно з (2.6).

Підсумок такий. Необхідно одним із числових методів розв'язати дві задачі Коші з початковими умовами $(\eta_1, v(a, \eta_1)), (\eta_2, v(a, \eta_2))$ і знайти $\eta = u(a)$, $v(a, \eta) = (\gamma_1 - \alpha_1 \eta) / \beta_1$. Розв'язавши ще одну задачу Коші, обчислимо наближений розв'язок задачі (2.7), (2.8).

Зауваження. Метод стрільби добре працює у випадку, коли розв'язок "не надто сильно" залежить від η .

Розглянемо приклад

$$\begin{aligned} u'' a^2 u &= 0, 0 \leq x \leq 1, a = \text{const} > 0 \\ u(0) &= \mu_0, u(1) = \mu_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Розв'язок цієї задачі

$$u(x) = \frac{l^{-ax} - l^{a(2-x)}}{l^{-2a} - 1} \mu_0 + \frac{l^{-a(1-x)} - l^{-a(1+x)}}{1 - l^{-2a}} \mu_1.$$

Коефіцієнти при μ_0 і μ_1 додатні й не перевищують одиниці. Тому похибка величиною ε в КУ призводить до похибки, яка не перевищує 2ε у розв'язку.

Розглянемо тепер рівняння (2.9) з початковими умовами $u(0) = \mu_0, u'(0) = tg \alpha$, яке має розв'язок

$$a(x) = \frac{a\mu_0 + tg \alpha}{2a} l^{ax} + \frac{au_0 - tg \alpha}{2a} l^{-ax}.$$

Якщо внести похибку ε в початкову умову $tg\alpha$, то $прих=l$ похибка розв'язку набуває значення

$$\Delta u(1) = \frac{\varepsilon}{2a} l^a - \frac{\varepsilon}{2a} l^{-a}.$$

При великих значеннях α ця похибка стає великою, тому сам метод неприйнятний, оскільки спричиняє втрату точності.

2.2. Метод варіації постійних

Розв'язок ДР (2.7) будується у вигляді

$$u(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

$$v(x) = v_0(x) + C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x),$$

де $u_0(x)$, $v_0(x)$ – розв'язок (2.7) з однорідними КУ $u_0(a)=v_0(a) = 0$, а $(u_i(x), v_i(x))$, $i=1,2,\dots$ – розв'язки однорідної системи ($f_1 = f_2 \equiv 0$) з КУ

$$u_1(a) = 1, v_1(a) = 0, u_2(a) = 0, v_2(a) = 1,$$

Тепер, користуючись умовами (2.8) для постійних C_1 і C_2 , отримаємо СЛАР

$$\alpha_1 u_1(a) C_1 + \beta_2 u_1(b) C_2 = \gamma_1, \quad (2.10)$$

$$(\alpha_2 u_1(b) + \beta_2 v_1(b)) C_1 + (\alpha_2 u_2(b) + \beta_2 v_2(b)) C_2 = \gamma_2.$$

Описаний метод застосовується тільки до лінійних систем і при його реалізації можлива втрата точності. Наприклад, коли $u_1(x)$ набуває невеликі значення, а $u_2(x)$ швидко зростає, то навіть малі похибки в C_1 викликають великі похибки в розв'язку $u(x)$.

2.3. Диференціальна прогонка

Цей метод передбачає "прогонку" точкових крайових умов з одного кінця відрізка в іншій безпосередньо для ДР. Порівняно з попередніми двома методами задача Коші тут розв'язується для спеціально побудованих ДР. Тому для даного методу не характерна втрата точності наближеного розв'язку з причин поганої обумовленості задачі Коші для вихідного ДР. Розглянемо КЗ

$$u'' + p(x)u' + g(x)u = r(x), a \leq x \leq b, \quad (2.11)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1. \quad (2.12)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1, 2 \quad (2.13)$$

Ідея методу полягає в наступному. Загальний розв'язок ДР (2.11) має вигляд

$$u(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

де $u_0(x)$ – розв'язок неоднорідного, $u_1(x)$ і $u_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного ДР. Якщо розв'язком $u(x)$ задовольнити КУ (2.12), то отримаємо одно параметричне сімейство функцій, залежне, наприклад, від C_1

$$u(x) = \psi(x) + C_1 \varphi(x). \quad (2.13'')$$

Це сімейство можна розглядати як розв'язок деякого лінійного рівняння першого порядку

$$u' + \alpha(x)u = \beta(x). \quad (2.14)$$

Для знаходження функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ потрібно розв'язати систему ДР з початковими умовами в точці $x=a$ (прямий хід). Після цього обчислюється розв'язок ДР (2.14) з початковою умовою в точці $x=b$, який і є розв'язком КЗ (2.11)– (2.13) (обернений хід).

Опишемо метод детальніше. Із (2.14) знаходимо

$$u' = -\alpha(x)u + \beta(x), u'' = \beta'(x) - \alpha'(x)u - \alpha(x)\beta(x) + \alpha^2 u.$$

Підставляємо u, u' і u'' в ДР (2.14). Отримаємо

$$\beta' + \rho\beta - \alpha\beta - u[\alpha' - \alpha^2 + \alpha\rho - g] = r. \quad (2.15)$$

Остання рівність має виконуватися для довільного $x \in (a, b)$ і для всіх розв'язків ДР (2.14), які можуть набувати довільних значень. Це означає, що рівність (2.15) тотожно реалізується відносно u . Таким чином, маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha^2 + \alpha\rho(x) = q(x); \\ \beta' + \rho(x)\beta - \alpha\beta &= f(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Початкові умови визначимо із (2.14) при $x=a$ і (2.12)

$$u'(a) + \alpha(a)u(a) = \beta(a), \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1.$$

Виключивши $u'(a)$, будемо мати

$$(\alpha_1 - \beta_1\alpha(a))u(a) + \beta_1\beta(a) - \gamma_1 = 0.$$

Рівність має виконуватись для $\forall u(a)$, тому

$$\alpha_1 - \beta_1\alpha(a) = 0, \beta_1\beta(a) - \gamma_1 = 0.$$

Звідси отримаємо початкові умови

$$\alpha(a) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \beta(a) = \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \text{ якщо } \beta_1 \neq 0. \quad (2.17)$$

Розв'язавши початкові задачі (2.16), (2.17), знаходимо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.
У точці $x = b$ маємо

$$u'(b) + \alpha(b)u(b) = \beta(b), \quad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2.$$

Звідси знаходимо

$$u(b) = (\gamma_2 - \beta_2 \beta(b)) / \Delta \quad (2.18)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha(\beta) \\ \beta & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \beta \alpha(\beta).$$

Підсумок:

1. Пряма прогонка. Знаходимо функції $\alpha(x), \beta(x)$, розв'язуючи початкову задачу (2.16), (2.17).

2. Обернена прогонка. Розв'язавши задачу (2.14), (2.18), отримаємо розв'язок КЗ (2.11) – (2.13). Якщо $\Delta = 0$, то СЛАР для визначення $u(b)$ і $u'(b)$, а разом з нею і вихідна КЗ або не має розв'язків, або має нескінченну множину розв'язків.

Теорема 4. Для того, щоб метод прогонки, якщо починати з точки $x = a$ і якщо $\beta_1 \neq 0$, був застосований до КЗ (2.11) – (2.13), необхідно і досить виконання умов:

1. Розв'язок задачі Коші

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0, z(a) = 1, z'(a) = -\alpha_1/\beta_1$$

не перетворюється в нуль для довільного $x \in [a, b]$.

2. Визначник $\Delta = \alpha_2 - \beta \alpha(\beta) \neq 0$.

Грунтовний опис методу диференціальної прогонки і його порівняння з іншими методами можна знайти в [4, 13].

Зауваження:

1. Якщо в умові (2.12) $\beta_1 = 0$, то за початкову точку вибирається $x=b$.
2. Якщо початкові задачі (2.16), (2.17) і (2.14), (2.18) розв'язані точно, то отримуємо точний розв'язок КЗ (2.11) – (2.13).
3. При числовому розв'язуванні початкової задачі потрібно крок сітки τ узгодити з кроком сітки h КЗ, наприклад, $\tau = h$. Для аналізу точності розв'язку за правилом Рунне (див. формули (3.10)) можна покласти $\tau = 0.5h$ або $\tau = h/l, i \in N, l > 1$.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$u'' + (x + 1)u' - 2u = 2, 0 \leq x \leq 1, \quad (2.19)$$

$$u(0) - u'(0) = -1, \quad u(1) = 4. \quad (2.20)$$

Рівняння (2.19) можна записати як систему

$$\text{з КУ } u' = v, v' = 2u - (x + 1)v + 2$$

$$u(0) - v(0) = -1, \quad u(1) = 4.$$

1. За методом стрільби задано початкові умови $u_1(0) = 1, v_1(0) = 2$ і $u_2(0) = -2, v_2(0) = -1$. Для розв'язування задач Коші використовувався метод Ейлера з кроком $h = 0.01$. Значення постійної $C = 0.0017$. Наближене значення розв'язку $u_c(X_K), X_K = 0.1 K, \overline{0,10}$ наведене в таблиці.

2. За методом варіації постійних розв'язано три задачі Коші:

$$u_0'' + (x + 1)u_0' - 2u_0 = 2, u_0(0) = u_0'(0) = 0;$$

$$u_1'' + (x + 1)u_1' - 2u_1 = 0, u_1(0) = 1, u_1'(0) = 0;$$

$$u_2'' + (x + 1)u_2' - 2u_2 = 0, u_2(0) = 0, u_2'(0) = 1.$$

Система для знаходження C_1 і C_2 має вигляд

$$C_1 - C_2 = 1.0000.$$

$$1.7395 C_1 + 0.7543 C_2 = 3.2605.$$

Звідси $C_1 = 1.005, C_2 = 2.005$. Розв'язок задачі знаходимо за формулою

$$u_b(x_K) = u_0(x_K) + 1.005 u_1(x_K) + 2.005 u_2(x_K)$$

і наведений в табл.1. Задачі Коші розв'язувалися методом Ейлера з кроком 0.01.

Таблиця1

X_K	Метод стрільби			Метод варіації постійних			
	$u_1(X_K)$	$u_2(X_K)$	$u_c(X_K)$	$u_0(X_K)$	$u_1(X_K)$	$u_2(X_K)$	
0.0	1.0000	-2.0000	1.0050	0.0000	1.0000	0.0000	1.0050
0.1	1.2090	-2.1045	1.2145	0.0088	1.0088	0.0957	1.2145
0.2	1.4380	-2.2190	1.4441	0.0360	1.0358	0.1832	1.4442
0.3	1.6869	-2.3435	1.6936	0.0794	1.0794	0.2641	1.6936
0.4	1.9558	-2.4779	1.9632	0.1379	1.1379	0.3400	1.9643
0.5	2.2446	-2.6223	2.2528	0.2101	1.2101	0.4123	2.2527
0.6	2.5534	-2.7767	2.5623	0.2947	1.2947	0.4820	2.5623
0.7	2.8821	-2.9410	2.8918	0.3907	1.3907	0.5503	2.8913
0.8	3.2307	-3.1153	3.2413	0.4973	1.4973	0.6180	3.2451
0.9	3.5991	-3.2996	3.6100	0.6138	1.6138	0.6858	3.6108
1.0	3.9875	-3.4938	4.0000	0.7395	1.7395	0.7543	4.0000

3.Методом диференціальної прогонки при виконанні прямого ходу розв'язані задачі Коші

$$\alpha' - \alpha^2 + (x + 1)\alpha = -2, \alpha(0) = -1$$

$$\beta' + (x + 1)\beta - \alpha\beta = 2, \beta(0) = 1.$$

Використовуючи $\alpha(X_K)$ і $\beta(X_K)$, знаходимо розв'язок задачі Коші

$$u' + \alpha(x)u = \beta(x), u(1) = 4,$$

який і є розв'язком КЗ (2.19),(2.20).

Результати обчислень представлені в таблиці 2.

Таблиця2

X_K	Метод диференціальної прогонки			Точний розв'язок
	$\alpha(X_K)$	$\beta(X_K)$	$u_n(X_K)$	$u(X_K)$
0.0	1.0000	1.0000	1.0052	0.9952
0.1	0.9958	0.9958	1.2147	1.2047
0.2	0.9841	0.9841	1.4443	1.4344
0.3	0.9671	0.9671	1.6939	1.6839
0.4	0.9465	0.9465	1.9634	1.9534
0.5	0.9235	0.9235	2.2529	2.2429
0.6	0.8992	0.8992	2.5623	2.5524
0.7	0.8743	0.8743	2.8918	2.8818
0.8	0.8492	0.8492	3.2411	3.2312
0.9	0.8244	0.82440	3.6104	3.5999
1.0	0.8001	.8001	4.0000	4.0000

При прямій прогонці використовувався метод Ейлера з кроком 0.01, а при оберненій– з кроком 0.1.

Завдання для практичної і самостійної роботи

1. Розглянути застосування методу стрільби для розв'язування КЗ

$$u'' = f(x, u, u') \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 ; u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_2.$$

2. Вивести формули методу Ньютона при застосуванні методу стрільби для розв'язування нелінійної КЗ

$$u'' = f(x, u), 0 \leq x \leq 1; u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_1.$$

3. Застосувати метод варіації постійних до КЗ (2.11) – (2.13).
4. Застосувати метод диференціальної прогонки до КЗ (2.7), (2.8).
5. Розробити метод диференціальної прогонки для КЗ (2.11) – (2.13) у випадку $\alpha_1 = 0$.
6. Виписати функції $\varphi(0)$ і $\psi(0)$ в представленні (2.13) для розв'язку $u(x)$.

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. Скласти програму моделювання руху маятника, що являє собою матеріальну точку маси m , закріплену на кінці невагомому стержню довжиною l . Рівняння руху

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0, g = 9.8 \text{ м/сек}^2, l = 1.$$

Варіанти "крайових умов":

$$1.1 \theta(0) = \pi/4, \dot{\theta}(1) = 1;$$

$$1.2 \dot{\theta}(0) = 1, \dot{\theta}(1) = 0;$$

$$1.3 \theta(0) = \pi/8, \theta(1) = \pi/4.$$

2. На рівномірній сітці з кроком $h = 0.05 K$, $K = 1.2$ методом стрільби обчислити наближений розв'язок КЗ. Початкові умови уточнити так, щоб нев'язка КУ була менша за абсолютною величиною $0.01 m$, $m =$

1.5.Отримані результати порівняти з точним розв'язком. Вихідні дані наведено в таблицях 3–4.

Таблиця 3

№	Система ДР чи ДР	Точний розв'язок
1	$u' = u^2/(v-x), v' = u+1$	$u = e^x, v = x + e^x$
2	$u' = u^2 v, v' = v/x - uv^2$	$u = \exp(0.5 x^2), v = x \exp(-0.5 x^2)$
3	$2vu' = u^2 - v^2 + 1, v' = u + v$	$u = -0.75 - 0.25x^2, v = 0.25(x+1)^2 + 1$
4	$u' = x/v, v' = -x/u$	$u = \exp(x^2), v = 0.5 \exp(-x^2)$
5	$uu'' + u'^2 = u'$	$u = \sqrt{x^2 + 1}$
6	$x^2 uu'' = (u - xu')^2$	$u = x \exp(-2/x^2)$
7	$xu'' + u'^2 = u'$	$u = \ln(x^2 - 1)$
8	$(1 + x^2)u'' + u'^2 + 1 = 0$	$u = 2 \ln(x+1) - x + 1$
9	$x^3 u'' - x^2 u'^2 + 2xu u' - u^2 = 0$	$u = x \ln(x/(1+x))$
10	$xuu'' + xu'^2 - uu' = 0$	$u = \sqrt{x^2 + 1}$
11	$x^2(uu'' + u'^2) - u^2 = 0$	$u = \sqrt{(2x^3 - 1)/x}$
12	$2uu' + u'' = 0$	$u = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$
13	$xu'' - u' = 3/x^2$	$u = x^2 + x^{-1} - 1$

Таблиця 4

№	a	B	КУ, варіант 1		КУ, варіант 2	
			$x = a$	$x = b$	$x = a$	$x = b$
1	0	1	$u^2 + v^2 = 2$	$u = e$	$u = 1$	$v - u = 1$
2	1	2	$u' = \sqrt{e}$	$uv = 2$	$uv = 1$	$u = e^2$
3	0	1	$u + v = 0.5$	$u = -1$	$u - v = -2$	$u + v = 1$
4	0	1	$u = 1$	$u + v$	$v = 0.5$	$uv = 0.5$
5	0	1	$u' = 0$	$= e + (2e)^{-1}$	$u + u' = 1$	$u^2 = 2$
6	1	2	$u = e^{-2}$	$u = \sqrt{2}$	$\ln u = -2$	$u^2 = 4e^{-1}$

7	2	3	$u = \ln 3$	$u' = 1.5 e^{-0.5}$	$u + u' = \ln 3 + \frac{4}{3}$	$u = 3 \ln 2$
8	0	1	$u = 1$	$u' = 0.75$		$u = 1$
9	0.5	1	$u = -0.5 \ln 3$	$u' = 0$	$u' + u = 2$	$u = -\ln 2$
10	0	1	$u' = 0$	$u' = 0.5 - \ln 2$	$u - 0.5u' = 1/3$	$u' = 1/\sqrt{2}$
11	1	2	$u = 1$	$u = \sqrt{2}$	$u - u' = 1$	$u = \sqrt{7.5}$
12	0	1	$u = 0$	$u = \sqrt{7.5}$	$u' = 2.5$	$u = (e^2 - 1)/(e^2 + 1)$
13	1	2	$u = 1$	$u = (e^2 - 1)/(e^2 + 1)$	$u' = 1$	$3u - 2u' = 3$
				$u' = 3.75$	$u = u'$	

3. РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД

3.1. Лінійна КЗ

Розглянемо КЗ для лінійного ДР другого порядку

$$u'' + p(x)u' + g(x)u = r(x), a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

$$u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \quad (3.2)$$

Задамо на відрізку $[a, b]$ рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_h = \{x_n, x_n = a + nh, n = \overline{0, N}, h = (b - a)/N\}$$

крок сітки. Позначимо $u_n = u(x_n)$; $u_h = u_h(x)$ —сіткова функція, визначена на $\bar{\omega}_h$. Нехай $\|u_h\|$ —деяка норма сіткової функції. Наприклад, $\|u_h\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |u_n|$.

Апроксимуємо похідні u' і u'' у вузлі $x_n, n = \overline{1, N-1}$ різницевиими відношеннями

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + \psi_n^{(1)}, u''_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \psi_n^{(2)}, \quad (3.3)$$

де $\psi_n^{(1)}, \psi_n^{(2)}$ – похибки апроксимації. Якщо розв’язок $u \in C[a, b]$, то ці похибки мають другий порядок апроксимації і на точному розв’язку $u_h(x)$. Дійсно ,

$$\psi_n^{(1)} = u'_n - (u_{n+1} - u_{n-1})/2h = u'_n - \frac{1}{2h} \left(u_n + u'_n h + u''_n \frac{h^2}{2} + \tilde{u}'''_n \frac{h^3}{6} - u_n + u'_n h - u''_n \frac{h^2}{2} + \tilde{\tilde{u}}'''_n \frac{h^3}{6} \right) = - \frac{h^2}{12} (\tilde{u}'''_n + \tilde{\tilde{u}}'''_n) = - \frac{h^2}{6} \bar{u}'''_n,$$

де $\tilde{u}'''_n, \tilde{\tilde{u}}'''_n, \bar{u}'''_n$ – значення похідної в середніх точках.

Аналогічно, здійснивши розклад за формулою Тейлора до похідних четвертого порядку, отримаємо

$$\psi_n^{(2)} = - \frac{h^2}{12} \bar{u}^{iv}_n.$$

Ігноруючи ці похибки при заміні похідних у внутрішніх вузлах рівневими відношеннями, отримаємо РС

$$\begin{aligned} (L_h y_h)_n &\equiv \frac{1}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + n \frac{p_n}{2h} (y_{n+1} - y_{n-1}) + g_n y_n = r_n, \\ n &= \overline{1, N-1}; \\ y_0 &= \mu_1, y_N = \mu_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Покладемо $z_n = y_n - u_n$, звідки $y_n = z_n + u_n$. Підставимо y_n в (3.4). Тоді для похибки z_n отримаємо рівняння

$$(L_h z_h)_n = r_n - (L_h u_h)_n \equiv \psi_n.$$

Величина ψ_n називається похибкою апроксимації РС на точному розв’язку u_n в точці x_n .

Врахувавши вирази для похибок $\psi_n^{(1)}$ і $\psi_n^{(2)}$, отримаємо

$$\psi_n = r_n - (L_h u_h)_n - (r - u'' - pu' - gu)_n + \frac{h^2}{6} \bar{u}_n''' + \frac{h^2}{12} u_n^{-iv} = \frac{1}{12} (2 u_n^{-'''} + u_n^{-iv}) h^2.$$

Тобто $\|\psi_h\|_C = O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$, що означає другий порядок апроксимації РС. Зауважимо, що крайові умови (3.2) апроксимуються точно.

Обчислення розв'язку $y_n, n = \overline{1, N-1}$ в РС проводиться таким чином. Перепишемо рівняння (3.4), помноживши його на h^2 у вигляді

$$\left(1 - \frac{h}{2} p_n\right) y_{n-1} - (2 - h^2 g_n) y_n + \left(1 + \frac{h}{2} p_n\right) y_{n+1} = h^2 r_n \quad (3.5)$$

$$n = \overline{1, N-1}; y_0 = \mu_1, \mu_2.$$

Система (3.5) в СЛАР з тридіагональною матрицею. Справедлива теорема.

Теорема 1. Нехай крок сітки настільки малий, що

$$h \max |p(x)| < 2, \quad x \in [a, b], \quad g(x) \leq 0, \quad x \in [a, b],$$

тоді СЛАР 3.5 має єдиний розв'язок.

Доведення. Із умови випливає, що $1 \mp 0.5 h p_n \geq 0 \quad n \in \overline{1, N-1}$. Тому матриця СЛАР 3.5 є тридіагональною з домінуючою діагоналлю, що дає підстави стверджувати про існування єдиного розв'язку [3,5,7].

Ефективним методом розв'язування системи (3.5) є метод прогонки [2-3]. На відміну від диференціальної прогонки за даним методом

проганяються КУ для різницьових рівнянь. Випишемо алгоритм методу для системи різницьових рівнянь з тридіагональною матрицею.

$$a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n, n = \overline{1, N-1}; y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2. (3.6)$$

Передбачається, що матриця системи є матрицею з домінуючою головною діагоналлю, тобто $|b_n| > |a_n| + |c_n|$.

Прямий підхід. Обчислюємо прогоночні коефіцієнти :

$$\alpha_{n+1} = (2 - h^2 g_n) / S_n, \beta_{n+1} = (\alpha_n \beta_n - h^2 r_n) / S_n,$$

$$S_n = 1 - \alpha_n + \frac{h}{2} p_n (1 + \alpha_n), n = \overline{1, N-1}.$$

Обернений хід. Обчислюємо розв'язок

$$y_N = \mu_2, y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, j = N-1, \dots, 1; y_0 = \mu_1.$$

З'ясуємо питання збіжності РС(3.4) , тобто покажемо, що із $h \rightarrow 0$ випливає $\|u_h - y_h\| \rightarrow 0$. Цей теоретичний результат означає на практиці, що при достатньо малому кроці сітки $\overline{\omega}_h$ відповідній точності обчислень можна досягти заданої точності наближеного розв'язку y_h . Якщо $\|y_h - u_h\| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$, то число p – точність.

Теорема 2. Нехай для $x \in [a, b]$ виконуються нерівності $h|p(x)| \leq 2$, $g(x) < 0$.

Тоді РС 3.4 – збіжна в нормі $\|\cdot\|_C$ і має другий порядок точності.

Доведення. Покладемо $z_h = u_h - y_h$ – похибка розв'язку y_h . Для z_h маємо рівняння

$$L_h z_h = L_h u_h - L_h y_h = (h_h + \psi_h) - f_h = \psi_h,$$

або в горизонтальному вигляді

$$h^{-2}(z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1}) + p_n(2h)^{-1}(z_{n+1} - z_{n-1}) + g_n z_n = \psi_n.$$

Перетворимо цю рівність таким чином:

$$-(2 - h^2 g_n)z_n = -\left(1 - \frac{h}{2}p_n\right)z_{n-1} - \left(1 + \frac{h}{2}p_n\right)z_{n+1} + h^2\psi_n.$$

Знайдеться n_0 , $1 \leq n_0 \leq N-1$, таке що $|z_{n_0}| = \|z_{n_h}\| > 0$, бо інакше $u_h \equiv u_h$. Нагадаємо, що $z_0 = z_N = 0$. Якщо виконані умови теореми, то

$$(2 - h^2 g_{n_0})|z_{n_0}| \leq \left(1 - \frac{h}{2}p_{n_0-1}\right)|z_{n_0-1}| + \left(1 + \frac{h}{2}p_{n_0+1}\right)|z_{n_0+1}| + h^2|\psi_{n_0}|.$$

$$\text{Звідси } -h^2 g_{n_0}|z_{n_0}| \leq h^2|\psi_{n_0}|.$$

Враховуючи, що $-g_{n_0} > 0$, отримаємо

$$|z_{n_0}| \leq g_{n_0}^{-1}|\psi_{n_0}| \leq CMh^2 = C_1 h^2, \quad C = \max_{[a,b]} g(x),$$

де

$$C_1 = cM, \quad M = \frac{1}{12} \max_{[a,b]} (2|u_n'''(x)| + |u^{iv}(x)|). \quad (3.7)$$

Тобто РС(3.5) збіжна і має другий порядок точності.

Як правило, значення константи M невідоме, тому для обчислення похибки, хоч і наближеного значення, використовується значення розв'язку РС у спільних вузлах сіток ω_{h_1} і ω_{h_2} . Нехай $h_2 < h_1$, $h_2 = lh_1$, $l > 1$ – ціле число. Припустимо, що РС збіжна з точністю t і має місце представлення

$$u_i = y_i^{(1)} + \alpha(x_i)h_1^m + O(h_1^{m+1}), \quad x_i \in \omega_{h_1}. \quad (3.8)$$

У точці $x_i \in \omega_{h_1} \cap \omega_{h_2} = \omega$

$$u_i = y_i^{(2)} + \alpha(x_i)h_2^m + O(h_2^{m+1}) \quad (3.9)$$

Ігноруючи величину порядку, з рівностей (3.8) і (3.9) отримаємо

$$\alpha(x_i) \approx (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) / (h_1^m - h_2^m), x_i \in \omega.$$

Тепер, знаючи, можна обчислити абсолютну і відносну похибки

$$\Delta y_i = u_i - y_i^{(2)} \approx \alpha(x_i) h_2^m; \delta y_i = \frac{\Delta y_i}{y_i^{(2)}}, y_i^{(2)} \neq 0, x_i \in \omega. \quad (3.10)$$

Уточнити розв'язок можна за формулою

$$\tilde{y}_i = (1 - \sigma) y_i^{(1)} + \sigma y_i^{(2)}, \sigma = h_1^m / (h_1^m - h_2^m), x_i \in \omega.$$

Дійсно, $\alpha(x_i)((1 - \delta)y_i^m + \sigma h_2^m) = 0$, тому\

$$u_i \approx \tilde{y}_i = (1 - \sigma) y_i^{(1)} + \sigma y_i^{(2)} + O(h_1^{m+1} + h_2^{m+1}).$$

Часто використовуються сітки з поділом кроку навпіл, тоді

$$\alpha(x_i) h_2^m = (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) \frac{h_2^m}{2^m h_2^m h_2^m} = \frac{1}{2^{m-1}} (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}), x_i \in \omega_{h_1},$$

а уточнений розв'язок

$$\tilde{y}_i = y_i^{(2)} + \frac{1}{2^{m-1}} (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}).$$

Поряд з оцінкою похибки розв'язку розрахункової моделі задачі необхідно прораховувати похибку машинної реалізації і відповідність довжини мантиси машинного слова числу обумовленості матриці, про що свідчать результати в табл.5. Подальше подрібнення сітки до $h = 0.0001$ з теоретичної точки зору повинно покращувати результат, оскільки РС зберігається при $h \rightarrow 0$, а практично в результаті похибки машинної реалізації відносна похибка зросла до 19,3 % .

Розглянемо крайову задачу [6].

$$u'' = -225000 \sin 150x, 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0) = 0, u(1) = -7.148764 \quad (3.11)$$

Точний розв'язок задачі $u(x) = 10 \sin 150x$. У відповідність задачі (3.11) покладено РС

$$(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) / h^2 = -225000 \sin(150nh),$$

$$n = \overline{1, N-1}; y(0) = y_0 = 0, y(1) = y_N = -7.148764.$$

Результат рахунку для різних кроків, відносну похибку(ВП) і відносну похибку, обчислену згідно з формулою (3.10), представлені в табл. 5.

Таблиця 5

Вузол	Точний розв'язок	Наближений розв'язок			
		$h = 0.1$	ВП, %	$h = 0.01$	ВП, %
0.2	-9.880316	-541.767871	5382.40	-11.660847	18.02
0.4	-3.048106	-3.048106	387.50	-3.088708	1.33
0.6	8.939967	8.939967	9313.30	-11.725256	31.10
0.8	5.806112	5.806112	12442.50	8.232043	41.70

Вузол	Наближений розв'язок			
	$h = 0.001$	ВП, %	$h = 0.01$	ВП, %
0.2	-9.884363	0.04	-11.346133	1483
0.4	-3.021734	0.86	-3.635863	19.30
0.6	9.987585	0.53	8.757722	2.03
0.8	5.806112	0.38	5.449222	0.14

У цьому прикладі тільки при $h = 0.001$ досягається висока точність. Подальше зменшення кроку до 0.001 призводить до падіння точності, хоч в міру збіжності мав би бути кращий результат. Справа в тому, що зменшення кроку призводить до зростання обчислювальної похибки при обчисленні на ЕОМ, оскільки операції виконуються зі скінченною кількістю знаків.

Апроксимація КУ третього роду

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \mu_1, \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \mu_2, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$$

визначається способом зміни похідної u' різницеvими відношеннями.

Покладемо

$$u'_0 \approx \frac{u_1 - u_0}{h}, u'_N \approx \frac{u_N - u_{N-1}}{h}.$$

Тоді похибка апроксимації КУ, а тим самим і РС, має перший порядок. При цьому матриця системи (3.5), доповнена рівняннями, які апроксимують крайові умови,

$$(\alpha_1 h - \beta_1)u_0 + \beta_1 u_1 = \mu_1 h, -\beta_2 u_{N-1} + (\beta_2 + \alpha_2 h)u_N = \mu_2 h$$

залишається тридіагональною.

Підвищити порядок РС на 1 можна за допомогою формул числового диференціювання

$$u'_0 = (2h)^{-1}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) + O(h^2), -u'_N = (2h)^{-1}(-3u_N + 4u_{N-1} - u_{N-2}) + O(h^2),$$

що призводить до лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} (2\alpha_1 h - 3\beta_1)u_0 + 4\beta_1 u_1 - \beta_1 u_2 &= 2h\mu_1, \\ (2\alpha_2 h - 3\beta_2)u_N + 4\beta_2 u_{N-1} - \beta_2 u_{N-2} &= 2h\mu_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Зауважимо, що рівності (3.12) порушують тридіагональність матриці СЛАР. Випишемо перші рівняння систем (3.12) і (3.5).

$$(2\alpha_1 h - 3\beta_1)u_0 + 4\beta_1 u_1 - \beta_1 u_2 = 2h\mu_1.$$

$$(1 - 0.5 h p_1)u_0 - (2 - h^2 g_1)u_1 + (1 + 0.5 p_1)u_2 = h^2 r_1.$$

Нехай $\beta_1 \neq 0$ або $1 + 0.5 h p_1 \neq 0$. Виключивши u_2 одного із цих рівнянь і, аналогічно, u_N із останніх двох рівнянь, отримаємо СЛАР із тридіагональною матрицею порядку $N+1$.

3.2. Нелінійна КЗ.

Розглянемо КЗ виду

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a \leq x \leq b; \quad u(a) = \mu_1, \quad u(b) = \mu_2. \quad (3.13)$$

Використавши апроксимації (3.3), отримаємо РС

$$\frac{1}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) = f(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}), \quad (3.14)$$

$$n = \overline{1, N-1}; y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2.$$

РС (3.14) нелінійна, якщо функція $f(x, u, u')$ нелінійна по u або u' . Нехай

$u \in C^4[a, b]$ і похідна $f_x(x, u, z)$ обмежена. Обчислимо похибку апроксимації РС(3.14).

Маємо

$$\begin{aligned}\psi_n &= -\frac{1}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - f\left(x_n, u_n, \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right) \\ &= \left[-\frac{1}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, u_n, u'_n)\right] \\ &\quad + [f(x_n, u_n, u'_n)] = \frac{h^2}{12}\tilde{u}_n^{iv} + f_{u'}(x_n, u_n, \tilde{u}'_n)\frac{h^2}{6}\tilde{u}_n'''\end{aligned}$$

Отже, $|\psi_n| \leq C h^2$, де $C > 0$ і не залежить від h , тобто РС (3.14) має 2-ий порядок апроксимації.

Припустимо, що $f = f(x, u)$. Має місце

Теорема 3. Нехай: 1) $u \in C^4[a, b]$;

$$2) f_u(x, u) \geq m > 0.$$

Тоді РС (3.14) збіжна і має точність 2 в нормі $\|\cdot\|_C$.

Доведення. Потрібно показати, що

$$\|z_h\| = \|y_h - u_n\| = \max_{0 \leq n \leq N} |y_h - u_n| = O(h^2) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Підставивши $y_n = u_n + z_n$ в РС

$$\frac{1}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) = f(x_n, y_n), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (3.15)$$

$$y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2,$$

отримаємо

$$z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1} = -\frac{h^4}{12}\tilde{u}_n^{iv} + \tilde{f}_u z_n h^4$$

або

$$z_{n-1} - (2 + h^2 \tilde{f}_u)z_n + z_{n+1} = -\frac{h^4}{12}\tilde{u}_n^{iv}, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.16)$$

В міру умови 2 теореми 3 $2 + h^2 \tilde{f}_u > 2$. Тому матриця СЛАР (3.16) тридіагональна з домінуючою діагоналлю. Завершення доведення теореми аналогічне, як у теоремі 2 п.3.1.

Щоб розв'язати систему нелінійних рівнянь (3.15), застосовуємо метод Ньютона. Нехай відоме деяке наближення розв'язку $y_n^{(k)}, n = \overline{1, N-1}, k = 0, 1, \dots$. Представимо точний розв'язок, яку $y_n = y_n^{(k)} + \Delta n, n = \overline{1, N-1}$. Припустимо, що виконана умова 2 теореми 3. Тоді

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, y_n^{(k)}) + f_u(x_n, y_n^{(k)}) \Delta n + O(|\Delta n|).$$

Відкинувши доданок $O(|\Delta n|)$ і підставивши значення $f(x_n, y_n)$ в (3.15), отримаємо СЛАР з тридіагональною матрицею для визначення наближеного значення Δ_n , яке позначимо через $\Delta_n^{(k)}$. Маємо

$$\Delta_{n-1}^{(k)} - \left[2 + h^2 f_u(x_n, y_n^{(k)}) \right] \Delta_n^{(k)} + \Delta_{n+1}^{(k)} = g_n^{(k)}, \quad (3.17)$$

$$n = \overline{1, N-1}; \Delta_0^{(k)} = \Delta_N^{(k)} = 0,$$

де

$$g_n = h^2 f(x_n, y_n^{(k)}) - (y_{n-1}^{(k)} - 2y_n^{(k)} + y_{n+1}^{(k)}).$$

В міру умови 2 теореми 3 системи (3.17) з домінуючою головною діагоналлю розв'язок можна обчислити методом прогонки.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$u'' = 3u + 10u^3 + x^2, 0 \leq x \leq 1; u(0) = u(1) = 0.$$

На сітці ω_n система рівнянь (3.15) має вигляд

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2(3y_n + 10y_n^3 + n^2 h^2),$$

$$n = \overline{1, N-1}; y_0 = y_N = 0.$$

У матричній формі $Ay = F(y)$, де A – матриця порядку $N-1$, F – вектор виду

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 0 & & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, (y) = h^2 \begin{bmatrix} 3y_1 + 10y_1^3 + h^2 \\ 3y_2 + 10y_2^3 + 4h^2 \\ \dots \dots \dots \\ 3y_n + 10y_{N-1}^3 + (N-1)^2 h^2 \end{bmatrix}.$$

При застосуванні методу Ньютона система (3.17) в матричній формі буде мати вигляд

$$[A + F_u(y^{(k)})]\Delta^{(k)} = -Ay^{(k)} + F(y^{(k)}), \quad (3.18)$$

$$k = 0, 1, \dots; \Delta^{(k)} = \text{col}(\Delta_1^{(k)}, \dots, \Delta_{N-1}^{(k)}),$$

Матриця Якобі $F_u(y^{(k)})$ – діагональна, оскільки i -та компонента вектора $F(y^{(k)})$ залежить тільки від $y_i^{(k)}$.

Таким чином, k -та ітерація методу Ньютона полягає ось у чому:

- 1) розв'язати СЛАР (3.18);
- 2) покласти $y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta^{(k)}$.

Результати, обчислені за початковим вектором $y^{(a)} = 0$, наведено в табл.6. Значення подані у вузлах сітки $x_n = 0.1n$, $n = \overline{1,9}$ кроком $h = 0.1; 0.01; 0.001$. Ітерації зупинялись, якщо координати вектора $\Delta^{(k)}$ ставали меншими за модулем, ніж 10^{-6} .

Таблиця 6

x_k	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0.1	-0.0058	-0.0058	-0.0058
0.2	-0.0116	-0.0118	-0.0118
0.3	-0.0174	-0.0176	-0.0176
0.4	-0.0223	-0.0230	-0.0230
0.5	-0.0274	-0.0276	-0.0276
0.6	-0.0302	-0.0304	-0.0304
0.7	-0.0303	-0.0305	-0.0305
0.8	-0.0265	-0.0266	-0.0266
0.9	-0.0170	-0.0171	-0.0171

Завдання для практичної і самостійної роботи

Побудувати РС другого порядку для таких КЗ :

$$1. u^{iv}(x) = f(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0) = \mu_1, -u'(0) = \nu_1, u(l) = \mu_2, u'_2(l) = \nu_2. \quad (3.19)$$

2. $u'' - u = -f(x), 0 \leq x \leq 1;$
 $u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$

3. ДР (3.19) з КУ $u(0) = a, \int_0^1 u(x) dx = b.$

Запропонувати метод розв'язування СЛАР.\

4. $u'' = -f(x), u(0) = a, u(1) = b$

на нерівномірній сітці методом невизначених коефіцієнтів

$$\begin{array}{c} x_{n-1} \text{---} \text{---} \text{---} x_{n+1} \\ \qquad \qquad \qquad h_n \qquad \qquad h_{n+1} \end{array}$$

5. $u^{iv} + p(x)u'' + q(x)u = f(x), 0 \leq x \leq 1,$
 $u(0) = u'(0) = 0, u(1) = u'(1) = 0.$

Побудувати РС четвертого порядку для КЗ.

6. $u'' + u = \sin x, u(0) = u(1) = 0.$

Використати шаблон $\begin{array}{c} h \quad h \quad h \quad h \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ n-2 \quad n-1 \quad n \quad n+1 \quad n+2 \end{array}$

7. $u'' - u = \cos x, 0 \leq x \leq \pi; u'(0) = 0, u(\pi) = 1.$

8. $u^{iv} = f(x), 0 \leq x \leq 1; u(0) = \alpha_0, u'(0) = \alpha_1, u(1) = \beta_0, u'(1) = \beta_1.$

9. При яких α, β, γ РС

$$h^{-2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \alpha y_{n+1} + \beta y_n + \gamma y_{n-1} = f_n + h^2 f_n''/12,$$

$$n = \overline{1, N-1}; y_0 = y_N = 0$$

апроксимує рівняння (3.19) з КУ з четвертим порядком.

10. Відомо, що розв'язок КЗ $u'' + (2(x+2))^{-1}u' - u = -\sqrt{x+2}$,
 $0 \leq x \leq 1; u'(0) = 1/(2\sqrt{2}), u(1) = \sqrt{2}$;

задовольняє умови.

$u \in C^4[0,1], |u''(x)| \leq 0.5, |u'''(x)| \leq 0.25, |u^{iv}(x)| \leq 0.375$. Записати РС
 другого порядку, яка апроксимує ДЗ, при якому значенні кроку похибка
 апроксимації ≤ 0.02 .

11. Дослідити збіжність розв'язку РС

$$h^{-2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + (1 + nh)y_n = (nh)^3 - nh - 2, n = \overline{1, N-1}$$

до розв'язку ДЗ $u'' + (1+x)u = x^3 - x - 2, 0 \leq x \leq 1; u(0) = u(1) = 0$.

12. Дослідити збіжність розв'язку РС

$$h^{-2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) = (1 + nh)^{-2}, n = \overline{1, N-1}$$

до розв'язку ДЗ $u'' = (1+x)^{-2}, x \in [0,1]; u'(0) = 1, u(1) = \ln 2$.

Виписати систему різницьових рівнянь і відповідну матрицю Якобі для
 ДР.

$$13. u'' = u + u^2.$$

$$14. u'' = xu^3.$$

15. Побудувати матрицю Якобі для рівняння, яке виникає в задачі про
 дифузії $(x^2 u')' = e u x^2 / (u + d), e \rightarrow 0, d > 0$.

16. Для двоточнової КЗ

$$u'' = e^u + 2 - e^{-x^2}, 0 \leq x \leq 1; u(0)=0, u(1)=1.$$

Виписати в матрично-векторній формі РС.

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. Різницеvim методом з використанням методу прогонки обчислити розв'язок КЗ у вузлах сітки $\bar{\omega}, h = (b - a)/10$ з точністю $\varepsilon = 0.32$.

Порівняти отриманий результат з точним розв'язком.

Таблиця 7

Варіант	ДР	Точний розв'язок
1	$(2x+1)u'' + 4xu' - 4u = -2xe^{-x} - 3e^{-x}$	$u = x + 0.5e^{-2x} + e^{-x}$
2	$x^2(x+1)u'' - 2u = 2x^3 + x$	$u = 1 - x + x^2 - x^{-1}$
3	$xu'' - (2x+1)u' + (x+1)u = x^2$	$u = x^2e^x + x + 1$
4	$xu'' + 2u' - xu = 2 - x^2$	$u = (e^{-x} + e^x)/x + x$
5	$u'' - 2(1 + \tan^2 x)u = 2(x^2 - 1)/\cos^2 x$	$u = \tan x = x^2 + 1$
6	$x(x-1)u'' - xu' + u = 1 - 2/x^2$	$u = 1 + 2x + x^{-1}$
7	$(e^x + 1)u'' - 2u' - 2xu = e^{-x}(3 - 2x) - 4$	$u = e^x + e^{-x} + 2x - 1$
8	$x^2u'' \ln x - xu' + u = x^2(1 - 2 \ln x)$	$u = 1 + x - x^2 + \ln x$
9	$u'' - u' \tan x = 2u = 1 + 1/\cos x$	$u = \sin x + \cos x + 1$
10	$(x^2 - 1)u'' + (x - 3)u' - u = e^{0.5x}(x^2 + 2x - 1)$	$u = x - 3 + 4e^{0.5x} + (x + 1)^{-1}$
11	$xu'' - (x+1)u' - 2(x-1)u = e^x(1 - 2x) + 1 - x + 2x^2$	$u = e^{2x} + e^x - x$
12	$u'' + 4xu' + (4x+2)u = 4x^3 + 4x^2 + 6x + 2$	$u = (1+x)e^{-x} + x + 1$

13	$xu'' - (2x-1)u' + 2u = (1-x)e^x$	$u = 2x + 1 + e^x - e^{-2x}$
14	$x(2x+1)u'' + 2(x+1)u' - 2u = 16x^3 + 12x^2$	$u = x^3 + 2x + 2 + x^{-1}$
15	$x(x+4)u'' - (2x+4)u' + 2u = 2(x-2)/x^2$	$u = 2 + x + x^2 + x^{-1}$
16	$x(x^2+6)u'' - 4(x^2+3)u' - 6xu = -12(1+2/x^2)$	$u = 2 + x^2 + x^3 + x^{-1}$
17	$(x^2+1)u'' - 2u = -\frac{x^2+1}{(x+1)^2} - 2\ln(x+1)$	$u = x^2 + 1 + \ln(x+1)$
18	$2x(x+2)u'' + (2-x)u' + u = 6(x+1)/x^2$	$u = \sqrt{x} + x - 2 + x^{-1}$
19	$x^2u'' - 4xu' + 6u = 3.75\sqrt{x}$	$u = x^3 - x^2 + \sqrt{x}$
20	$x^2u'' - 3xu' + 3u = 8/x$	$u = x^3 - x + 1/x$
21	$x^2u'' - 3xu' + 4u = 9/x$	$u = 1 - x^3 + 1/x$
22	$xu'' + 2u' + xu = 2 + x^2$	$u = x + \sin x/x$
23	$u'' + \left(\frac{2}{x}\right)u' + u = 1/x$	$u = \frac{\sin x}{x} + 1/x$
24	$x^2u'' - xu' - 3u = 5x^4$	$u = x^4 - x^3 + 1/x$
25	$x(-1+x)u'' - (2x-1)u' + 2u = x^2(2x-3)$	$u = 2x - 1 - x^2 + x^3$

Таблица 8

Варіант	a	b	Перша КЗ		Третя КЗ					
			M_1	M_2	α_1	β_1	γ_1	α_2	β_2	γ_2
1	0	1	1.5	1.4355	0	1	-1	1	1	$2 - 1/(2e^2)$
2	1	2	2	3.5	2	-1	4	0	1	2.75
3	1	2	$e+2$	$4e^2 + 3$	2	-1	$3-e$	0	1	$8e^2 + 1$
4	1	2	4.086 2	7.7257	0	1	-1	1	-2	$2e^{-2}$
5	0	1	1	tg1	0	1	1	0	1	$tg^2 1 - 1$
6	2	4	5.5	9.25	1	-2	2	0	1	1.9375
7	0	1	1	4.08616	1	1	3	0	1	$2 + e + e^{-1}$
8	1	2	1	ln2-1	1	1	1	0	1	-2.5

9	0	0.78 54	2	1.42411	2	-1	3	0	1	0
10	0	0.5	2	3.30282	1	-2	0	0	1	$0.5556 + 2\sqrt[4]{e}$
11	1	2	9.107 34	59.9871 6	2	-1		0	1	$e^4 + e^2 - 1$
12	0	1	2	2	0	1	2	3	2	8
13	1	2	5.582 95	5.58295	2	1		1	-1	$3(1 - e^{-4})$
14	1	2	6	6	1	-2	-2	-1	1	1.25
15	1	2	5	5	2	-2	1	0	1	4.75
16	1	2	3	3	0	1	6	3	-2	8
17	0	1	1	1	1	1	2	0	1	2.5
18	1	4	1	1	1	1	1.5	0	1	1.8175
19	1	2	1	1	1	1	2.5	1	0	$6 + \sqrt{2}$
20	1	2	1	6.5	2	1	3	0	1	10.75
21	1	2	1	-6.5	1	1	-3	-2	1	0.75
22	0.78 54	1.570 8	1.6857 2	4.7123	1	0		1		$4\pi^{-1}$
23	0.78 54	1.57 08	2.173 56	$4\pi^{-2}$		0		1	1	0.46267
24	1	2	1	8.5	1	2	2	-2	1	2.75
25	2	4	7	55	2	-1	4	1	1	13

2. Побудувати РС і обчислити числовий розв'язок задач 1.1 – 1.3 із §2 і КЗ, наведених нижче. Крок сітки $h = (a - b)/N$.

Отриманий результат порівняти з точним розв'язком.

- $u'' = 2u^3, 0 \leq x \leq 0.5; u(0) = 1, u(0.5) = 2; u(x) = (1 - x)^{-1}$.
- $2u'' = 3u^2, -2 \leq x \leq 0; u(-2) = 1, u(0) = 0.25; u(x) = 4/(x + 4)^2$.
- $u^3 u'' = -1, 1 \leq x \leq 2; u(1) = 1, u(2) = 0; u(x) = \sqrt{2x - x^2}$.
- $u'' = e^x(x^2 e^x + x + 2) - u^2 - 1, 0 \leq x \leq 1, u(x) = x e^x$.
- $u'' = \frac{u^2}{x^3}, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 0, u(2) = 2 \ln 2, u(x) = x \ln x$.

4. ІНТЕГРО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД

В математичній фізиці математичні моделі будують, виходячи із фізичних законів збереження. РС, для яких виконуються закони збереження на сітці, називаються консервативними (КРС). Таким схемам для широких класів властиві апроксимація, стійкість і збіжність.

4.1. Консервативні РС

Розглянемо побудову КРС для КЗ виду

$$(K(x)u')' - q(x)u = -f(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (4.1)$$

$$u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_2. \quad (4.2)$$

Крім того, нехай $K(x) \geq x_0 > 0$.

РС можна будувати шляхом апроксимації і теплового потоку $w(x) = -K(x)u'(x)$ і похідної $w'(x)$. При такому підході можна розглядати, наприклад, такі різницеві схеми:

$$\frac{1}{h} \left(K_{n+\frac{1}{2}} y_{x_1 n} - K_{n-\frac{1}{2}} y_{\bar{x}_1 n} \right) - q_{x_1} y_n = -f_n \quad (4.3)$$

$$\text{Або } \frac{1}{h} \left[\frac{K_{n+1} + K_n}{2} y_{x_1 n} - \frac{K_n + K_{n-1}}{2} y_{\bar{x}_1 n} \right] - q_n y_n = -f_n$$
$$n = \overline{1, N-1}; y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2; \quad (4.4)$$

$$\text{Тут } y_{x_1 n} = \frac{1}{h} (y_{n+1} - y_n), y_{\bar{x}_1 n} = \frac{1}{h} (y_n - y_{n-1}), K_{n \pm 1/2} = K \left(X_n \pm \frac{h}{2} \right).$$

Зокрема, при $K = \text{const}$, маємо РС типу (3.5). Якщо розв'язок $u \in C^4$, то РС (4.3), (4.4) мають другий порядок і збіжні [2]. Але для розривної функції $K(x)$ ці РС можуть бути розбіжними. Розглянемо КЗ

$$(Ku')' = 0, 0 \leq x \leq 1; u(0) = 1, u(1) = 0, \quad (4.5)$$

де графік функції $K(x)$ зображений на рис.1.

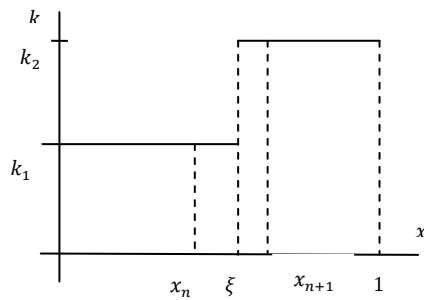


Рис.1.

Тут $\xi = x_n + \theta h$ – ірраціональне число,

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad x_n = nh, \quad h = 1/N.$$

Зауважмо, що довільного

$$n = \overline{0, N}, \quad x_n \neq \xi.$$

Точний розв'язок крайової задачі (4.5) має вигляд

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 \leq x \leq \xi; \\ \beta_0(1 - x), & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\text{де } \alpha_0 = (\kappa + (1 - \kappa)\xi)^{-1}, \beta_0 = \kappa\alpha_0, \text{ де } \kappa = k_1/k_2. \quad (4.6)$$

Просто перевірити, що умови узгодження (1.9) для розв'язку виконані.

Подано рівняння (4.5) у вигляді $Ku'' + K'x' = 0$. Природно для отримання РС другого порядку здійснити таку апроксимацію

$$u_n'' \approx \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2}, \quad K_n' \approx \frac{K_{n+1} - K_{n-1}}{2h}, \quad u_n' \approx \frac{(u_{n+1} - u_{n-1}))}{2h}. \quad (4.7)$$

В результаті будемо мати РС

$$k_n \frac{(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}))}{h^2} + \frac{(K_{n+1} - K_{n-1}))}{2h} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = 0$$

$$n = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = 1, \quad y_N = 0.$$

У 2, п.3, р.2 показано, що збіжність РС (4.8) приймає місце тільки при $\kappa = \frac{K_1}{K_2} = 1$. Тобто, у випадку розриву функції $K(x)$ при $\kappa \neq 1$ РС (4.8) розбіжна. Фізична причина розбіжності РС полягає в тому, що вона порушує закон збереження тепла, що спричиняє появу в т.ч. ξ додаткового джерела при

$$\gamma = \kappa - \frac{3+\kappa}{5-\kappa} \frac{5\kappa-1}{3\kappa+1} < 1$$

додаткового стоку тепла при $\gamma > 0$ [2].

Для побудови РС задачі (4.1), (4.2) інтегро-інтерполяційним методом проінтегруємо рівняння (4.1) на відрізку $[X_{n-\frac{1}{2}}, X_{n+\frac{1}{2}}]$ (рис.2)

$$\int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} (K(x)u')' dx - \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx = - \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} f(x) dx. \quad (4.9)$$

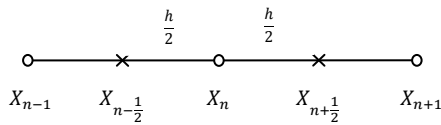


Рис. 2 .

Після інтегрування отримаємо

$$W_{n-\frac{1}{2}} - W_{n+\frac{1}{2}} + h \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} f(x) dx = \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx. \quad (4.10)$$

Перші два доданки визначають кількість тепла, що надходить і відходить з відрізка $[X_{n-\frac{1}{2}}, X_{n+\frac{1}{2}}]$ відповідно. Інтеграл у лівій частині задає кількість тепла, що виділяється джерелами зі щільністю розподілу $f(x)$. Інтеграл у правій частині описує теплообмін між зовнішнім середовищем і поверхнею стержня.

Застосуємо формулу прямокутників

$$W_{n-\frac{1}{2}} - W_{n+\frac{1}{2}} + h\varphi_n \approx h_{u_n} d_n, \quad (4.11)$$

$$\text{де } \varphi_n = \frac{1}{h} \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} f(x) dx = \int_{-0.5}^{0.5} f(x_n + th) dt,$$

$$d_n = \frac{1}{h} \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} q(x) dx = \int_{-0.5}^{0.5} q(x_n + th) dt.$$

Для обчислення величин $W_{n-\frac{1}{2}}$ і $W_{n+\frac{1}{2}}$ проінтегруємо рівність

$$u' = -W/K. \text{ Отримаємо } u_n - u_{n-1} = - \int_{X_{n-1}}^{X_n} \frac{W(x)}{K(x)} dx \approx W_{n-\frac{1}{2}} \int_{X_{n-1}}^{X_n} dx / K(x), \quad (4.12)$$

звідки $W_{n-\frac{1}{2}} \approx - \frac{u_n - u_{n-1}}{h} a_n = -a_n u_{\bar{x},n},$

де

$$a_n = \left[\frac{1}{h} \int_{X_{n-1}}^{X_n} \frac{dx}{K(x)} \right]^{-1} = \left[\int_{-1}^0 \frac{dt}{K(x_n + th)} \right]^{-1}. \quad (4.12)$$

Аналогічно

$$W_{n+1} \approx -a_{n+1} u_{x,n}, \quad a_{n+1} = \left[\int_0^1 (dt)/K(x_n + th) \right]^{-1}. \quad (4.13)$$

В міру (4.10) і враховуючи (4.12), (4.13), отримаємо РС

$$\frac{1}{h} \left[a_{n+1} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - a_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right] - d_n y_n = -\varphi_n,$$

або

$$\frac{1}{h} [a_{n+1} y_{x,n} - a_n y_{\bar{x},n}] - d_n y_n = -\varphi_n, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad y_0 = \mu_1, y_{N0} = \mu_2. \quad (4.14)$$

Кожне із рівнянь (4.14) виражає різницевий аналог закону збереження для електричної комірки $[X_{n-\frac{1}{2}}, X_{n+\frac{1}{2}}]$

$$\bar{W}_{n-\frac{1}{2}} - \bar{W}_{n+\frac{1}{2}} - d_n h y_n = -\varphi_n h, \quad \bar{W}_{n+\frac{1}{2}} = -a_{n+1} y_{x,n}. \quad (4.15)$$

Просумувавши (4.15) по всіх комірках, отримаємо інтегральний закон збереження

$$\bar{W}_{y_2} - \bar{W}_{N/\frac{1}{2}} + \sum_{m=1}^{N-1} h \varphi_n = \sum_{m=1}^{N-1} h d_n y_n.$$

Остання рівність означає, що РС (4.14) є КРС.

Коротко зупинимося на похибці апроксимації РС (4.14), допускаючи, що $f, q \in C^2, K \in C^3$.

Зрозуміло, що при цьому $u \in C^4$. Похибка апроксимації має вигляд

$$\Psi_n = -\varphi_n - \frac{1}{h}(a_{n+1}u_{x,n} - a_n u_{\bar{x},n}) + d_n u_n = (f_n - \varphi_n) - \left[\frac{1}{h}(a_{n+1}u_{x,n} - a_n u_{\bar{x},n}) - (Ku')'n \right] (d_n - q_n)u_n.$$

Використовуючи вирази для φ_n, d_n і похибки апроксимації формули прямокутників

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f(x)dx - hf(x_n) = \frac{h^3}{24}f''(\tilde{x});$$

доходимо висновку, що $f_n - \varphi_n = O(h^2), d_n - q_n = O(h^2)$.

Якщо у вираз, записаний у квадратних дужках, підставити розклад за формулою Тейлора функції $u(x)$ при $x_n \pm h$

$$u_{n\pm 1} = u_n \pm hu'_n + \frac{h^2}{2}u''_n \pm \frac{h^3}{2}u'''_n + O(h^4), \text{ то отримаємо вираз}$$

$$\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{h} - K'_n \right) u'_n + \left(\frac{a_{n+1}-a_n}{2} - k_n \right) u''_n + \frac{h(a_{n+1}-a_n)}{6} u'''_n + O(h^2).$$

Для того, щоб отриманий вираз був величиною $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$ достатньо виконання умови

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{h} = K'_n + O(h^2). \quad (4.16)$$

Покладемо $\zeta(x) = 1/K(x)$. Тоді, згідно з (4.12),

$$a_n^{-1} = \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \zeta(x)dx = \zeta_{n-\frac{1}{2}} + h^2/24,$$

звідки

$$a_n = K_{n-\frac{1}{2}}(1 + \frac{h^2}{24}\zeta''_{n-\frac{1}{2}}K_{n-\frac{1}{2}} + O(h^4))^{-1} = K_{n-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}K_n^2\zeta_n^2 + O(h^3). \quad (4.17)$$

Аналогічно

$$a_{n+1} = k_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}K_n^2\zeta_n'' + O(h^3). \quad (4.18)$$

з формул (4.17) і (4.18) вже просто отримуються умови (4.16).

Таким чином, РС (4.14) має другий порядок. Детальніше про апроксимацію ДР (4.1) і КУ третього роду можна прочитати в [3, ч.3, гл. 1].

Похибка апроксимації у випадку негладких коефіцієнтів ДР (4.1) отримана [2, гл.3]. Зауважимо тільки, що в цьому випадку вона не вище першого порядку.

Що стосується збіжності РС(4.14), то в [2, ч.3, гл.1, §3] для гладких коефіцієнтів $(x), q(x), f(x)$ доведена збіжність при $h \rightarrow 0$ з другим порядком, так що виконується оцінка $\|y_h - u_h\|_c \leq Mh^2$, де $M > 0$ постійна, незалежна від h . На класі розривних коефіцієнтів [2] збіжність досліджується і показано, що швидкість збіжності $O(h)$ при $h \rightarrow 0$.

Завдання для практичної і самостійної роботи

1. Обчислити похибку апроксимації РС (4.14) у випадку $K = \text{const}$.
2. Побудувати апроксимацію КУ.

$$-K(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1. \quad (4.19)$$

Скориставшись КУ інтегро-інтерполяційним методом для ДР (4.1) на відрізьку $[0; 0.5h]$.

3. Показати, що при достатньо гладких коефіцієнтах $K(x), q(x), f(x)$ різницеве рівняння $-a_1 y_{x,0} + \bar{\beta} y_0 = \bar{\mu}_1$.

$$\bar{\beta} = \beta + 0.5hd_0, \quad \bar{\mu} = \mu + 0.5 h\varphi_0,$$

апроксимує КУ (4.19) з другим доданком.

4. Виписати СЛАР для обчислення наближеного розв'язку $K3(Ku')' = 0, u(0) = \mu_1, \mu(1) = \mu_2$, функція задана на рис.4.

Розглянути випадки: а) $\xi \neq X_n \forall n$; б) $\xi = X_n$ для деякого $n, 1 \leq n \leq N - 1$.

5. Показати, що умови (4.16) задовольняють функції:

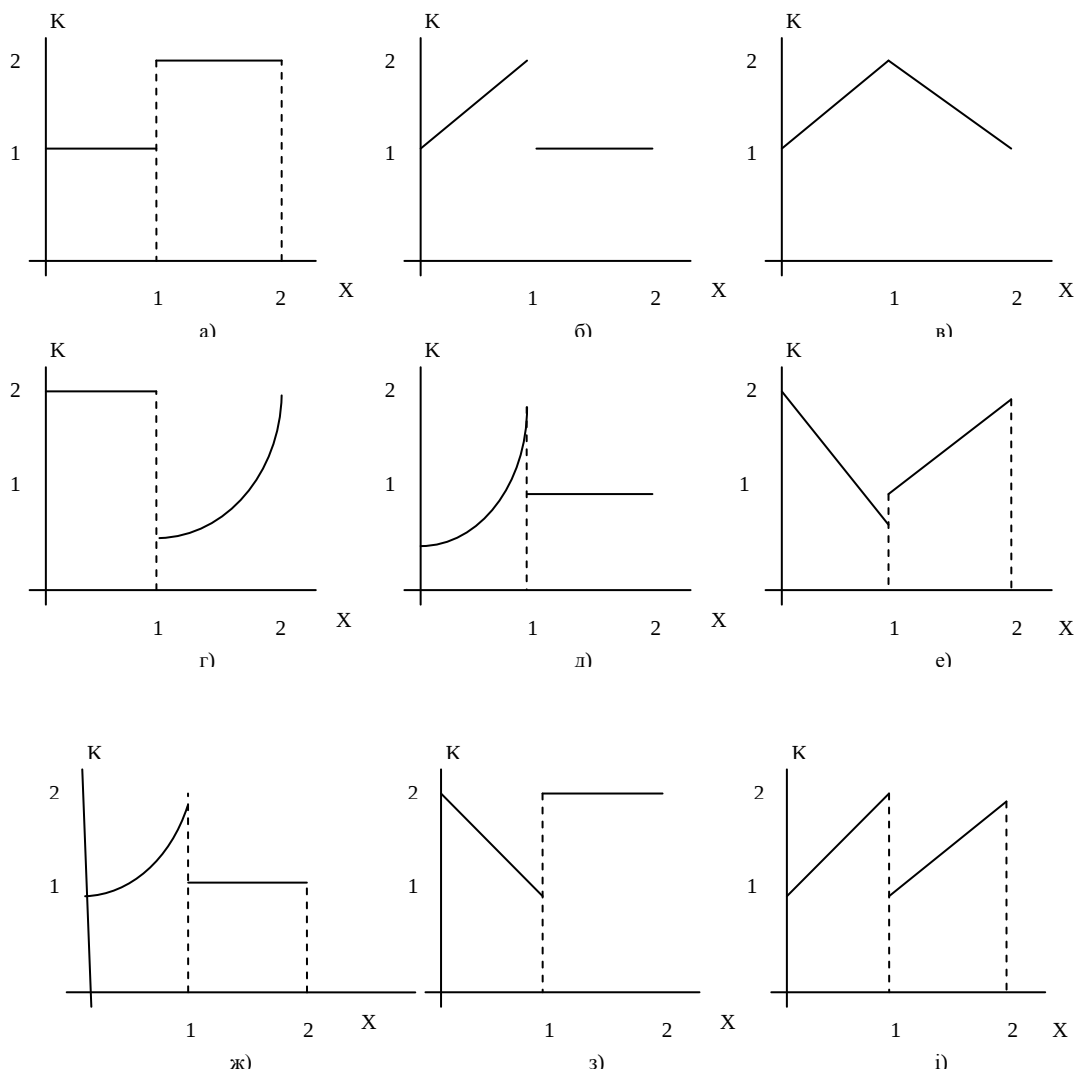
$$1) a_n = 0.5(K_n + K_{n-1}); \quad 2) a_n = K(K_n - 0.5h);$$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Інтегро-інтерполяційним методом із кроком обчислити наближений результат КЗ.

$$(K(x)u')' - u = -1, 0 \leq x \leq 2; u(0) = u(2) = 0.$$

Функція $K(x)$ задана на рис.3. Проаналізувати збіжність РС, обчисливши розв'язок на сітці з кроком $h/2$, $h/4$ або побудувати точний розв'язок КЗ і порівняти його на сітці з наближеним розв'язком.



5. ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

5.1. Постановка задачі

Для наближеного розв'язання КЗ поряд із різницевими широко застосовуються проекційні методи. Найпопулярніші серед них – метод Рітци, Гельоркіна, скінченних елементів (МСЕ).

Ідея проекційних методів ґрунтується на переході від даного рівняння до апроксимуючого рівняння на підпросторі. Апроксимуюче рівняння, як правило, будується так, щоб його розв'язок (проекція точного розв'язку на підпросторі) був розв'язком скінченної системи скалярних рівнянь [6,14].

Проекційні методи будемо застосовувати не безпосередньо до КЗ, а до рівносильних їм варіаційних задач. Під варіаційною розуміється задача мінімізації деякого функціонала на певному класі функцій.

Побудуємо спочатку варіаційну задачу для рівняння загального вигляду

$$A_u = f, \quad f \in H, \quad (5.1)$$

де H – цілісний гільбертів простір; A – лінійний оператор з областю визначення D_A , щільною в H .

Лінійний оператор A називається симетричним, якщо для $\forall u, v \in D_A$ має місце рівність $(A_u, v) = (u, A_v)$, де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в H . Симетричний оператор додатний ($A > 0$), якщо $\forall u, v \in D_A \quad (A_u, u) \geq 0$, причому $(A_u, u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u = 0$.

Теорема 1. Якщо в рівнянні (5.1) оператор, то рівняння має не більше одного розв'язку.

Доведення. Нехай u_1, u_2 – два розв'язки (5.1), $u_1 \neq u_2$.

Тоді $A_{u_1} - A_{u_2} = A(u_1 - u_2) = 0$. Домножимо скалярну отриману тотожність на $u_1 - u_2$, отримаємо $(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0$.

Оскільки $A > 0$, то $u_1 - u_2 \equiv 0$, звідси $u_1 \equiv u_2$, що суперечить допущеному.

Для рівняння (5.1) відповідна варіаційна задача має вигляд

$$\min_{u \in D_A} F(u), F(u) = (A_u, u) - 2(f, u). \quad (5.2)$$

Теорема 2. [14]. Нехай u_0 – розв’язок рівняння (5.1).

Тоді на елементі u_0 досягається мінімум функціонала $F(u)$. Навпаки, елементи $u_0 \in D_A$, який реалізує мінімум функціоналу $F(u)$, задовольняє рівняння (5.1).

Застосуємо теорему 2 до КЗ

$$Lu \equiv -(K(x)u')' + q(x)u = f(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (5.3)$$

$$u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_2. \quad (5.4)$$

Припустимо, що: а) $q, f \in L_2[0,1] = L_2$, $K(x) \in W_2^1[0,1] = W_2^1$, де W_2^1 – простір функцій, визначених на $[0,1]$, які мають першу похідну з нормою

$$\|u\|_1^2 = \int_0^1 [(u(x)')^2 + u^2(x)] dx;$$

$$0 < K_0 \leq K(x) \leq C_1, 0 \leq q(x) \leq C_2, x \in [0,1],$$

де C_1, C_2, K_0 – додатні числа.

Зауважимо, що $W_2^1 \subset L$. Крім того, для кращого сприймання матеріалу можна вважати, що $K(x)$ – кусково-диференційована функція, $q(x)$ і $f(x)$ кусково неперервні на $[0,1]$. При виконанні умов а) і б) існує єдиний розв’язок КЗ (5.3), (5.4) і він належить простору W_2^2 [14]. Тут W_2^2 – простір функцій, які мають другу похідну з нормою

$$\|u\|_2^2 = \int_0^1 [(u'')^2 + (u'')^2 + u^2] dx.$$

Нулик над W_0 означає, що функція задовольняє КУ (5.4). Зауважимо, що має місце вкладання $W_2^2 \subset W_2^1 \subset L_2$.

Покажемо, що оператор L в (5.3) симетричний і додатний.

Дійсно, враховуючи, що в просторі $L_2[0,1]$ скалярний добуток визначається рівністю

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \text{ для } u, v \in W_2^2 \text{ маємо}$$

$$(Lu, v) = \int_0^1 [-(K(x)u')' + q(x)u]v dx = -(K(x)u')|_0^1 + \int_0^1 [k(x)u'v' + q(x)uv] dx = \int_0^1 (K(x)u'v' + q(x)uv) dx \equiv a(u, v). \quad \text{Аналогічно}$$

доводиться рівність $(Lv, u) = a(u, v)$, що підтверджує симетричність оператора L .

Враховуючи умову б, отримаємо

$$(Lv, u) \geq K_0 \int_0^1 (u')^2 dx = K_0(u', v') = K_0 \|u'\|^2.$$

Так як $K_0 > 0$, то $(Lv, u) \geq 0$ і $(Lv, u) = 0$ у випадку $u \equiv 0$, тобто $L > 0$.

Величина $a(u, v) = (Lu, v)$ називається енергетичним скалярним добутком, породженим оператором $L > 0$. Відповідна норма $\|u\|_L = \sqrt{(Lu, u)}$ називається енергетичною нормою КЗ.

Внаслідок теореми 2 КЗ (5.3), (5.4) еквівалентна варіаційній задачі

$$\min_{u \in W_2^2} F(u), \quad (5.5)$$

$$\text{де } F(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \int_0^1 [K(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2] dx - 2 \int_0^1 f(x)u(x) dx. \quad (5.6)$$

Звернемо увагу на те, що розв'язок КЗ $u \in W_2^2$, в той час, як розв'язок варіаційної задачі (5.5) можна шукати в просторі W_2^1 . Цю обставину можна використати для побудови розв'язку КЗ W_2^1 , що буває зручним на практиці. Розв'язок КЗ (5.3), (5.4) $u \in W_2^1$ будемо розуміти як деякий узагальнений розв'язок. Наприклад, у класі кусково-диференційованих функцій, який належить W_2^1 . У зв'язку з цим достатньо вимагати, щоб функція u була кусково-неперервною, зокрема, кусково-постійною.

5.2. Метод Рітца

За методом Рітца наближений розв'язок варіаційної задачі (5.2) будується у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \quad (5.7)$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – послідовність заданих лінійно-незалежних елементів із D_A , $c_1, \dots, c_n$ – коефіцієнти, які потрібно визначити.

Підставимо вираз для u_n в (5.2).

Отримаємо функцію скалярних змінних $c_1, \dots, c_n$

$$F(u_n) \equiv g(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i c_k (A_{\varphi_i}, \varphi_k) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \varphi_k).$$

Запишемо необхідну умову екстремуму функції $g(c_1, \dots, c_n)$

$$\frac{dg}{dc_x} = 2 \sum_{i=1}^n c_i ((A_{\varphi_i}, \varphi_k) - (f, \varphi_k)) = 0, k = \overline{1, n}.$$

Звідси отримаємо СЛАР для коефіцієнтів $c_1, \dots, c_n$

$$\sum_{i=1}^n c_i ((A_{\varphi_i}, \varphi_k) - (f, \varphi_k)) = 0, k = \overline{1, n}.$$

Матриця СЛАР (5.8) побудована за лінійно незалежною системою елементів $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, тому вона додатно визначена. Це означає, що розв'язок (5.8) існує, і єдиний, а на елементі u_n з коефіцієнтами $c_1, \dots, c_n$ досягається мінімум функціонала.

Для реалізації методу Рітца для КЗ (5.3), (5.4) накладено на послідовність функцій $\{\varphi_i(x)\}_{k=1}^x$ такі умови:

1. $\varphi_i \in W_2^1, i = \overline{1, n}$.
2. Функції $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – лінійно незалежні на $[0, 1]$.

В міру першої умови $u_n(0) = u_n(1) = 0$, тобто крайові умови (5.4) задовольняються наближеним розв'язком.

Випишемо коефіцієнти матриці СЛАР (5.8), яка відповідає КЗ (5.3),(5.4)

$$(L\varphi_i, \varphi_k) \equiv a(\varphi_i, \varphi_k) = \int_0^1 [k(x)\varphi_i'(x)\varphi_k'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)]dx \quad (5.9)$$

і праві частини

$$(f, \varphi_k) = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, k = \overline{1, n}. \quad (5.10)$$

Сформулюємо теорему про збіжність методу Рітца для КЗ.

Для цього потрібно накласти ще одну умову на систему $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. А саме, припустимо, що система повна. Система елементів, яка лежить у повному просторі H повна, якщо породжений нею (замкнений) підпростір є весь H . Наприклад, унаслідок теореми Вейерштрасса сукупність усіх функцій $1, x, x^2, \dots$ повна в $C[a, b]$.

Теорема 3 [15] Нехай система $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ функцій із W_2^1 незалежна для $n = 1, 2, \dots$, а система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – повна в W_2^1 .

Тоді послідовність наближень u_n за методом Рітца збігається у розумінні енергетичної норми до точного розв'язку КЗ (5.3), (5.4).

Як приклад розглянемо систему $\{\sin \pi k x\}_{k=1}^n$.

В [15] показано, що справедлива нерівність

$$\|u_n - u\|_{L[0,1]}^2 \leq 2c\pi^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 a_k^2, \quad (5.11)$$

де a_k – коефіцієнти Фур'є функції u , що являє собою точний розв'язок КЗ, $c = \text{const} > 0$. Таким чином, точність наближення, знайденого за методом Рітца, визначається поведінкою коефіцієнтів Фур'є функції u . Якщо $u \in C^2[0,1]$, то, інтегруючи частинами і враховуючи, що $u(0) = u(1) = 0$, отримаємо

$$a_k =$$

$$2 \int_0^1 u(x) \sin \pi k x dx = \frac{2}{\pi k} \int_0^1 u''(x) \cos \pi k x dx = -\frac{2}{\pi^2 k^2} \int_0^1 u''(x) \sin \pi k x dx = \frac{dk}{k^2}, d_k = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u''(x) \sin \pi k x dx.$$

Тепер оцінка (5.11) набуває вигляду

$$\|u_n - u\|_L^2 \leq 2c\pi^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d_k^2}{k^2} \leq \frac{2c\pi^2}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

оскільки ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2$ збіжний, у випадку $u \in C^2[0,1]$ швидкість збіжності $\|u_n - u\|_L^2 = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$.

Завдання для практичної і самостійної роботи

Розглянемо КЗ

$$((t^2 + 1)z')' - \frac{2}{t^2}z = 2t - \frac{2}{t}, \quad 1 \leq t \leq$$

$$z(1) = 2, \quad z(2) = 2.5.$$

Точний розв'язок КЗ $z(t) = t + t^{-1}$. Після виконання заміни $t = x + 1$, $z = 2.5x - 2(x - 1) + u$ вихідна КЗ зведеться до вигляду (5.3), (5.4), де

$$k(x) = x^2 + 2x + 2, \quad q(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{x+1} - x - 1 - \frac{3}{(x+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Функціонал $F(u)$ для даної задачі має вигляд $F(u) = \int_0^1 [(x^2 + 2x + 2)u^2 + \frac{2}{(x+1)^2}u^2]dx - 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - x - 1 - \frac{3}{(x+1)^2} \right) u dx$.

Нехай $n = 2$. КЗ виберемо

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \quad \varphi_2(x) = x^2(1-x),$$

які, очевидно, задовольняють умови а, б.

Обчислимо коефіцієнти (5.9), (5.10):

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_1) &= \int_0^1 f(x) \varphi_1(x) dx = -0.7952, (f, \varphi_2) = -0.1332, a(\varphi_1, \varphi_1) \\
&= \int_0^1 [k(x)(\varphi_1'(x))^2 + q(x)(\varphi_1^2(x))] dx = 1.1645, a(\varphi_1, \varphi_2) \\
&= \int_0^1 [k(x)\varphi_1'\varphi_2' + q(x)\varphi_1'\varphi_2'] dx = 0.6807, a(\varphi_2, \varphi_2) \\
&= \int_0^1 [k(x)(\varphi_2')^2 + q(x)\varphi_2^2] dx = 0.5597.
\end{aligned}$$

СЛАР для визначення коефіцієнтності в C_1, C_2 згідно з (5.8) має вигляд

$$1.1645 C_1 + 0.6807 C_2 = -0.7952$$

$$0.6807 C_1 + 0.5597 C_2 = -0.1332,$$

звідки $C_1 = -1.8799$, $C_2 = 2.0479$.

Наближений розв'язок $u_2(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = -1.8799x(1-x) + 2.0479x^2(1-x)$.

Порівняння наближеного розв'язку з точним наведено в таблиці 9.

Таблиця 9.

			Абсолютна похибка	Відносна похибка, %
0,25	-0,0750	-0,1139	0,0389	34,1
0,50	-0,0833	-0,2563	0,1730	67,5
0,75	-0,0536	-0,0645	0,0109	16,8

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Методом Рітца побудувати наближений розв'язок КЗ (попередньо перевірити умови застосування методу). Знайти точний розв'язок на сітці. Функція $K(x)$ КФ наведена нижче.

$$1-9. (K(x)u')' = -1, 0 \leq x \leq 1; u(0) = u(1) = 0$$

$$1. K(x) = x + 1 \quad 2. K(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad 3. K(x) = 1 + x^3$$

$$a. \{x(1-x), x^2(1-x)\} \quad б. \{x(1-x), x(1-x)^2\} \quad в. \{\sin \pi x, \sin 2\pi x\}$$

$$10-15. (K(x)u')' - u = -x, 0 \leq x \leq 1; u(0) = u(1) = 0$$

$$1. K(x) = 1 + x^2 \quad 2. K(x) = (1+x)^2 \quad 3. K(x) = (1+x)^{-1}$$

$$a. \{x(1-x), x^2(1-x)\} \quad б. \{x(1-x), x(1-x)^2\}$$

5.3. Метод Гальоркіна

Метод Рітца застосовується для розв'язування задач із симетричним додатним оператором A . Метод Гальоркіна можна застосувати для значно ширшого класу задач, зокрема нелінійних.

В основу методу Гальоркіна покладена ідея ортогональності нев'язки $Au_n - f$ до елементів $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, що визначаються згідно з (5.7). На чому ґрунтується ця ідея? Якщо система $\{\varphi_n\}$ повна в D_A , то в D_A немає відмінного від нуля елемента, ортогонального кожному елементу

φ_i [7, с.277] . Природно чекати, що при $n \rightarrow \infty$ наближення u_n прямує до точного розв'язку $u \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$, бо елемент $Au - \varphi_{\infty}$ ортогональний кожному $\varphi_n, i = 1, 2, \dots$. Оскільки $Au - f = 0$ повна, тобто є розв'язком рівняння (5.1).

Таким чином, якщо зафіксувати n , вибрати лінійно незалежні елементи $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ із D_n , то коефіцієнти $c_1, \dots, c_n$ наближеного розв'язку (5.7) визначатимуться із системи рівнянь

$$(Au_n - f, \varphi_x) = 0, \quad K = \overline{1, n}. \quad (5.12)$$

Для лінійного оператора A після підстановки (5.7) в (5.12) отримаємо СЛАР (5.8). Для додатного оператора метод Гальоркіна не відрізняється від методу Рітца і залишається справедливою теорема 2.

У випадку КЗ (5.3) і (5.4) КФ виберемо такими, що задовольняють умову:

1. $\varphi_i \in W_2^2, \quad i = \overline{1, n}$.
2. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – лінійно незалежні на $[a, b]$.

Оскільки КУ функція $u_n(x)$ задовольняє точно, то нев'язка є

$$\delta(u_n) = (K(x)u_n')' - q(x)u_n + f(x). \text{ Із умови ортогональності}$$

$$\delta(u_n, \varphi_k) = 0, \quad K = \overline{1, n},$$

після інтегрування частинами проходимо до СЛАР

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_0^1 [K(x)\varphi_i' \varphi_k] dx = \int_0^1 f(x)\varphi_k(x) dx \quad (5.13)$$

Застосуємо метод Гальоркіна до нелінійної КЗ

$$u'' = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Відповідності з (5.12) система рівнянь для $c_1, \dots, c_n$ набуває вигляду

$$\int_0^1 [\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'' - f(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i)] \varphi_x dx = 0, \quad K = \overline{1, n} \quad (5.14)$$

Якщо проінтегрувати перший доданок у квадратних дужках частинами і врахувати, що $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, то система (5.14) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^n c_i (\varphi_i', \varphi_k') = -(f(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i), \varphi_k), \quad K = \overline{1, n}.$$

Отримана система нелінійна відносно $c_1, \dots, c_n$.

Розглянемо приклад лінійної КЗ

$$u'' - xu' + 2u' = 2, 0 \leq x \leq 1, \quad (5.15)$$

$$u(0) + u'(0) = 1, u''(1) = 2 \quad (5.16)$$

Точний розв'язок КЗ $u(x) = x^2 + 1$.

За методом Гальоркіна розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u_2(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

де функція $\varphi_0(x)$ вибирається так, щоб задовольнити КУ, адля $\varphi_i(0) + \varphi'_i(0) = 0$ і $\varphi'_i(1) = 0$ для $i = 1, 2$.

Якщо покласти $\varphi_0(0) = a + bx$, то із КУ (5.16) знаходимо $\varphi_i(0) = 2x - 1$. Функції φ_1 і φ_2 вибираємо відповідно квадратним і кубічним многочленами, які задовольняють нульовим КУ. Отримаємо

$$\varphi_1 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2, \quad \varphi_2 = -\frac{3}{2}x^2 + x^3.$$

Нев'язка рівняння (5.15) на функції u_2 є

$$Au_2 - f = u_2'' - xu_2' + 2u_2 - 2 = C_1(3 - x) + C_2(-3 + 6x - x^3) - (4 - 2x)$$

Із умов ортогональності

$$\int_0^1 (Au_2 - f)\varphi_i dx = 0, \quad i = 1, 2,$$

Отримаємо СЛАР другого порядку

$$\frac{41}{24}C_1 - \frac{1}{8}C_2 = \frac{15}{12}$$

$$-\frac{9}{20}C_1 - \frac{27}{140}C_2 = \frac{1}{10},$$

звідки $C_1 = 1.6093$, $C_2 = -2.8735$. Таким чином,

$$u_2(x) = 2x - 1 + 1.6093\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right) - 2.8735\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2\right).$$

Порівняльна таблиця значень $u_2(x_k)$, різницевого розв'язку u_k , точного розв'язку $u(x_k)$, $x_k = 0.25k$, $k = \overline{0,4}$, наведена нижче.

Таблиця 10

y	$u_2(x_k)$	y_k	$u(x_k)$
0.00	0.5093	0.8187	1.0000
0.25	0.5130	0.8640	1.0625
0.35	1.3492	1.0588	1.2500
0.75	2.2485	1.4051	1.5625
1.00	2.9414	1.9051	2.0000

Завдання для практичної і самостійної роботи

1–15. Методом Гальоркіна розв'язати вправи п.5.2

16–23. Розробити програму реалізації на ЕОМ наближень $u_2(x)$ і (або) $u_3(x)$ за методом Гальоркіна. КЗ має вигляд

$$u'' + pu' + qu = r, \quad \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = \gamma_2.$$

Параметри задачі наведено в табл. 11

Таблиця 11

№	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$x = 0$			$x = 1$		
				α_1	β_1	γ_1	α_2	β_2	γ_2
1	$x + 1$	-2	$2(2x - 1)$	4	-1	2	1	2	0
2	$x - 1$	-2	$-4x$	4	-1	2	1	0	3
3	x	-3	$2 + 6x + x^2$	0	1	1.75	1	1	7
4	2	-1	$-2xe^{-x}$	1	-1	0	0	1	0
5	$\frac{2}{x+1}$	$-x - 1$	-1	1	0	2/3	1	2	0.75
6	$-x - 1$	-1	$\frac{2}{(x+1)^3}$	1	0	2/3	1	0	0.5

7	$\frac{1}{x+1}$	x	1	0	1	2	1	1	1
8	x	-2	2	1	0	1	1	1	3

5.4. Метод скінченних елементів

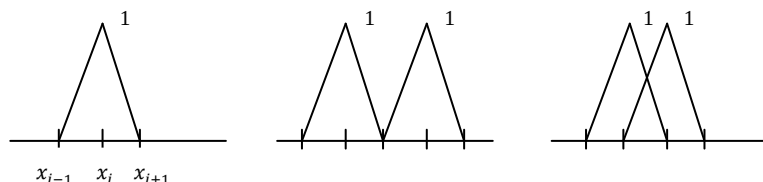
Для КЗ (5.3), (5.4) реалізація методу Гальоркіна згодиться до розв'язування СЛАР із заповненою матрицею порядку n , де n – кількість КФ, що потребує $O(n^3)$ арифметичних операцій. До того ж, у багатьох задачах отримані СЛАР погано обумовлені, що спричиняє велику обчислювальну похибку.

Інтегро-інтерполяційний і різницевий методи породжують СЛАР порядку $n - 1$ з тридіагональною матрицею, що дає змогу застосувати метод прогонки із затратною $O(n)$ операцій. Проте ці методи мають розв'язок КЗ тільки на сітці ω_h у той час, коли методами Рітца і Гальоркіна отримується розв'язок в аналітичній формі на відрізку $[a, b]$.

У МСЕ шляхом вибору спеціального набору КФ вдається поєднати переваги зазначених груп методів. А саме, отримати розв'язок як лінійну комбінацію КФ, коефіцієнти якої знаходяться із СЛАР із тридіагональною матрицею.

Нехай $\overline{\omega_h}$ – рівномірна сітка на $[0, 1]$ із кроком $h = \frac{1}{N}$.

В якості КФ $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, N - 1}$ вибираємо кусково-лінійні функції (рис.4а),



які задовольняють умову (рис.4а)

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, i = \overline{1, N - 1}, j = \overline{1, N} \end{cases} \quad (5.17)$$

Нескладно показати, що функції $\varphi_i(x)$ лінійно незалежні.

Позначимо через H множину лінійних комбінацій КФ

$\varphi_i(x), i = \overline{1, N-1}$ з дійсними коефіцієнтами.

Зрозуміло, що наближений розв'язок КЗ (5.3), (5.4) будемо у вигляді

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \varphi_i(x). \quad (5.18)$$

Так як $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, то $iV(0) = V(1) = 0$.

Унаслідок (5.17) $V(x_j) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \varphi_i(x_j) = c_j$,

тому

$$V(x_j) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \varphi_i(x). \quad (5.19)$$

Розглянемо білінійну форму

$$\alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 [K(x) \varphi_i' \varphi_j' + q(x) \varphi_i' \varphi_j'] dx, \quad (5.20)$$

яка визначає розв'язок СЛАР (5.13). Тут $\varphi_i' \varphi_j'$ – КФ. Похідна функції $\varphi_i(x)$ на інтервалах існування набуває значення

$$\varphi_i' = \begin{cases} h^{-1}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ -h^{-1}, & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x < x_{i-1}, x > x_{i+1} \end{cases}$$

Функція $\varphi_i(x)$ ортогональна на всіх КФ $\varphi_j(x)$, для яких $|i - j| > 1$ відносно скалярного добутку $\alpha(\varphi_i, \varphi_j)$ (див. рис. 4б, в). Це означає, що кожне із рівнянь (5.15) містить щонайбільше три доданки і матриця системи тридіагональна. Запишемо СЛАР (5.13), у цьому випадку

$$V_1 \alpha(\varphi_1, \varphi_1) + V_2 \alpha(\varphi_1, \varphi_2) = (f, \varphi_1)$$

$$V_1 \alpha(\varphi_2, \varphi_1) + V_2 \alpha(\varphi_2, \varphi_2) + V_3 \alpha(\varphi_2, \varphi_3) = (f, \varphi_2)$$

$$V_{k-1} \alpha(\varphi_{k-1}, \varphi_k) + V_k \alpha(\varphi_k, \varphi_k) + V_{k+1} \alpha(\varphi_k, \varphi_{k+1}) = (f, \varphi_k)$$

$$V_{N-2} \alpha(\varphi_{N-1}, \varphi_{N-2}) + V_{N-1} \alpha(\varphi_{N-1}, \varphi_{N-1}) = (f, \varphi_{N-1})$$

Визначником системи є визначник Грама, побудований за лінійно незалежною системою КФ, тому розв'язок існує, і єдиний. Позначимо його $V = \tilde{V}(x)$ і доведемо збіжність МСЕ в енергетичній нормі. Тобто покажемо, що

$$\|u - \tilde{V}\|_A = \sqrt{(A(u - \tilde{V}), u - \tilde{V})} \leq ch, \quad (5.21)$$

де $c > 0$ і не залежить від h , $u(x)$ – розв’язок КЗ. Із нерівності (5.21) отримаємо, що $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{V} - u\|_A = 0$ і метод збігається зі швидкістю одиниця.

Теорема 3. Нехай в рівнянні (5.3) $k \leq W_2^1[0,1]$, $f \in L_2[0,1]$ і для $x \in [0,1]$ $0 < K_0 \leq K(x) \leq C_1$, $0 \leq q(x) \leq C_1$, $C_1 = \text{const} > 0$.

Тоді має місце нерівність (5.21).

Доведення. За умовою теореми оператор $Lu = (K(x)u')' - q(x)u$ симетричний і додатний. Унаслідок цього можна перейти від КЗ (5.3), (5.4) до варіаційної задачі з оператором (5.5). Розв’язок $\tilde{V}(x)$, отриманий в МСЕ, є розв’язком варіаційної задачі в класі функцій H . Шляхом інтегрування частинами і в міру рівняння (5.1), отримаємо

$$F(W) = \alpha(u - W, u - W) - \alpha(u, u), \quad (5.22)$$

де $u \in W_2^2$ – точний розв’язок варіаційної задачі.

Так як функція $\tilde{V}(x)$ радіус мінімуму функціонала $F(W)$, $W \in H$, то внаслідок (5.22) функція є найкращою в розумінні енергетичної норми апроксимацією точного розв’язку кусково-лінійними функціями із H .

Нехай z – доцільна функція із H , яка задовольняє умову $z_i = u_i$, $i = \overline{0, N}$. Із зробленого після (5.22) зауваження випливає, що $\|u - \tilde{V}\|_A \leq \|u - z\|_A$. Оцінимо $\|u - z\|_A$. Маємо

$$\begin{aligned} \|u - z\|_A^2 &= \int_0^1 [K(x)(u' - z')^2 + q(x)(u - z)^2] dx \leq, \\ &\leq c_1 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(u' - z')^2 + (u - z)^2] dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

На відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$,

$$\begin{aligned} (u - z)' &= u' - (z_{i+1} - z_i)h^{-1} = u' - (u_{i+1} - u_i)h^{-1} = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u'(x) - u'(\xi)] d\xi = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{\xi}^x u''(\eta) d\eta \right) d\xi, \end{aligned}$$

Оскільки $z_i = u_i$ і функція $z()$ лінійна на $[x_i, x_{i+1}]$,

тоді

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [(u - z)']^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{\xi}^{x_{i+1}} u''(\eta) d\eta \right) d\xi \right]^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} I_i dx.$$

Оцінимо I_i

$$I_i \leq \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(\eta)| d\eta \right) d\xi \right]^2 = h^2 \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(\eta)| d\eta \right]^2.$$

Інтеграл у правій частині оцінимо за допомогою нерівності Коші-Бунаковського

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx, \quad (5.24)$$

Покладаючи $f(x) = 1, g(x) = |u''(x)|$,

$$I_i \leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u''(\eta))^2 d\eta = h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u''(\eta))^2 d\eta = h^3 b_i.$$

Таким чином,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [(u - z)']^2 dx \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i dx \leq h^2 b_i. \quad (5.25)$$

Просумувавши, отримаємо

$$\int_0^1 [(u' - z')]^2 dx \leq \int_0^1 (u''(x))^2 dx = h^2 c_2. \quad (5.26)$$

Запишемо різницю $u(x) - z(x)$ у вигляді

$$u(x) - z(x) = \int_{x_i}^x (u - z)' , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Використавши нерівність (5.24), і внаслідок (5.25), отримаємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x) - z(x))^2 dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - z)' d\xi \right)^2 dx \leq h^4 b_i,$$

А на відрізку $[0,1]$

$$\int_0^1 (u - z)^2 dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u''(\eta))^2 d\eta \leq c_2 h^2.$$

Об'єднуючи нерівності (5.26) і (5.27), отримаємо

$$\|u - z\|_A^2 \leq c_1 c_2 (1 + h^2) h^2 \leq 2c_1 c_2 h^2$$

або

$$\|u - z\|_A \leq \sqrt{2c_1c_2}h = ch, c = \sqrt{2c_1c_2}.$$

Для завершення доведення потрібно врахувати, що

$$\|u - \tilde{V}\|_A \leq \|u - z\|_A \leq ch.$$

Приклад 1. $u'' - u = x$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = u(1) = 0$.

Тут $K(x) = 1$, $q(x) = 1$ та $f(x) = -x$.

Нехай $h = 0.25$. Функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ зображені на рис.5.

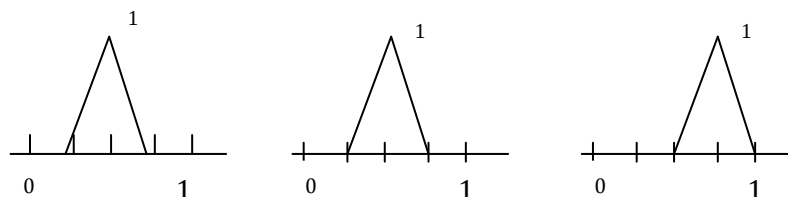


Рис. 5

СЛАР для визначення коефіцієнтів c_1, c_2, c_3 наближеного розв'язку має вигляд $\tilde{V}(x) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$

$$av_1 + bv_2 = -0.0625$$

$$bv_1 + av_2 + bv_3 = -0.1250$$

$$bv_2 + av_3 = -0.0625,$$

$$\text{де } a = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} = \frac{32}{3}, \quad b = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} = -95/24.$$

Наближений розв'язок отриманий МСЕ, має вигляд

$$\tilde{V}(x) = -0.0315\varphi_1(x) - 0.0541\varphi_2(x) - 0.0012\varphi_3(x).$$

У різницевому методі СЛАР (3.5) для нашого випадку запишеться так:

$$-(2 + h^2)y_1 + y_2 = h^3$$

$$y_1 - (2 + h^2)y_2 + y_3 = 2h^3$$

$$y_2 - (2 + h^2)y_3 = 2h^3$$

$$y_0 = y_4 = 0,$$

звідки

$$y_1 = -0.0349, y_2 = -0.0349, y_3 = -0.0349.$$

$$\text{Точніше розв'язок КЗ } u(x) = \frac{e(e^x - e^{-x})}{e^2 - 1} - x.$$

Порівняння з точним (математичним [6]) значенням розв'язку

$$u_1 = -0.0350, u_2 = -0.0565, u_3 = -0.0502 \text{ наведено в табл. 12.}$$

Таблиця 12.

x_k	$\tilde{V}(x_k)$	y_k	$u(x_k)$
0.25	-0.315	-0.0349	-0.0350
0.50	-0.0541	-0.0563	-0.0454
0.75	-0.0512	-0.0500	-0.0502

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Розглянемо КЗ з розривним коефіцієнтом

$$(K(x)u')' = 1, 0 \leq x \leq 1, u(0) = u(1) = 0,$$

де функція $K(x) = 2$ при $0 \leq x \leq 0.5$. $K(x) = 1$ при

$0.5 \leq x \leq 1$. Точний розв'язок КЗ, який задовольняє умови узгодження (1.9), має вигляд

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{24}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Нехай крок сітки $h = 0.25$. Тоді

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_1) = k_1 \int_0^{2h} \frac{dx}{h^2} = 16, \alpha(\varphi_2, \varphi_2) = k_1 \int_h^{2h} \frac{dx}{h^2} + k_2 \int_{2h}^{3h} \frac{dx}{h^2} = \frac{3}{h} = 12,$$

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = -k_1 \int_h^{2h} \frac{dx}{h^2} = -8, \alpha(\varphi_2, \varphi_3) = -k_2 \int_{2h}^{3h} \frac{dx}{h^2} = -4,$$

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = k_2 \int_{2h}^1 \frac{dx}{h^2} = 8 ,$$

$$(f, \varphi_i) = h = 0.25 , i = 1, 2, 3.$$

Розв'язок СЛАР

$$16V_1 - 8V_2 = -0.25$$

$$-8V_1 + 12V_2 - 4V_3 = -0.25$$

$$-4V_2 + 8V_3 = -0.25$$

$$V_1 = -0.0573 , V_2 = -0.0833 , V_3 = -0.0729 ,$$

який співпадає з точним розв'язком

$$u_1 = -0.0573 , u_2 = -0.0833 , u_3 = -0.0739 .$$

Перелік рекомендованої літератури

1. Петрик М. Mathcad-технології в інженерних задачах теорії розрахунку і конструювання. Тернопіль: Вид-во ТДТУ ім. Ів.Пулюя, 2000, 154с.
2. Lebovka N., Cieřla M., Petryk M., Vygornitskii N. Cooperative sequential adsorption of monomers on a square lattice in the presence of repulsive interactions between near neighbors. *Physical Review E*. 110, 064801 (2024). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.064801>
3. Boyko I., Petryk M., Lebovka N. Tunnel transport problem for open multilayer nitride nanostructures with an applied constant magnetic field and time-dependent potential: An exact solution. *Physical Review B*. Vol. 110, 045438. Published 24 July 2024. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.045438>
4. Lebovka N.I., Bulavin L.A., Kovalchuk V.I., Petryk M.R., Vygornitskii N.V. Impact of ageing on structure of random sequential adsorption packings of discorectangles. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 57 (33), 335001(2024). DOI 10.1088/1751-8121/ad6652
5. Lebovka, N.I., Bulavin, L.A., Petryk, M.R., Vygornitskii, N.V. Random sequential adsorption of discorectangles covered with repulsive shells. *Ukrainian Journal of Physics*, 2024, 69(5), 357–36. DOI 10.15407/ujpe69.5.357
6. Lebovka, N.I., Petryk, M.R., Vygornitskii, N.V. Percolation connectivity in deposits obtained using competitive random sequential adsorption of binary disk mixtures. *Condensed Matter Physics*, 2024, 27(1), 13201. DOI 10.5488/CMP.27.13201
7. Boyko I., Petryk M., Lebovka N. Application of the Lewis-Riesenfeld quantum mechanical invariant method for description of electron tunneling transport in nitride multilayer quantum well nanostructures. *Physics Letters A*. Vol. 489, 129152 (2023) <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2023.129152>
8. 3. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння та їх застосування.-К.: Вища школа, 1992, 196с.
9. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло – та масопереносу. К.: Наукова думка, 2005, 282с.
10. Сергієнко І.В., Петрик М.Р., Хіміч О.М., Кане Д., Михалик Д.М., Леклерк С., Фресар Ж. Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури. Національна академія наук України, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова. 2014, 210с.

11. Хіміч О.М., Петрик М.Р., Михалик Д. М., Бойко І.В., Попов О.В., Сидорук В.А. Методи математичного моделювання та ідентифікації складних процесів і систем на основі висопродуктивних обчислень (нейро- та нанопористі кібер-фізичні системи із зворотніми зв'язками, моделі з даними розрідженої структури, паралельні обчислення). Київ: Національна Академія наук України. Інститут кібернетики імені В. В. Глушкова. 2019, 188 с.
12. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя зі спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. К: Наукова думка, 2000, 372 с
13. Paul Wellin, Richard Gaylord, Samuel Kamin. An Introduction to Programming with Mathematica, Third Edition. -Cambridge University Press, 2019. P. 804.
14. L. Alves, M. Mikhailov, Renato Cotta. Applied Numerical Analysis with Mathematica. - E-papers Servicos Editoriais, 2017. P. 646.
15. Christian Constanda, Dale Doty, William Hamill. Boundary Integral Equation Methods and Numerical Solutions: Thin Plates on an Elastic Foundation. –Springer, 2016. P. 480.