

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Конспект лекцій
з курсу «Будівельна механіка»
підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня
бакалавр
за напрямом підготовки "Будівництво"

Тернопіль
2011 р.

Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за напрямом підготовки "Будівництво" / уклад. С.І.Федак. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2011.- 80 с.

Укладачі: доц., к.т.н. С.І.Федак

Зміст

1. Вступ. Предмет та задачі будівельної механіки	4
2. Кінематичний аналіз споруд	
Основні види опор	6
Умови геометричної незмінюваності стержневих систем	7
Статична визначеність геометрично незмінних стержневих систем	9
Приклади кінематичного аналізу	11
3. Плоскі ферми	
Класифікація ферм	15
Визначення зусиль у стержнях найпростіших ферм	18
Приклади розрахунку ферм на нерухоме навантаження	27
4. Трьохшарнірні арки і рами	
Загальні положення і класифікація арок	36
Визначення характеристик в арках	39
Рівняння раціональної осі арки. Ядрові моменти	43
5. Варіаційні методи і загальні теореми будівельної механіки	
Лінійно і нелінійно деформівні пружні системи	46
Узагальнені переміщення і узагальнені сили	52
Метод Рітца	62
Узагальнений метод Бубнова-Гальоркіна	67
Принцип можливих напружених станів	73

Предмет та задачі будівельної механіки

Будівельною механікою, у широкому сенсі, називається наука про методи розрахунку споруджень на міцність, жорсткість і стійкість. Самостійно як наука будівельна механіка почала розвиватися в першій половині XIX століття у зв'язку з активним будівництвом мостів, залізниць, гребель, судів і великих промислових споруджень. Відсутність методів розрахунку таких споруджень не дозволяло здійснити легкі, економічні й одночасно надійні конструкції.

У класичній будівельній механіці розглядаються тільки стержневі системи. Однак практичні потреби визначили появу нових, спеціальних курсів будівельної механіки, де розглядаються нестержневі системи. Так з'явилися курси “Будівельна механіка пароплава” (тут розглядається розрахунок пластин і оболонок), “Будівельна механіка літака” (розглядається розрахунок пластинок і оболонок стосовно до літакових конструкцій), “Будівельна механіка ракет” (основна частина цього курсу присвячена розрахунку осесиметричних оболонок). У цих курсах широко використовуються методи теорії пружності, які більш складніші, ніж методи класичної будівельної механіки.

Сучасна будівельна механіка має цілий ряд класифікацій розв'язуваних задач. Розрізняють *плоскі задачі*, які розв'язуються у двох вимірах, і *просторові задачі*, розв'язувані в трьох вимірах. Звичайно просторові конструкції прагнуть розчленувати на плоскі елементи, розрахунок яких значно простіший, однак це не у всіх випадках вдається. Більшість основних методів розрахунку й теорем викладається стосовно до плоских систем. Подальші узагальнення на просторові системи, як правило, вимагають лише написання більш громіздких формул і рівнянь.

Будівельна механіка поділяється також на *лінійну* й *нелінійну*. Розрізняють *геометричну* й *фізичну* нелінійності. *Геометрична нелінійність* рівнянь будівельної механіки звичайно виникає при більших переміщеннях і деформаціях елементів, що в будівельних конструкціях зустрічається порівняно рідко. *Фізична нелінійність* з'являється при відсутності пропорційності між зусиллями й деформаціями, тобто при використанні непружних матеріалів. Фізичною нелінійністю в тому або іншому ступені володіють всі конструкції, однак при невеликих напругах нелінійні фізичні залежності можна замінити лінійними.

Розрізняють також *статичні* задачі будівельної механіки й *динамічні*. Останні враховують інерційні властивості конструкції, що виражаються через похідні за часом. Сюди ж варто віднести задачі, пов'язані з обліком *в'язких властивостей* матеріалів, *повзучості* й *тривалої міцності*. Таким чином, існує будівельна механіка *нерухомих систем* і будівельна механіка *систем, що рухаються*, куди входять, зокрема, *динаміка споруджень* і *теорія повзучості*.

Порівняно новим напрямком у будівельній механіці є вивчення систем з *випадковими параметрами*, тобто такими, величина яких може бути передбачена лише з певною ймовірністю. Наприклад, величина максимального снігового

навантаження за заданий період часу є імовірнісною величиною. Розрахунок споруджень із урахуванням імовірності появи тих або інших станів становить предмет *теорії надійності й імовірнісних методів розрахунку*, що є невід'ємною частиною будівельної механіки.

Будівельна механіка розділяється також на напрямки, що відносяться до розрахунку конструкцій певного виду: стержневих конструкцій (ферм, рам, балкових систем і арок), пластин і пластинчастих систем, оболонок, гнучких ниток і вантових систем, пружних і непружних основ, мембран і т.д.

Кінематичний аналіз споруд

Основні види опор

Будівельна механіка розглядає *геометрично незмінні системи* (спорудження), тобто такі, переміщення точок яких можливі тільки в результаті деформації системи. Нерухомість таких систем (їхня геометрична незмінюваність) щодо землі забезпечується опорними зв'язками (опорами). Реакції, що виникають в опорах, разом з діючими навантаженнями, утворюють урівноважену систему зовнішніх сил.

Технічне виконання опорних закріплень досить різноманітне, але при виборі розрахункової схеми опори найчастіше приходять до декількох їхніх типів (рис. 1): а – циліндрична рухома, або *шарнірно рухома*; б – циліндрична нерухома, або *шарнірно нерухома*; в – зацімлююча нерухома, або *жорстке закладення*; г – зацімлююча рухома, або *ковзне закладення*.

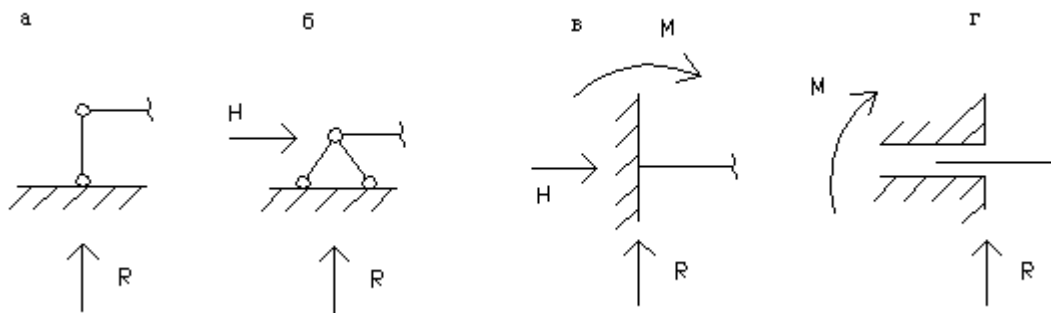


Рис. 1

Показані опори (рис. 1) еквівалентні відповідно одному, двом, трьом і двом опорним стержням, у кожному з яких діє опорна реакція (опорний момент).

Жорсткому й ковзному закладенням можна поставити у відповідність їхні шарнірно-стержневі еквіваленти (рис. 2). При цьому відстань l_0 називається *глибиною закладення*, а добуток $M = R_2 l_0$ – *опорним моментом*, або моментом у закладенні.



Рис. 2

2. Умови геометричної незмінюваності стержневих систем

З'ясування того, чи є система геометрично незмінною, умов, що забезпечують цю незмінюваність, а також ролі окремих елементів у роботі всього спорудження становить суть *кінематичного аналізу*, що завжди повинен передувати розрахунку.

Стержневими системами називаються системи, що складаються з окремих, частіше прямолінійних, стержнів, з'єднаних між собою у вузлах (за допомогою зварювання, болтів, заклепок і т.д.).

Одним з видів таких систем є *плоскі ферми*. У більшості випадків з'єднання стержнів у вузлах ферми є жорсткими; точний розрахунок такої системи досить складний через те, що вона є багаторазово статично невизначеною системою. Однак експериментальні й теоретичні дослідження показують, що при достатній довжині стержнів заміна жорстких з'єднань шарнірними істотно не впливає на величини зусиль у стержнях. Розрахунок же при цьому різко спрощується й за певних умов може бути виконаний за допомогою одних лише рівнянь статки.

Якщо замінити жорсткі вузли системи, що складається із трьох стержнів (рис. 3,а), шарнірними (рис. 3,б), то система залишиться геометрично незмінною. Але якщо теж саме виконати із системою, що складається із чотирьох стержнів (рис. 3,в), то отримана система (рис. 3,г) стане геометрично змінюваною, тому що її форма може змінюватися й без деформації елементів.

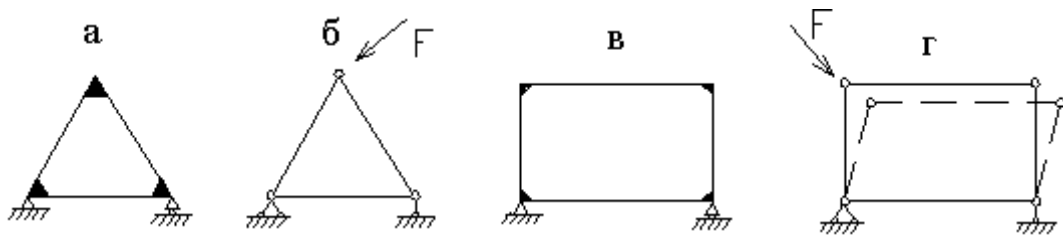


Рис. 3

Система, що складається із трьох стержнів, з'єднаних шарнірами в трикутник, є найпростішою геометрично незмінною системою (рис. 3,б).

Системи, отримані з такого шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів, причому кожного *двома стержнями, що не лежать на одній прямій*, також будуть геометрично незмінними (рис. 4).

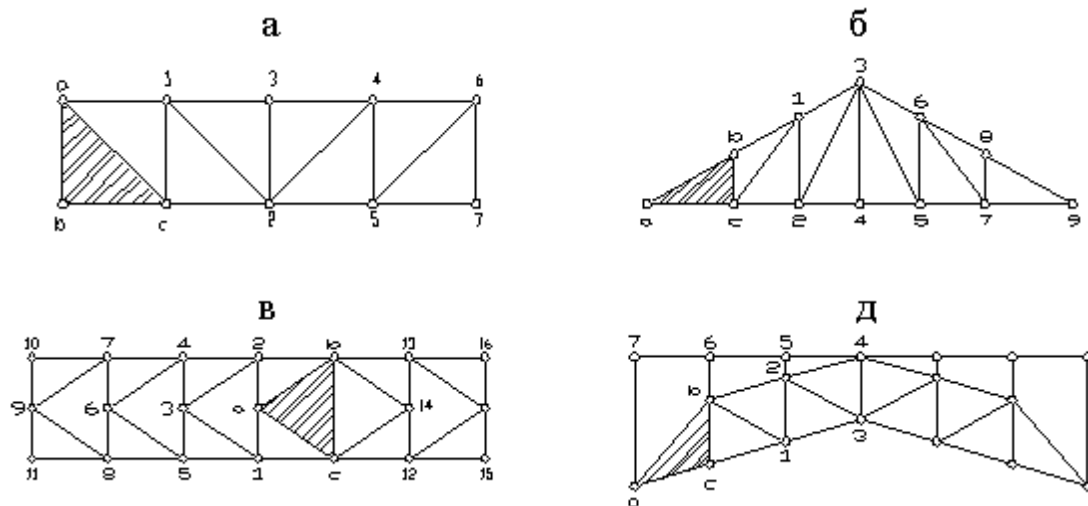


Рис. 4

Встановимо залежність між числом вузлів і числом стержнів, необхідних для одержання найпростішої геометрично незмінної ферми.

Нехай S – число стержнів ферми, а K – число вузлів. Основний трикутник, на базі якого побудована ферма (заштриховані області на рис. 4), має три вузли й три стержні, а кожний з інших вузлів, що приєднуються, у $K-3$ кількості прикріплюється двома стержнями. Отже, повне число стержнів у найпростішій геометрично незмінній фермі

$$S = 3 + 2(K - 3)$$

або

$S = 2K - 3$	(1)
--------------	-----

Якщо $S < 2K - 3$, то система геометрично змінювана; якщо $S > 2K - 3$, то система *може бути* геометрично незмінною. Це варто розуміти так, що співвідношення $S \geq 2K - 3$ є необхідним, але недостатньою умовою геометричної незмінюваності ферми. Наприклад, ферми на мал. 5, є геометрично змінюваними, хоча для правої з них (рис. 5,а) $S = 2K - 3$, а для другої (рис. 5,б) – $S > 2K - 3$. Змінюваність цих ферм пояснюється тим, що праві їхні частини - шарнірні чотирикутники.



Рис. 5

Слід також зазначити, що стержневі системи, що задовольняють умові $S = 2K - 3$, можуть бути миттєво змінюваними.

Розглянемо приєднання геометрично незмінної системи до землі за допомогою опор. Найчастіше спорудження (диск) опирається на дві шарнірні опори (рухому й нерухому, рис. 6,а), але можливе обпирання й на три шарнірно рухомі опори (рис. 6,б). Таке обпирання можливо лише в тому випадку, коли *осі цих стержнів не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному*.

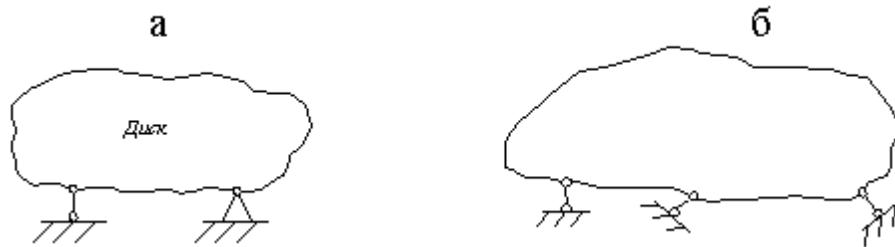


Рис. 6

Стосовно до випадку з'єднання двох будь-яких геометрично незмінних систем (дисків) можна сформулювати *правило*: два диски утворюють геометрично незмінну систему, якщо вони зв'язані між собою трьома стержнями, осі яких не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному.

До диска можна також геометрично незмінно приєднати інший диск за допомогою загального для обох дисків шарніра й стержня, напрямок якого не повинен проходити через цей шарнір.

З'єднання трьох дисків в одну загальну геометрично незмінну систему можна здійснити, з'єднавши їх у трикутник за допомогою трьох шарнірів, не розташованих на одній прямій (рис. 7,а), або за допомогою шести стержнів (рис. 7,б), тому що кожний шарнір можна замінити двома стержнями, що перетинаються в цьому шарнірі.



Рис. 7

3. Статична визначеність геометрично незмінних стержневих систем

Спорудження статично визначене *щодо опорних закріплень* тільки в тому випадку, коли число параметрів, що визначають реакції цих закріплень, дорівнює трьом. Цій умові задовольняють наступні три системи опорних закріплень:

1. Комбінація шарнірно-рухомої й шарнірно-нерухомої опор (рис. 8,а);
2. Комбінація трьох шарнірно-рухомих опор (рис. 8,б) за умови, що напрямки реакцій цих опор не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному;
3. Жорстко затиснена система (рис. 8,в).

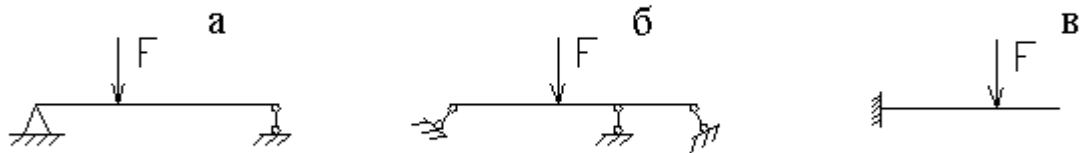


Рис. 8

Наявність у геометрично незмінної системи чотирьох і більше опорних стержнів, серед яких є три стержні з напрямками реакцій, що не перетинаються в одній точці й не паралельними один одному, говорить про те, що спорудження статично невизначене.

Розглянемо умови, яким повинні задовольняти самі статично визначені стержневі системи (ферми), тобто такі системи, зусилля в елементах яких можуть бути знайдені за допомогою одних лише рівнянь статки.

При дії на шарнірну ферму зосереджених сил, прикладених у вузлах, у її *прямолінійних* стержнях виникають тільки повздовжні (стискаючі або розтягуючі) сили. Якщо ферма має *криволінійні* стержні, то в поперечних перерізах цих стержнів крім повздовжніх сил виникають і згинальні моменти, що викликають у них додаткові напруги.

Якщо ферма в цілому (рис. 9,а) перебуває в рівновазі під дією сил, прикладених до її вузлів, то й будь-який її вузол (рис. 9,б) також перебуває в рівновазі, тобто зовнішнє навантаження, що діє на вузол, і внутрішні зусилля в стержнях, що сходяться в цьому вузлі, взаємно врівноважуються.

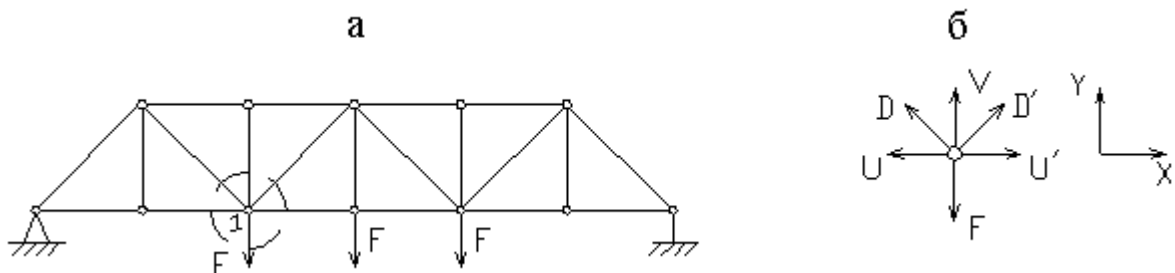


Рис. 9

На кожний вузол ферми діє система сил, що перетинаються в одній точці. Для такої системи сил можна записати два рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0.$$

Якщо ферма має K вузлів, то для них можна записати $2K$ рівнянь рівноваги, з яких можна визначити зусилля у всіх стержнях ферми й три невідомі опорні реакції. Будь-які інші рівняння рівноваги для окремих частин ферми або для всієї ферми в цілому можуть бути отримані із цих рівнянь, тому вони не є новими незалежними умовами для визначення незалежних зусиль. Таким чином, ферма буде статично визначена, якщо число її стержнів S дорівнює подвоєному числу вузлів мінус 3:

$S = 2K - 3$	(2)
--------------	-----

Залежність (2) між числом вузлів і числом стержнів статично визначеної ферми збігається з умовою (1) її геометричної незмінюваності.

Отже, усяка найпростіша ферма, тобто ферма, утворена на базі шарнірного трикутника послідовним приєднанням вузлів (кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій), є одночасно геометрично незмінною й статично визначеною системою.

Всі стержні статично визначеної системи є безумовно необхідними з погляду геометричної незмінюваності, тобто в такій системі немає ні одного зайвого зв'язку; якщо ж число стержнів геометрично незмінної системи перевищує мінімально необхідне, то вона є статично невизначеною.

4. Приклади кінематичного аналізу

Приклад Виконати кінематичний аналіз системи (рис. 10,а).

Визначаємо ступінь свободи системи по формулі П.Л.Чебишева:

$W = 3D - 2Ш - C_0,$	(3)
----------------------	-----

де D – число дисків, $Ш$ – число простих шарнірів, C_0 – кількість стержнів.

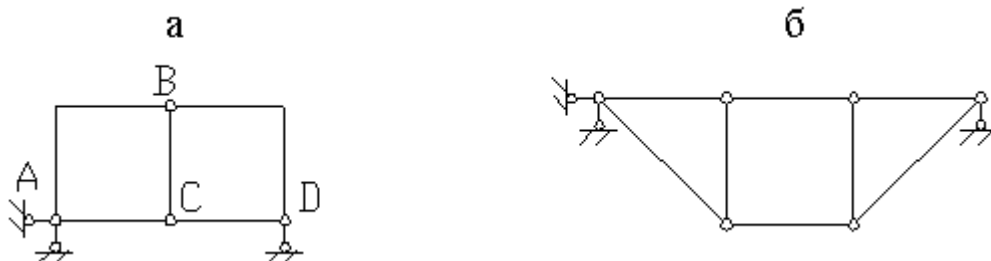


Рис. 10

Відкидаючи всі шарніри й опорні стержні, знаходимо, що система складається з п'яти дисків ($D=5$). Відкидаючи опорні стержні, визначаємо число шарнірів, приведених до простих ($III=6$: по двох у точках B і C , по одному – у точках A і D). Число опорних стержнів – $C_0=3$.

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0,$$

тобто система може бути геометрично незмінною й статично невизначеною. Щоб переконатися, що це так, виконаємо аналіз структури системи. Тому що диски AB , BC і AC зв'язані трьома шарнірами A , B і C , що не лежать на одній прямій, то вони утворюють диск, до якого жорстко приєднаний диск BD за допомогою шарніра B й стержня CD , вісь якого не проходить через центр шарніра. Ця незмінна фігура жорстко приєднана до землі за допомогою трьох стержнів, що не перетинаються в одній точці. Таким чином, система (рис. 10,а) геометрично незмінна й не є миттєво змінюваною.

Приклад 2. Виконати кінематичний аналіз системи (рис. 10,б).

Тому що система є шарнірно-стержневою, то для визначення її ступеня свободи використовуємо формулу

$W = 3U - 2C - C_0$	(4)
---------------------	--------------

де U – число вузлів ферми; C – число внутрішніх стержнів; C_0 – число опорних стержнів.

Тут $U=6$, $C=8$, $C_0=3$, отже,

$$W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1$$

Таким чином, система має один ступінь свободи, є механізмом і не може використовуватися як будівельна конструкція.

Приклад 3. Дослідити систему (рис. 11,а).

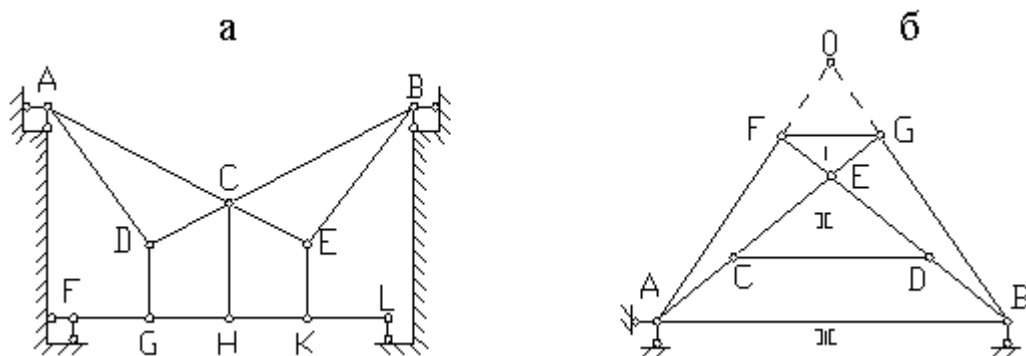


Рис. 11

Ступінь свободи системи визначимо по формулі (3):

$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 14 - 7 = -2,$

Отже, система має два зайві зв'язки. Щоб переконатися в її геометричній незмінюваності, проаналізуємо структуру системи. Тут можна виділити два незмінних трикутники ACD й EBC , які жорстко з'єднані один з одним і з землею (розглянутою як диск) за допомогою трьох шарнірів A, B, C , не лежачих на одній прямій. Стержень FN прикріплений до цієї незмінної частини системи за допомогою шарніра F й стержня CH , що не проходить через центр шарніра, так само як і стержень NL за допомогою шарніра N й опорного стержня L . Стержні DG й EK – зайві, тому що й без них система незмінна.

Приклад 4. Виконати кінематичний аналіз системи (рис. 11,б).

Використовуючи формулу (4), визначаємо число ступенів свободи системи:

$$W = 3V - 2C - C_0 = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0,$$

отже, система має необхідну кількість зв'язків, щоб бути геометрично незмінною й статично визначеною.

Проаналізуємо структуру. Виділимо незмінні трикутники FGE й CED . Стержень AB становить єдине ціле із землею (третій диск), тому що прикріплюється трьома опорними стержнями, що не перетинаються в одній точці. Щоб перевірити, чи жорстко з'єднані диски I, II, III (рис. 11,б), переконаємося, що три їхніх миттєвих центри обертання не лежать на одній прямій. Шарнір E є миттєвим центром обертання дисків I й II, а також дисків II й III, тому що тут перебуває фіктивний шарнір, що заміняє стержні AC й BD , що з'єднують ці два диски. Отже, система миттєво змінювана, тому що де б не перебував миттєвий центр обертання O дисків I й III, через нього й точку E завжди можна провести пряму, на якій будуть лежати всі три миттєвих центри обертання.

Приклад 5. Дослідити ферму (рис. 12).

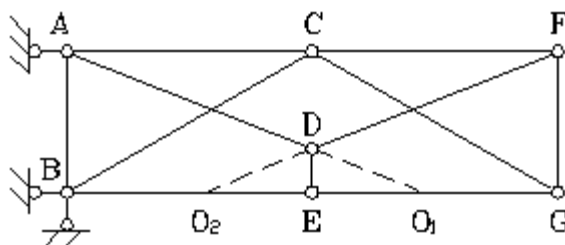


Рис. 12

По формулі (4) визначаємо ступінь свободи ферми: $W = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$, отже, система може бути геометрично змінюваною й статично визначеною.

Проаналізуємо систему. Вона складається із трьох дисків – трикутники ABC , CFG і стержень DE , зв'язаних між собою стержнями BE , AD , EG , DF , які можна замінити фіктивними шарнірами O_1 , O_2 і шарніром C . Отже, можна зробити висновок: всі стержні з'єднані між собою жорстко й прикріплюються до землі так само жорстко за допомогою трьох стержнів, що не перетинаються в одній точці.

Для перевірки системи на миттєву змінюваність застосуємо *спосіб нульового навантаження* – визначимо опорні реакції й зусилля у всіх стержнях за умови, що зовнішнього навантаження немає. З умов рівноваги всієї системи ($\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum Y = 0$) знаходимо, що опорні реакції дорівнюють нулю. Вирізуючи вузол E і проектуючи всі сили на вертикаль, знаходимо, що зусилля у вертикальному стержні $N_{DE} = 0$. Потім, записуючи рівняння проєкцій двох сил, що сходяться у вузлі D (третя сила – $N_{DE} = 0$), на напрямки нормалей до цих стержнів, знаходимо, що зусилля в стержнях DA і DF також дорівнюють нулю. Нарешті, розглядаючи рівновагу вузлів A , F , B , G , знаходимо, що зусилля у всіх стержнях системи при відсутності навантаження дорівнюють нулю, отже, система незмінна.

Приклад 6. Виконати кінематичний аналіз системи (рис. 13,а).

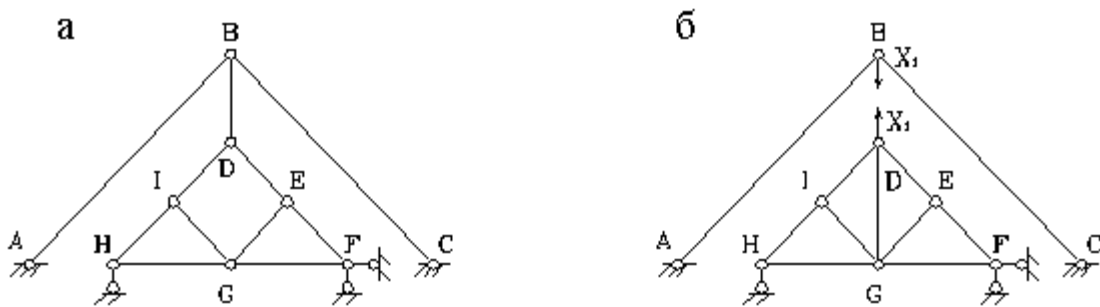


Рис. 13

По формулі (4) визначаємо ступінь свободи: $W = 2 \cdot 9 - 11 - 7 = 0$,

тобто система має необхідний мінімум зв'язків, щоб бути геометрично незмінною. Для перевірки того, чи є система дійсно незмінною, використовуємо *метод заміни стержнів*. Виберемо замінюючу систему (рис. 13,б). Тут відкинутий стержень BD , а його дія замінена силами X_1 , і доданий замінюючий стержень DG . Обрана замінююча система, незмінна: стержні AB , BC і земля жорстко з'єднані трьома шарнірами, що не лежать на одній прямій. А нижня частина системи незмінна, оскільки складається із трикутника (наприклад, GHI), до якого жорстко прикріплені всі інші вузли за допомогою діад, і все це прикріплено до землі трьома опорними стержнями.

Тепер визначимо зусилля в замінюючому стержні від сил $X_1 = 1$. Вирізуючи послідовно вузли E , I , G і розглядаючи їхню рівновагу, одержимо, що зусилля в замінюючому стержні дорівнює нулю, отже, вихідна система - миттєво змінювана.

Плоскі ферми

1. Класифікація ферм

Фермою називається стержнева система, що залишається геометрично незмінною після умовної заміни її жорстких вузлів шарнірними. Як правило, ферми використовують для перекриття більших прольотів, коли застосування суцільних балок стає економічно не вигідним внаслідок неповного використання матеріалу стінки, де напруги істотно менші, ніж у полках (рис. 1), і необхідності стовщення вертикальної стінки у зв'язку з можливістю її випучування.

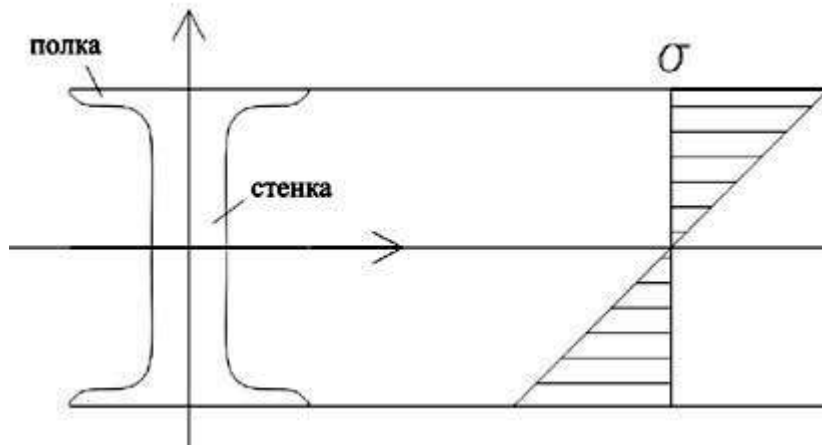


Рис. 1

У таких випадках суцільну балку замінюють стержневою системою - фермою, елементи якої (стержні) при дії зосереджених навантажень, прикладених у вузлах, працюють, в основному, на центральне розтягування-стиск, що дає можливість істотно краще використовувати матеріал конструкції, тому що напруги розподіляються практично рівномірно. Ферма легше балки із суцільною стінкою при однакових прольоті й висоті.

Іноді використовуються *просторові ферми*, розрахунок яких звичайно зводиться до розрахунку декількох плоских ферм.

Відстань між осями опор ферми називається її *прольотом*. Стержні, розташовані по зовнішньому контуру, називаються *поясними* й утворюють пояси. Вертикальні стержні, що з'єднують пояси, називаються *стійками*, похилі – *розкосами*. Сійки й розкоси утворюють *грати* ферми. Відстань між сусідніми вузлами пояса ферми називається *панеллю*.

Класифікацію ферм звичайно проводять по *п'яти ознаках*:

- 1) характеру обрису зовнішнього контуру;
- 2) типу грат;
- 3) типу обпирання ферми;
- 4) призначенню;
- 5) рівню їзди.

По характеру обрису розрізняють ферми з паралельними поясами й з ламаним, або полігональним розташуванням поясів (рис. 2).

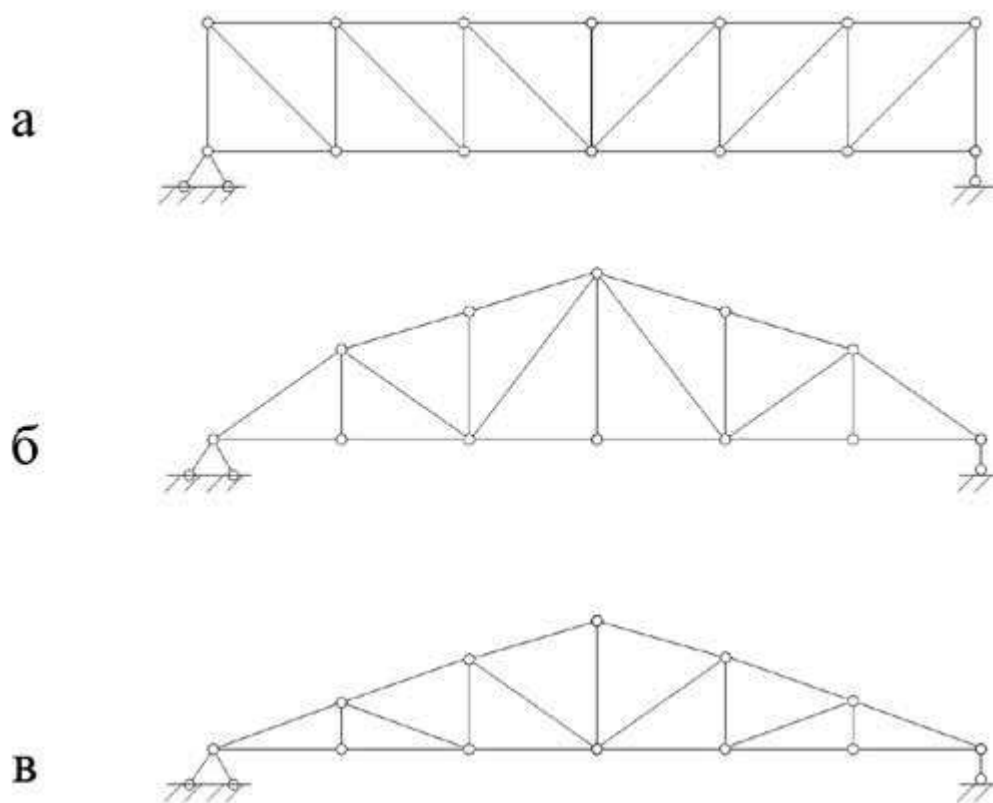


Рис. 2

По типу ґрат розрізняють ферми із трикутними ґратами (рис. 3,а), з розкісними (рис. 3,б), з напіврозкісними (рис. 3,в), і з ромбічними (рис. 3,г).

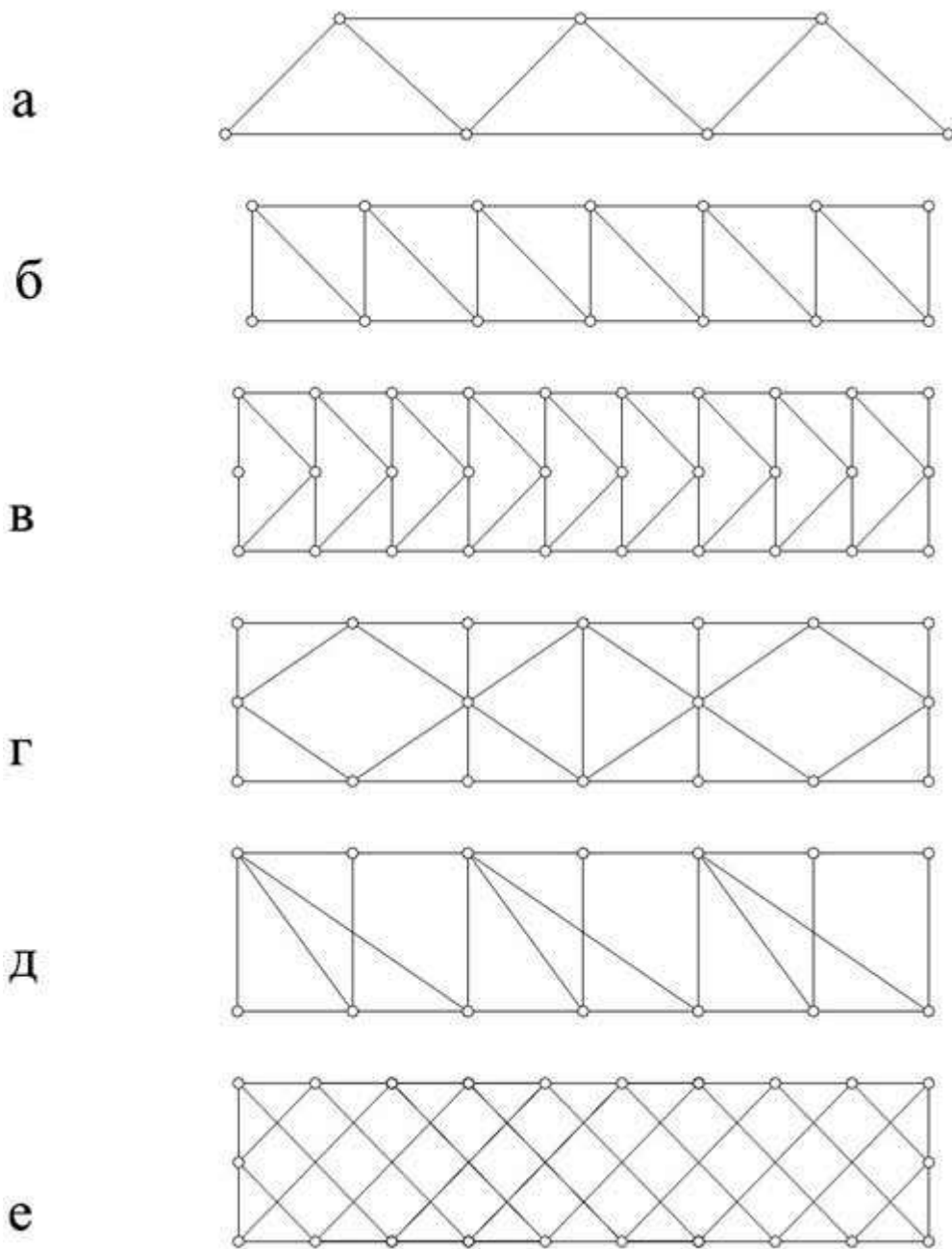


Рис. 3

По типу обпирання ферми можуть бути закріплені з обох кінців – балковими (рис. 4,а) або арковими (рис. 4,б,в), консольними (рис. 4,г), балочно-консольними (рис. 4,д).

Залежно від призначення розрізняють ферми стропильні, кранові, баштові, мостові.

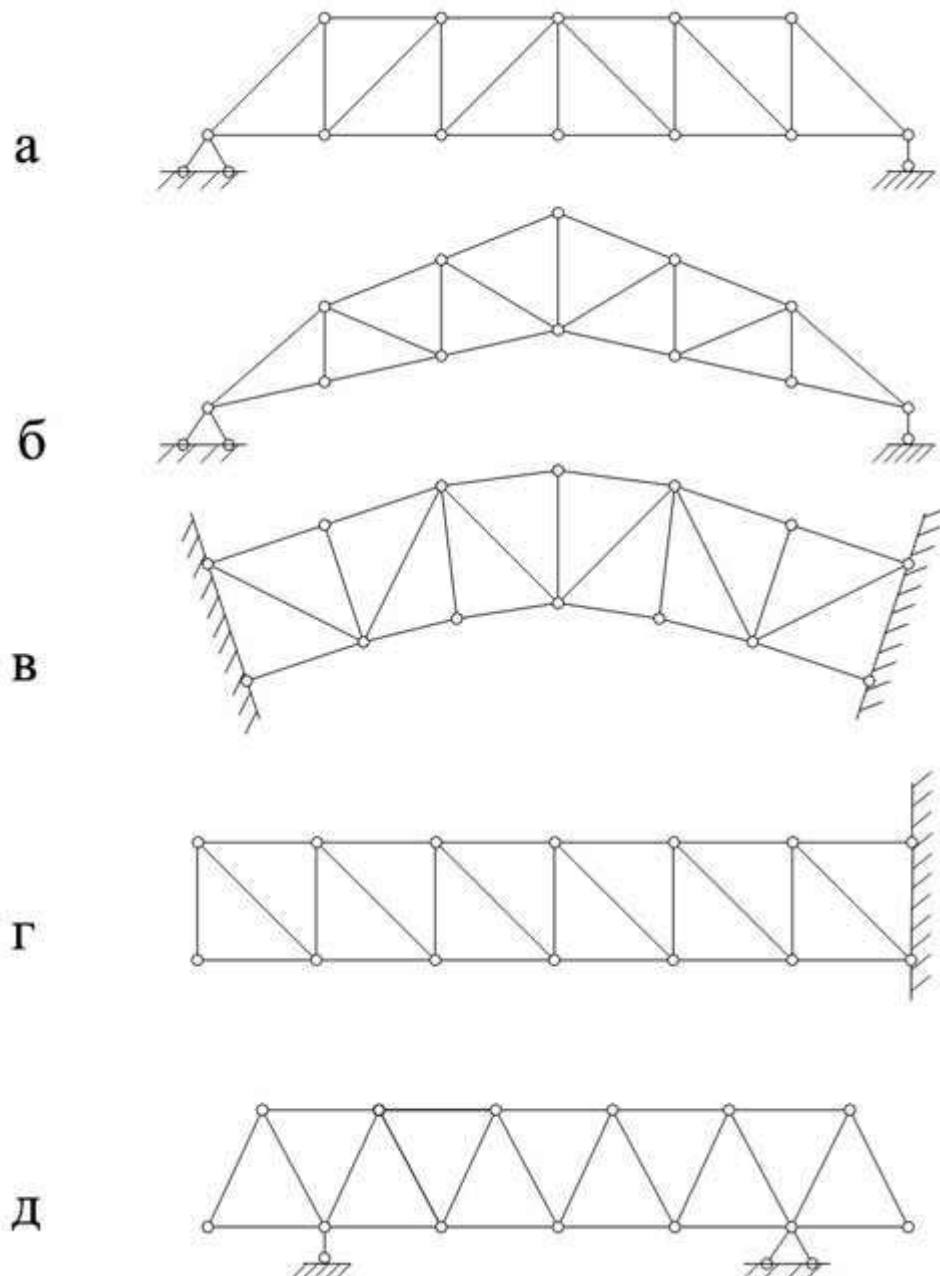


Рис. 4

Мостові ферми залежно від *рівня їзди* діляться на ферми з їздою понизу, з їздою поверху й з їздою посередині.

2. Визначення зусиль у стержнях найпростіших ферм

Найпростішими називаються ферми, утворені із шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів, причому, кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій.

Такі ферми завжди будуть геометрично незмінними й статично визначеними.

Для визначення опорних реакцій такої ферми можна скласти три рівняння рівноваги.

Внутрішні зусилля (повздовжні сили) визначають, виділяючи перетинами вузли або окремі частини ферми й розглядаючи умови їхньої рівноваги під дією зовнішніх навантажень і зусиль у розсічених стержнях. Якщо K - число вузлів ферми, то можна скласти $2K-3$ незалежних рівнянь рівноваги. Визначення внутрішніх зусиль можна виконувати різними способами: 1) *способом моментної точки*; 2) *способом проєкцій*; 3) *способом заміни стержнів* (звичайно використовується при розрахунку складних ферм); 4) *графічним способом*.

2.1. Спосіб моментної точки

Цей спосіб звичайно використовується в тих випадках, коли вдається провести перетин ферми так, щоб перерізними виявилися три її стержні, напрямки осей яких не перетинаються в одній точці.

Формуючи послідовно рівняння сум моментів всіх зовнішніх сил, що діють на відсічену частину ферми, щодо кожної з момент них точок (точок перетинання осей перерізнаних стержнів), будемо одержувати щораз рівняння з одним невідомим - зусиллям у розсіченому стержні, вісь якого не проходить через розглянуту моментну точку.

При складанні рівнянь рівноваги всі невідомі зусилля в стержнях умовно приймаються позитивними, тобто розтягуючи ми і, отже, спрямованими від вузлів. Якщо в результаті розрахунку зусилля виявиться негативним, виходить, воно є стискаючим і спрямованим до вузла.

Зусилля в елементах ферми звичайно прийнято позначати так:

- в елементах нижнього пояса;
- в елементах верхнього пояса;
- зусилля в розкосах;
- зусилля в стійках;

де m , n — номери вузлів, що з'єднуються стержнем.

Розглянемо ферму (рис. 5,а).

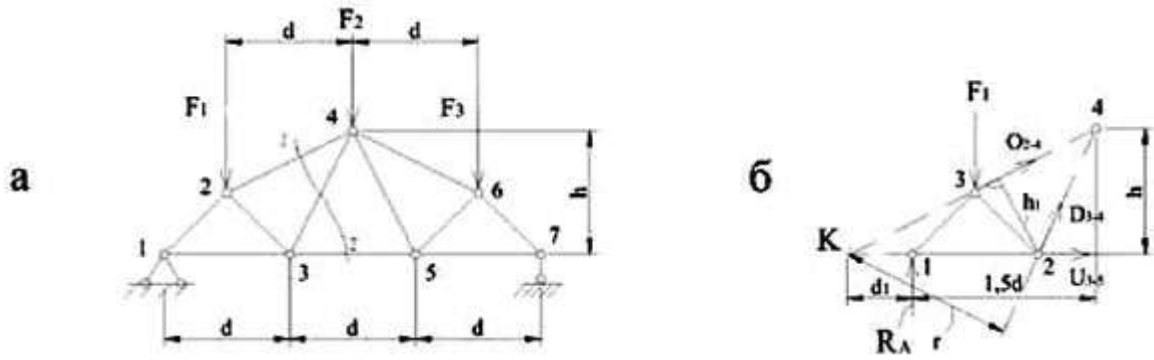


Рис. 5

Для визначення зусиль у стержнях 2-4, 3-4, 3-5 розсічемо ферму перетином $I-I$, що перетинає всі ці стержні. Як видно (рис. 5,а), перетин $I-I$ повністю розсікає ферму на дві частини (“наскрізь”), тому в літературі іноді зустрічається інша назва способу моментної точки – *спосіб наскрізних перетинів*.

Для визначення зусилля U_{3-5} складемо суму моментів всіх сил, що діють на ліву частину ферми, щодо точки перетинання стержнів 2-4 і 3-4 – точки 4. Ця точка і є *моментною* при визначенні зусилля U_{3-5} :

$$\sum M_4^{лев} = 0: R_a \cdot 1,5d - F_1 \cdot d - U_{3-5} \cdot h = 0;$$

$$U_{3-5} = \frac{R_a \cdot 1,5d - F_1 \cdot d}{h} = \frac{M_4^0}{h};$$

де M_4^0 — момент всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини ферми, щодо вузла 4, дорівнює згинаючому моменту у звичайній шарнірній балці в перетині, що відповідає по розташуванню моментній точці 4. Звідси слідує *висновок*: зусилля в елементі нижнього поясу ферми дорівнює відношенню згинаючого (балкового) моменту у відповідному перетині простої балки до плеча (у цьому випадку - h).

При визначенні зусилля в елементі 2-4 моментною буде точка 3 (рис. 5,б). Запишемо суму моментів всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини, щодо цієї точки:

$$\sum M_3^{лев} = 0: R_a \cdot d - F_1 \cdot 0,5d + O_{2-4} \cdot h = 0;$$

$$O_{2-4} = -\frac{R_a \cdot d - F_1 \cdot 0,5d}{h} = -\frac{M_3^0}{h_1}.$$

Тому що балковий момент M_3^0 при заданому навантаженні позитивний, то зусилля $O_{24} < 0$, тобто стержень 2-4 стиснутий.

При визначенні зусилля в розкосі 3-4 моментна точка (точка K) лежить поза контуром ферми (рис. 5,б):

$$\sum M_K^{лев} = 0: R_a \cdot d_1 - F_1(d_1 + 0,5d) + D_{3-4} \cdot r = 0,$$

$$D_{3-4} = \frac{-R_a \cdot d + F_1(d_1 + 0,5d)}{r} = \frac{M_K^0}{r}.$$

Спосіб моментної точки можна використовувати не тільки при розрахунку найпростіших ферм, але й при визначенні зусиль у деяких стержнях складних ферм (відповідні приклади розрахунку будуть розглянуті нижче).

Можна рекомендувати наступні *межі застосовності способу моментної точки*:

1. Коли вдається провести перетин, що розсікає крім розглянутого стержня будь-яке число стержнів, що сходяться в одній загальній точці, що не лежить на осі даного стержня (моментна точка).

2. Коли розріз перетинає більше трьох стержнів, що не сходяться в одній точці якщо зусилля у всіх стержнях, крім трьох, відомі.

Коли можна провести перетини, що перетинають будь-яке число стержнів більше трьох, якщо при цьому кожний з додаткових (понад три) стержнів перетинається двічі (при цьому виділені перетином такі стержні будуть урівноважені зусиллями, покладеними по їхніх кінцях).

2.2. Спосіб проекцій

Цей спосіб застосовується у двох варіантах:

1) розглядається рівновага відсіченої частини ферми, коли два з розсічених стержнів паралельні один одному; 2) розглядається рівновага виділеного вузла (*спосіб вирізання вузлів*).

Для ілюстрації першого варіанта розглянемо ферму (рис. 6) і визначимо зусилля в стійці 5-6 і розкосі 6-7.

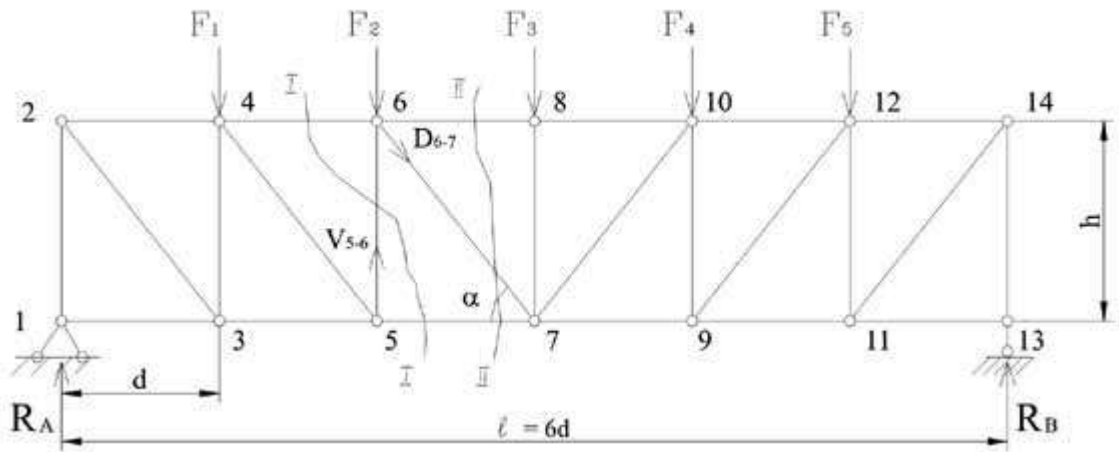


Рис. 6

Для визначення зусилля V_{5-6} розріжемо ферму перерізом 1-2. Так як стержні 4-5 і 5-7 паралельні один одному, то моментна точка перебуває в нескінченності й спосіб моментної точки не можна застосовувати. Складемо умову рівноваги - суму проекцій всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини, на вертикальну вісь:

$$\sum Y = 0: R_a - F_1 + V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = -(R_a - F_1) = -Q^0,$$

де Q^0 – балкова поперечна сила.

Для визначення зусилля D_{6-7} проведемо перетин 2-2. З розгляду лівої відсіченої частини:

$$\sum Y = 0: R_a - F_1 - F_2 - D_{6-7} \sin \alpha = 0;$$

$$D_{6-7} = \frac{R_a - F_1 - F_2}{\sin \alpha} = \frac{Q^0}{\sin \alpha}.$$

Тепер розглянемо другий варіант способу проекцій – *спосіб вирізання вузлів*. Застосовуючи його послідовно до кожного вузла, можна визначити зусилля у всіх стержнях ферми, причому, починати потрібно з вузла, у якому сходяться два стержні (рис. 7,а).

Визначимо зусилля в стержнях 1-2, 1-3, 2-3, 3-5. Виріжемо вузол 1 і розглянемо умови його рівноваги (рис. 7,б).

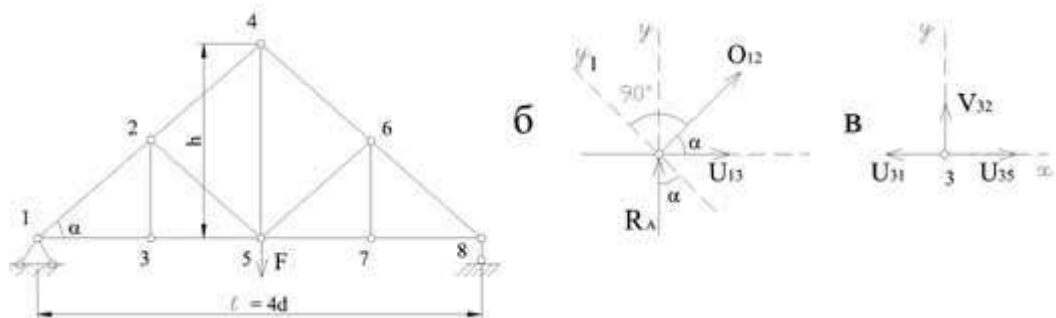


Рис. 7

Для визначення зусилля O_{12} спроектуємо всі сили на вертикальну вісь:

$$\sum Y = 0: R_a + O_{12} \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_{12} = -\frac{R_a}{\sin \alpha}.$$

Для визначення зусилля U_{13} проведемо допоміжну вісь y , перпендикулярну напрямку O_{12} :

$$\sum Y_1 = 0: R_a \cos \alpha - U_{13} \sin \alpha = 0 \Rightarrow U_{13} = R_a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Зусилля U_{13} можна визначити й з умови $\sum X = 0$, але тоді воно буде виражено через знайдене раніше зусилля O_{12} :

$$\sum X = 0: U_{13} + O_{12} \cos \alpha = 0 \Rightarrow U_{13} = -O_{12} \cos \alpha.$$

Для визначення зусиль у стержнях 2-3 і 3-5 виріжемо вузол 3 (рис. 7,в):

$$\sum X = 0: -U_{13} + U_{35} = 0 \Rightarrow U_{35} = U_{13};$$

$$\sum Y = 0; V_{32} = 0.$$

Останній результат дозволяє зробити висновок про те, що якщо у вузлі сходяться три стержні, два з яких лежать на одній прямій, то зусилля в цих двох стержнях при відсутності у вузлі зовнішнього навантаження рівні один одному, а зусилля в третьому стержні при будь-якому його розташуванні (стійка, розкіс) дорівнює нулю.

Якщо продовжити визначення зусиль у стержнях фермах, вирізавши, наприклад, вузол 2 (рис.3,7,а), то вони будуть визначатися через обчислені раніше зусилля, отже, при розрахунку ферми способом вирізання вузлів зусилля в деяких стержнях можна знайти, тільки визначивши попередньо зусилля в інших стержнях, а це означає нагромадження погрешностей у процесі розрахунку.

На закінчення відмітимо, що якщо до кута, у якому сходяться два стержні, що не лежать на одній прямій, не прикладене зовнішнє навантаження, то зусилля в обох стержнях дорівнюють нулю. Такі стержні звичайно називаються нульовими.

2. Спосіб заміни стержнів

При визначенні зусиль у складних фермах, як правило, доводиться розв'язувати системи рівнянь. Але в деяких випадках складну ферму можна перетворити в найпростішу або в систему, при розрахунку якої не потрібно спільного розв'язання рівнянь. Для цього у вихідній системі видаляються певні стержні й вводяться інші – замінюючі. Так як в заданій замінюючій системі стержнів немає,

то для визначення зусиль можна скласти додаткові рівняння, що виражають рівність нулю зусиль у кожному замінюючому стержні. Такий спосіб розрахунку називається *способом заміни стержнів*.

Розглянемо складну ферму (рис. 8,а). При використанні для визначення зусиль у стержнях такої ферми способу моментної точки або способу проекцій приводить до розв'язання системи рівнянь.

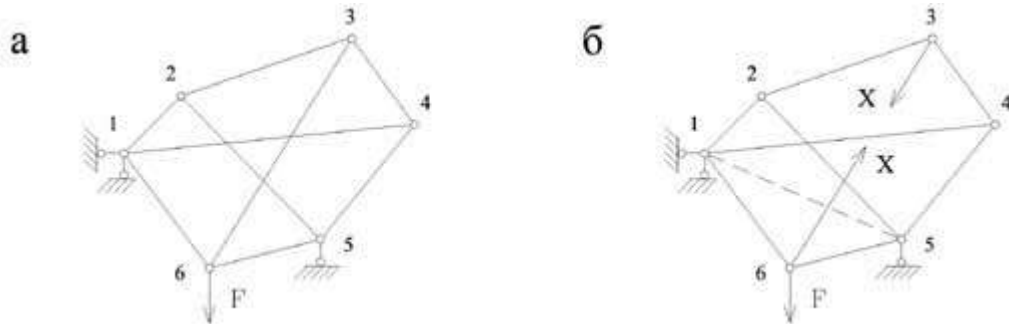


Рис. 8

Замінімо стержень 6-3 стержнем 1-5. Така заміна перетворить ферму в найпростішу й не являється єдиною можливою. Легко переконатися, що отримана система (рис. 8,б) є геометрично незмінною.

Для визначення зусиль у перетвореній системі можна використовувати один з розглянутих раніше способів, наприклад, спосіб вирізання вузлів. Якщо сили X у замінюючому стержні 3-6 підібрати так, що зусилля в замінюючому стержні 1-5 буде дорівнює нулю, то обидві системи (рис. 8,а,б) будуть еквівалентні, а зусилля в їхніх відповідних стержнях – однаковими.

На підставі принципу незалежності дії сил зусилля в будь-якому i -ому елементі (як заданої, так і перетвореної системи) може бути знайдене по формулі

$$N_i = N_{iF} + \bar{N}_{iX} X,$$

де N_{iF} – зусилля в перетвореній системі від заданого навантаження, $\bar{N}_{iX}$ – зусилля від одиничної сили $\bar{X} = 1$.

Обчислене по цій формулі зусилля N_e в замінюючому стержні повинне дорівнювати нулю, тому що в заданій системі цього стержня немає:

$$N_e = N_{eF} + \bar{N}_{eX} X = 0,$$

звідки

$$X = -\frac{N_{eF}}{\bar{N}_{eX}}.$$

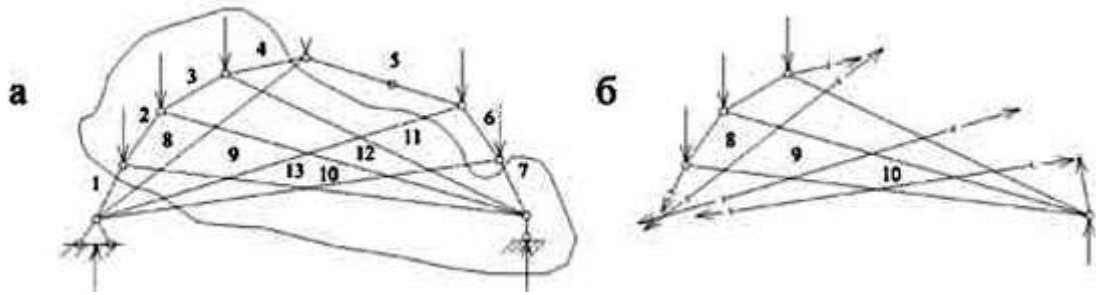


Рис. 9

Проведемо замкнутий переріз так, щоб три стержні (1, 4, 7) перетиналися по одному разу, а стержні 8, 9, 10 - по два рази. Розглянемо рівновагу відсіченої частини ферми всередині замкнутого контуру (рис. 9,б). Зусилля в стержнях 8, 9, 10, перерізаних замкнутим перерізом двічі, урівноважуються. А зусилля в стержнях 1, 4, 7 можна визначити способом моментної точки, після чого легко визначити зусилля в інших стержнях ферми.

Спосіб спільних перерізів

Застосування цього способу приводить до системи двох рівнянь із двома невідомими. Спосіб використовується в тих випадках, коли вдається провести два перерізи таким чином, що кожен з них містить чотири невідомих, причому якісь два невідомих зусилля повторюються в обох перерізах. Нижче буде розглянутий приклад визначення зусиль способом спільних перерізів.

Графічний спосіб визначення зусиль (діаграма Максвелла-Кремони)

Цей спосіб заснований на графічному прийомі розкладання сили на два напрямки й полягає в наступному: буквами або цифрами позначають полігони (поля), тобто площі, обмежені з усіх боків стержнями або примикаючі до зовнішнього контуру ферми, і відділені один від одного зовнішніми силами, включаючи опорні реакції (рис. 10).

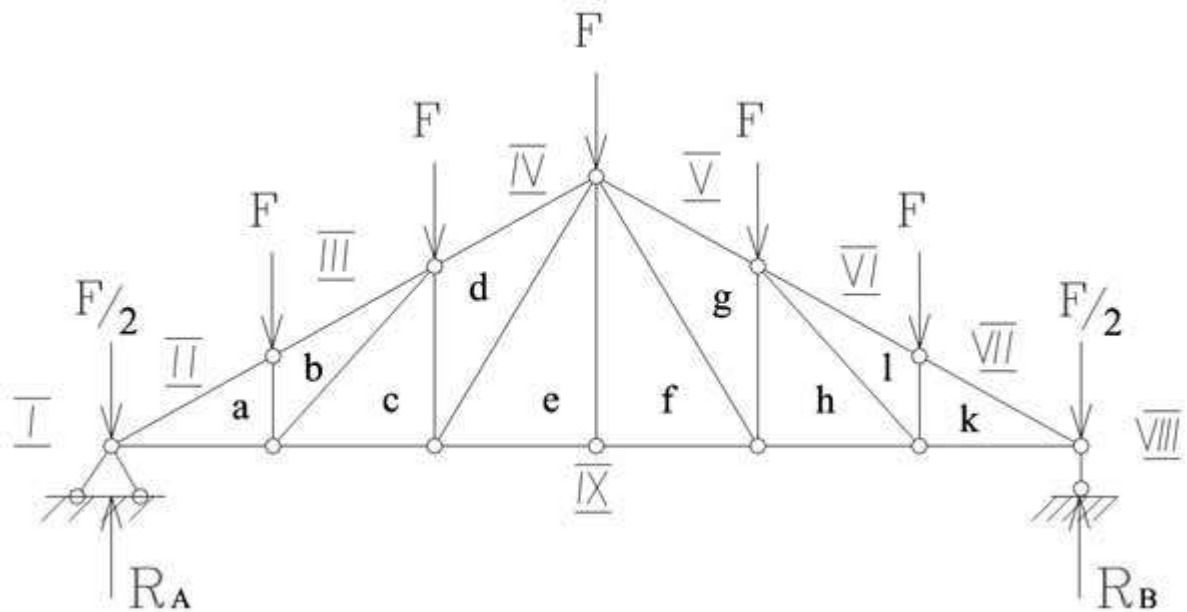


Рис. 10

У результаті кожне внутрішнє зусилля й кожна зовнішня сила позначаються двома значками, що відповідають назвам тих полігонів, границею яких ця зовнішня сила або зусилля є. Будують багатокутник сил на зовнішніх силах, включаючи опорні реакції. Кожна із сил цього багатокутника позначається буквами або цифрами, поставленими на її кінцях, при цьому зберігається напрямок сил.

Потім вибирають вузол, у якому сходяться два стержні. Прикладену у вузлі силу розкладають по напрямках цих стержнів, у результаті чого визначають значення й напрямки діючих у них зусиль (напрямки визначають розтягання-стиск). Розкласти сили на дві складові можна побудовою силового трикутника. Такий трикутник повинен бути замкнутим, тому що вузол, для якого він будується, перебуває в рівновазі. Якщо до вузла прикладені дві й більше відомі сили, то будують багатокутник рівноваги відомих і невідомих сил. Після цього переходять до наступного вузла й для нього проводять аналогічні побудови. У такий спосіб визначають зусилля в усіх стержнях ферми.

2.5. Приклади розрахунку ферм на нерухоме навантаження

Покажемо застосування розглянутих вище способів визначення зусиль у стержнях ферм на конкретних прикладах.

Приклад 1. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 11), використовуючи спосіб вирізання вузлів і спосіб моментної точки ($F = 50kH$; $d = h = 1m$).

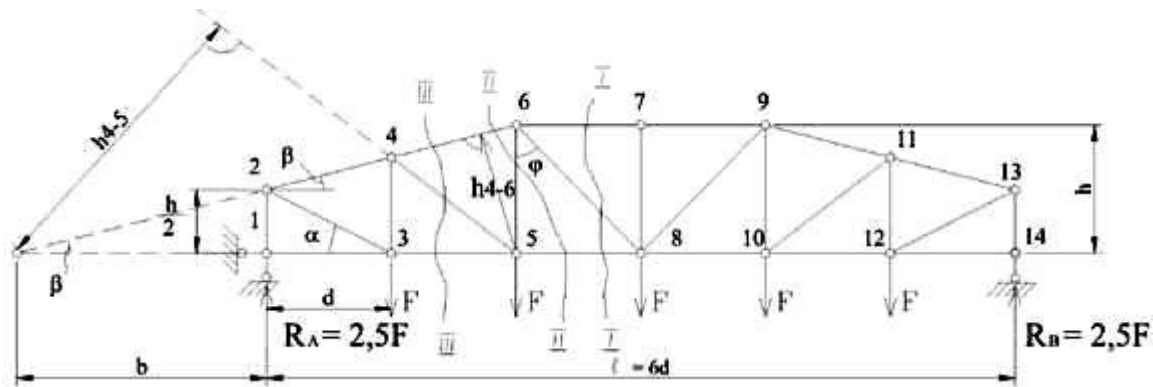


Рис. 11

Розв'язання.

Почнемо з визначення опорних реакцій.

Так як навантаження симетричне, то очевидно

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \sum F = \frac{5F}{2} = 125 \text{ kH}.$$

Виріжемо вузол 1 (рис. 12,а). З рівняння проєкцій на вертикальну вісь знаходимо:

$$\sum Y = 0: V_{12} + R_A = 0 \Rightarrow V_{12} = -R_A = -125 \text{ kH}$$

З рівняння проєкцій на горизонтальну вісь випливає, що $U_{13} = 0$, тобто стержень 1-3 є нульовим.

Виріжемо вузол 2 (рис. 12,б) і проведемо допоміжні осі z_{23} , перпендикулярну стержню 2-3, і z_{24} , перпендикулярну стержню 2-4.

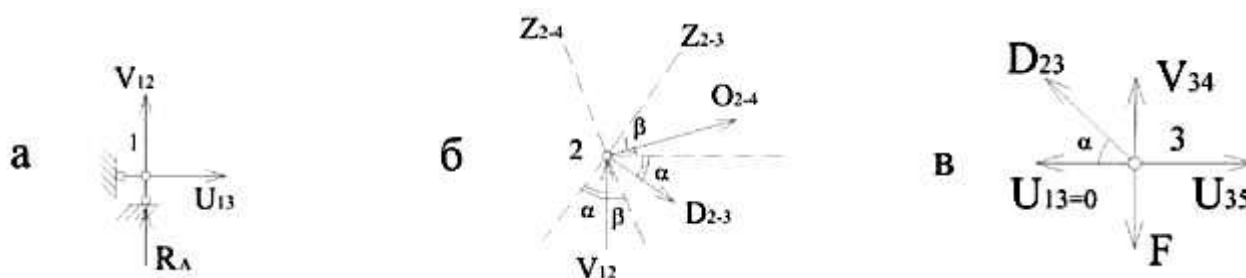


Рис. 12

$$\sum Z_{23} = 0: V_{12} \cos \alpha + O_{24} \sin(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow O_{24} = -\frac{V_{12} \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{125 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Вирішуючи суґубо геометричну задачу, знаходимо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5h}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,56^\circ; \quad \sin \alpha = 0,45; \quad \cos \alpha = 0,89;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5h}{2d} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 14,04^\circ; \quad \sin \beta = 0,24; \quad \cos \beta = 0,97;$$

$$\alpha + \beta = 40,6^\circ; \quad \sin(\alpha + \beta) = 0,65.$$

$$\sum Z_{24} = 0: \quad V_{12} \cos \beta + D_{24} \sin(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow D_{24} = \frac{V_{12} \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{125 \cdot 0,97}{0,65} = 186,54 \text{ kH}.$$

$$O_{24} = -\frac{125 \cdot 0,89}{0,65} = -171,15 \text{ kH}.$$

Тепер виріжемо вузол 3 (рис. 12,в). Проектуючи всі сили на вісь y , знайдемо зусилля V_{34} :

$$\sum Y = 0: \quad D_{23} \sin \alpha + V_{34} - F = 0 \Rightarrow V_{34} = F - D_{23} \sin \alpha = 50 - 186,54 \cdot 0,45 = 33,94 \text{ kH},$$

а із суми проекцій на вісь x - зусилля U_{35} :

$$\sum X = 0: \quad -D_{23} \cos \alpha + U_{35} = 0 \Rightarrow U_{35} = D_{23} \cos \alpha = 186,54 \cdot 0,89 = 166 \text{ kH}.$$

Послідовно вирізуючи вузли 4, 5, ..., 14, можна визначити зусилля в усіх стержнях ферми. Причому, при вирізанні вузла 13 виявиться, що два рівняння рівноваги будуть містити одне невідоме зусилля V_{13-14} , тому одне з рівнянь можна використовувати для перевірки. А при вирізанні вузла 14 обоє рівняння рівноваги будуть перевірочними.

З наведених вище обчислень випливає, що спосіб вирізання вузлів приводить до нагромадження погрішностей, тому що наступне зусилля обчислюється через попереднє.

Цього недоліку можна уникнути, якщо використовувати для розрахунку спосіб моментної точки. Визначимо цим способом зусилля в стержнях 6-7, 6-8, 5-8, 5-6, 4-6, 4-5, (рис. 11).

Проведемо переріз I-I і визначимо з рівноваги лівої частини:

$$\sum M_6^{\text{лев}} = 0: \quad R_A \cdot 2d - F \cdot d - U_{5-8} \cdot h = 0;$$

$$U_{5-8} = \frac{4Fd}{h} = 200 \text{ kH}.$$

$$\sum M_8^{\text{лев}} = 0: \quad R_A \cdot 3d - F \cdot 2d - F \cdot d + O_{6-7} \cdot h = 0;$$

$$O_{6-7} = -\frac{4,5Fd}{h} = -225 \text{ kH}$$

Зусилля D_{6-8} знайдемо способом проєкцій:

$$\sum Y^{лев} = 0: R_A - F - F - D_{6-8} \cos \varphi = 0$$

($\varphi = 45^\circ$, тому що $h = d$);

$$D_{6-8} = \frac{0,5F}{\cos 45^\circ} = 35,36 \text{ kH}$$

Проведемо переріз II – II:

$$\sum M_k^{лев} = 0: R_A \cdot b - F \cdot (b + 2d) - F(b + d) + V_{5-6}(b + 2d) = 0.$$

З геометричних міркувань:

$$b + 2d = h \operatorname{ctg} \beta = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}; \quad b = 4 - 2d = 2 \text{ м},$$

$$\text{тоді } V_{5-6} = \frac{2F}{4} = 25 \text{ kH}.$$

$$\sum M_5^{лев} = 0: R_A \cdot 2d - F \cdot d + O_{4-6} \cdot h_{4-6} = 0,$$

$$h_{4-6} = (b + 2d) \sin \beta = 4 \cdot 0,24 = 0,96 \text{ м};$$

$$O_{4-6} = -\frac{4F}{0,96} = -208,4 \text{ kH}.$$

Для визначення зусилля D_{4-5} проводимо переріз III – III:

$$\sum M_k^{лев} = 0: -R_a + F(b + d) + D_{4-5}h_{4-5} = 0;$$

$h_{4-5} = 2,4 \text{ м}$ (рекомендуємо переконатися в цьому самостійно!) і тоді

$$D_{4-5} = \frac{2F}{h_{4-5}} = 41,67 \text{ kH}.$$

Приклад 2. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 13), використовуючи спосіб спільних перерізів ($F = 100 \text{ kH}$).

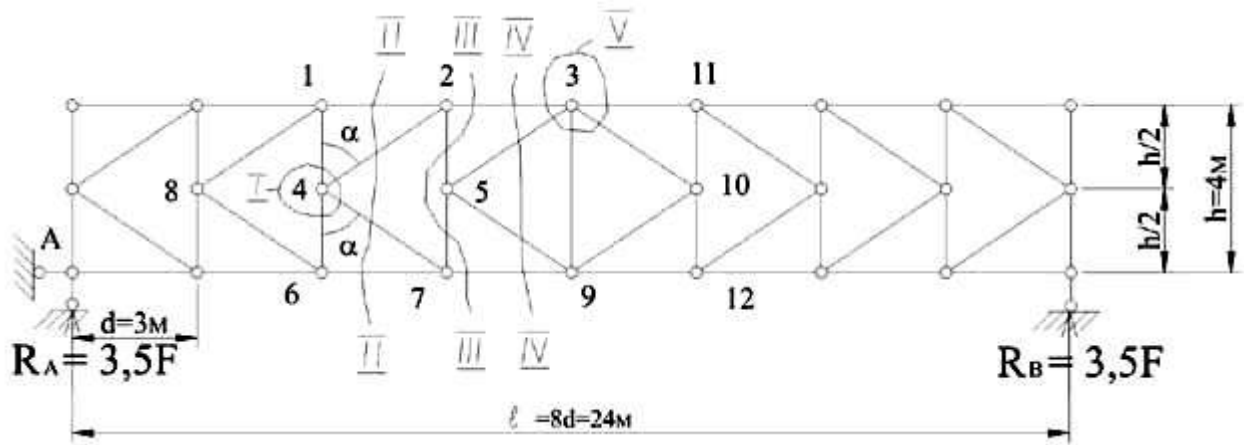


Рис. 13

Розв'язання.

Виріжемо вузол 4 круговим перерізом I (рис. 13) і складемо рівняння проєкцій на горизонтальну вісь (рис. 14,а):

$$\sum X = 0: D_{4-2} \sin \alpha + D_{4-7} \sin \alpha = 0 \Rightarrow D_{4-2} = -D_{4-7}.$$

Тепер розріжемо ферму перерізом II – II і, розглядаючи рівновагу лівої частини, складемо суму проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y_{\text{лев}} = 0: D_{4-2} \cos \alpha - D_{4-7} \cos \alpha + 3,5F - F - F = 0;$$

$$D_{4-7} = \frac{0,75F}{\cos \alpha} = \frac{0,75 \cdot 100}{0,555} = 135 \text{ kH},$$

де $\alpha = 56,3^\circ$, що легко визначити з геометричних міркувань.

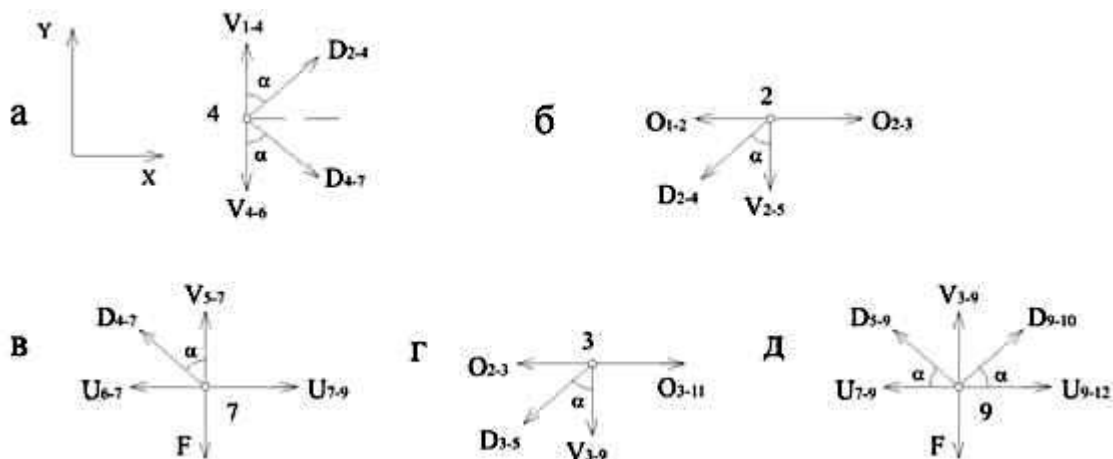


Рис. 14

Вирізуємо вузол 2 (рис. 14,б) і проектуємо всі сили на вертикальну вісь, визначимо зусилля в стержні 2-5, а вирізуємо вузол 7 (рис. 14,в) - зусилля в стержні 5-7:

$$\sum Y_2 = 0: -D_{2-4} \cos \alpha - V_{2-5} = 0 \Rightarrow V_{2-5} = 0,75F = 75 \text{ kH};$$

$$\sum Y_1 = 0: D_{4-7} \cos \alpha + V_{5-7} - F = 0 \Rightarrow V_{5-7} = 0,25F = 25 \text{ kH}.$$

Для визначення зусиль у стержнях 2-3 і 7-9 проведемо переріз III – III (рис. 13) і складемо суми моментів лівих сил:

$$\sum M_7^{\text{лев}} = 0: 3,5F \cdot 3d - F \cdot 2d - Fd + O_{2-3}h = 0 \Rightarrow O_{2-3} = -\frac{7,5Fd}{h} = -1000 \text{ kH},$$

$$\sum M_2^{\text{лев}} = 0: 3,5F \cdot 3d - F \cdot 2d - Fd - U_{7-9}h = 0 \Rightarrow U_{7-9} = \frac{7,5Fd}{h} = 10000 \text{ kH}.$$

Для визначення зусилля в стержні 3-9 виріжемо круговим перерізом вузол 5 (рис. 13) і з рівняння проєкцій на горизонтальну вісь знайдемо $D_{5-3} = -D_{5-9}$, а потім проведемо перетріз IV – IV, відкинемо праву частину, а для лівої частини складемо рівняння проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0: D_{5-3} \cos \alpha - D_{5-9} \cos \alpha + 3,5F - 3F = 0,$$

звідки

$$D_{5-3} = -\frac{0,25F}{\cos \alpha} = -45 \text{ kH}; \quad D_{5-9} = 45 \text{ kH}.$$

Виходячи із симетрії ферми й навантаження, зусилля в симетрично розташованих стержнях 3-5 і 3-10, а також 5-9 і 9-10 рівні. Тоді, вирізуємо круговим перерізом у вузол 3, із суми проєкцій на вертикальну вісь (рис. 14,г) знайдемо:

$$\sum Y = 0: -D_{3-5} \cos \alpha - D_{3-10} \cos \alpha - V_{3-9} = 0 \Rightarrow V_{3-9} = 0,5F = 50 \text{ kH}.$$

Цей же результат можна одержати, якщо вирізати вузол 9 і скласти рівняння проєкцій всіх сил на вісь у (рис. 14,д).

Приклад Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 15), використовуючи спосіб замкнутих перерізів.

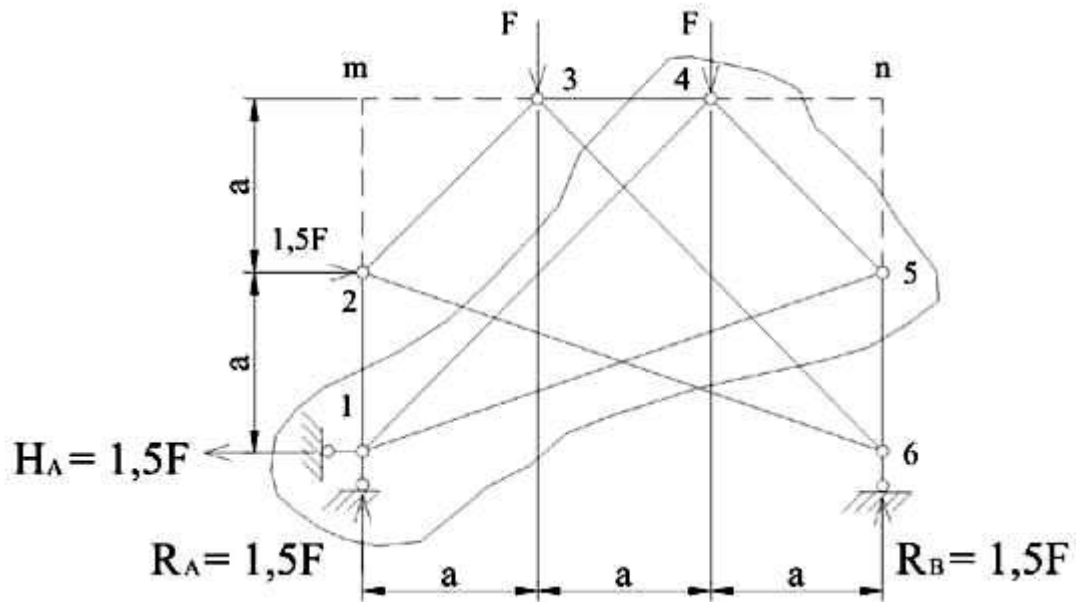


Рис. 15

Розв'язання.

Визначивши з умов рівноваги ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M_a = 0$, $\sum M_b = 0$) опорні реакції, проведемо замкнутий переріз, що охоплює вузли 1, 4, 5 (рис. 15), і розглянемо рівновагу частини ферми, розташованої всередині цього перерізу. При цьому рівняння сум моментів складемо щодо точок m і n , що лежать на перетинанні стержня 3-4 зі стержнями 1-2 і 5-6 відповідно. Зусилля в стержнях 3-6 і 2-6 у рівняння рівноваги не ввійдуть, тому що ці стержні двічі перетинаються замкнутим перерізом і зусилля в них взаємно врівноважуються.

$$\sum M_m = 0: 1,5F \cdot 2a + V_{5-6} \cdot 3a + F \cdot 2a = 0: V_{5-6} = -5F/3;$$

$$\sum M_n = 0: 0,5F \cdot 3a + 1,5F \cdot 2a - F \cdot a + V_{1-2} = 0: V_{1-2} = -7F/6;$$

$$\sum X = 0: -1,5F - O_{3-4} = 0: O_{3-4} = -1,5F.$$

Використовуючи отримані результати, способом вирізання вузлів можна визначити зусилля у всіх інших стержнях ферми.

Приклад 4. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 16,а) способом заміни стержнів.

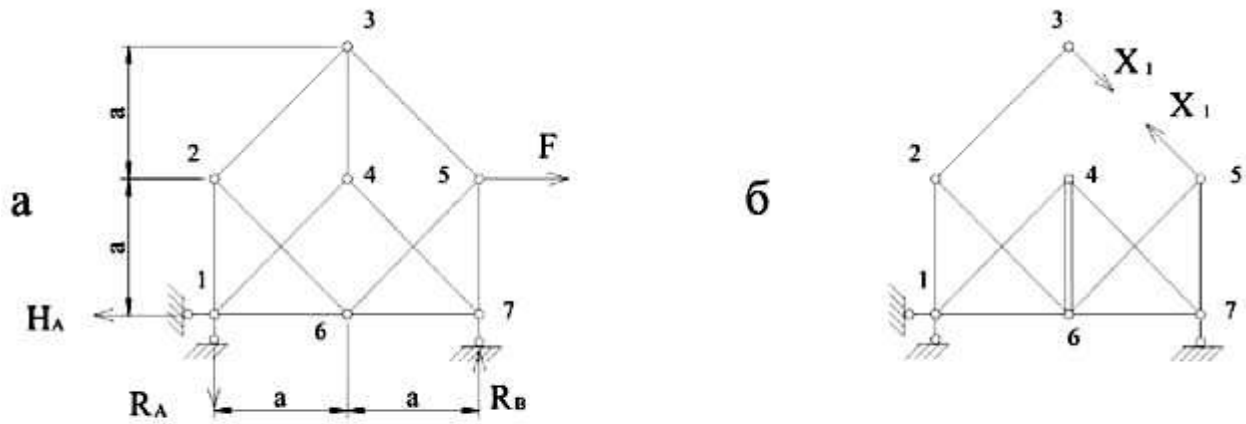


Рис. 16

Розв'язання.

Відкинемо стержень 3-5, замінивши його дію силою X_1 , і введемо замінюючий стержень 4-6 (рис. 16,а). Зусилля в стержнях ферми, що вийшла таким чином, можна визначити способом вирізання вузлів.

Опорні реакції від зовнішнього навантаження (рис. 16,б):

$$H_A = F; \quad R_A = 0,5F; \quad R_B = 0,5F.$$

Опорні реакції від $\bar{X}_1$:

$$H'_A = R'_A = R'_B = 0.$$

Результати визначення зусиль в замінюючих стержнях ферми (рис. 16,б) від зовнішнього навантаження (N_{iF}), і від одиничної сили $\bar{X}_1 = 1(\bar{N}_i)$ й значення зусиль у заданій фермі (N_i) наведені в табл. 1, причому

$$N_i = N_{iF} + \bar{N}_i X_1.$$

Для визначення X_1 використовуємо рівняння:

$$A_{11}X_1 + A_{1F} = 0,$$

де з таблиці знаходимо (стержень 4-6):

$$A_{1F} = -F; \quad A_{11} = 1,414$$

і тоді $X_1 = 0,707F$.

Таблиця 1

Номер стержня	N_{iF}	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i X_1$	N_i	l_i	$N_i l_i$
3 – 2	0	1	0,707F	0,707F	1,414a	a
3 – 4	0	-1,414	-F	-F	a	-a
2 – 1	0	1,414	F	F	a	a
2 – 6	0	-1	-0,707F	-0,707F	1,414a	-a
1 – 4	0,707F	-2	-1,414F	-0,707F	1,414a	-a
1 – 6	0,5F	1,414	F	1,5F	a	1,5a
4 – 7	0,707F	-2	-1,414F	-0,707F	1,414a	-a
4 – 6	-F	1,414	F	0	a	0
5 – 6	1,414F	-1	-0,707F	0,707F	1,414a	a
5 – 7	-F	1,414	F	0	a	0
6 – 7	-0,5F	1,414	F	0,5F	a	0,5a
3 – 5	0	1	0,707F	0,707F	1,414a	a

Для перевірки правильності виконаного розрахунку використовуємо умову:

$$\sum N_i l_i = \sum F_x x + \sum F_y y,$$

де N_i – розрахункова величина зусилля в стержні; l_i – довжина стержня; x, y – координати точок прикладення навантаження; F_x, F_y – проекції навантаження, включаючи опорні реакції, на осі x й y .

Підсумовуючи цифри останнього стовпця табл. 1, одержимо: $\sum N_i l_i = 2aF$.

Проекції навантаження F і її координати: $F_x = F$, $F_y = 0$, $x = 2a$, $y = a$.

Проекції опорної реакції R_A і її координати: $F_x = -F$, $F_y = -0,5F$, $x = 0$, $y = 0$.

Проекції опорної реакції R_B і її координати: $F_x = 0$, $F_y = 0,5F$, $x = 2a$, $y = 0$.

$\sum F_x x + \sum F_y y = F \cdot 2a - F \cdot 0 + 0 \cdot 2a + 0 \cdot a - 0,5F \cdot 0 + 0,5F \cdot 0 = 2aF$, що підтверджує правильність розрахунку.

Трьохшарнірні арки і рами

1 Загальні положення і класифікація арок

Системи криволінійного або ламаного обрису, в опорах яких від вертикального навантаження виникають похилі реакції, називаються *арковими*.

Ці похилі реакції спрямовані, як правило, усередину прольоту, а їх горизонтальні складові називаються *розпорами*.

Аркові системи виявляються більш вигідними, чим балкові, тому що наявність розпору приводить до зменшення нормальних напруг у поперечних перерізах.

Арка, що спирається на дві шарнірно-нерухомі опори, називається *двохшарнірною* (мал. 1,а). Тому що число її опорних стержнів дорівнює чотирьом, то *двохшарнірна* арка є статично невизначеною.

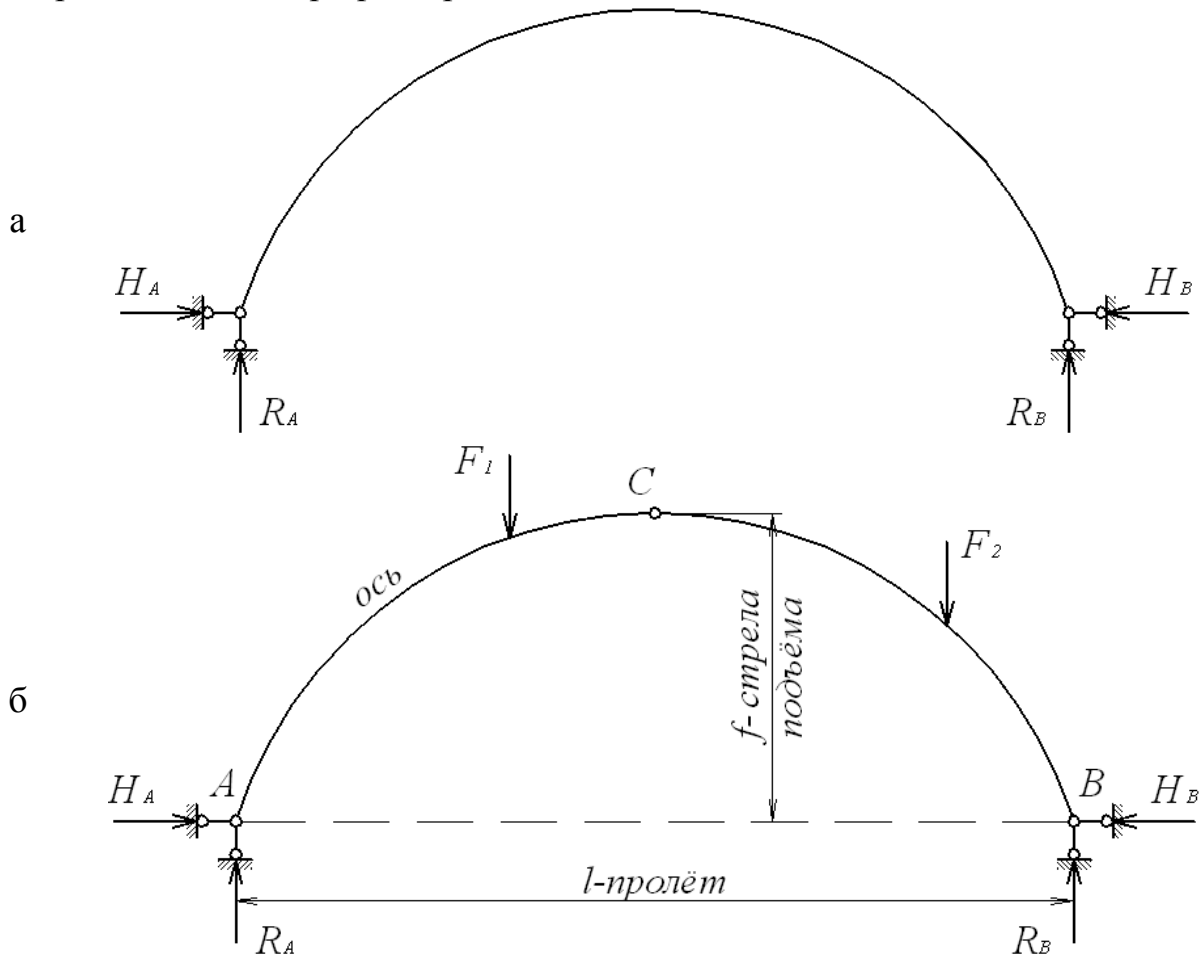


Рис. 1. Двохшарнірна і трьохшарнірна арки

Якщо в проміжному перетині такої арки установити шарнір, то вона стає статично визначною і називається *трьохшарнірною* (мал. 1,б).

Шарнір C (мал. 1,б) приєднаний до землі за допомогою двох стержнів — дисків арки, тому *трьохшарнірна* арка є геометрично незмінною системою.

У багатьох випадках застосування *трьохшарнірних* арок є більш вигідним, ніж *двохшарнірних*, тому що в статично невизначених системах виникають додаткові напруги, зв'язані з осіданням опор і змінами температури.

Розрізняють *трьохшарнірні* арки з *затягуванням* (мал. 2,а), з *підвищеним* *затягуванням* (мал. 2,б) і з *опорами в різних рівнях* (мал. 2,в).

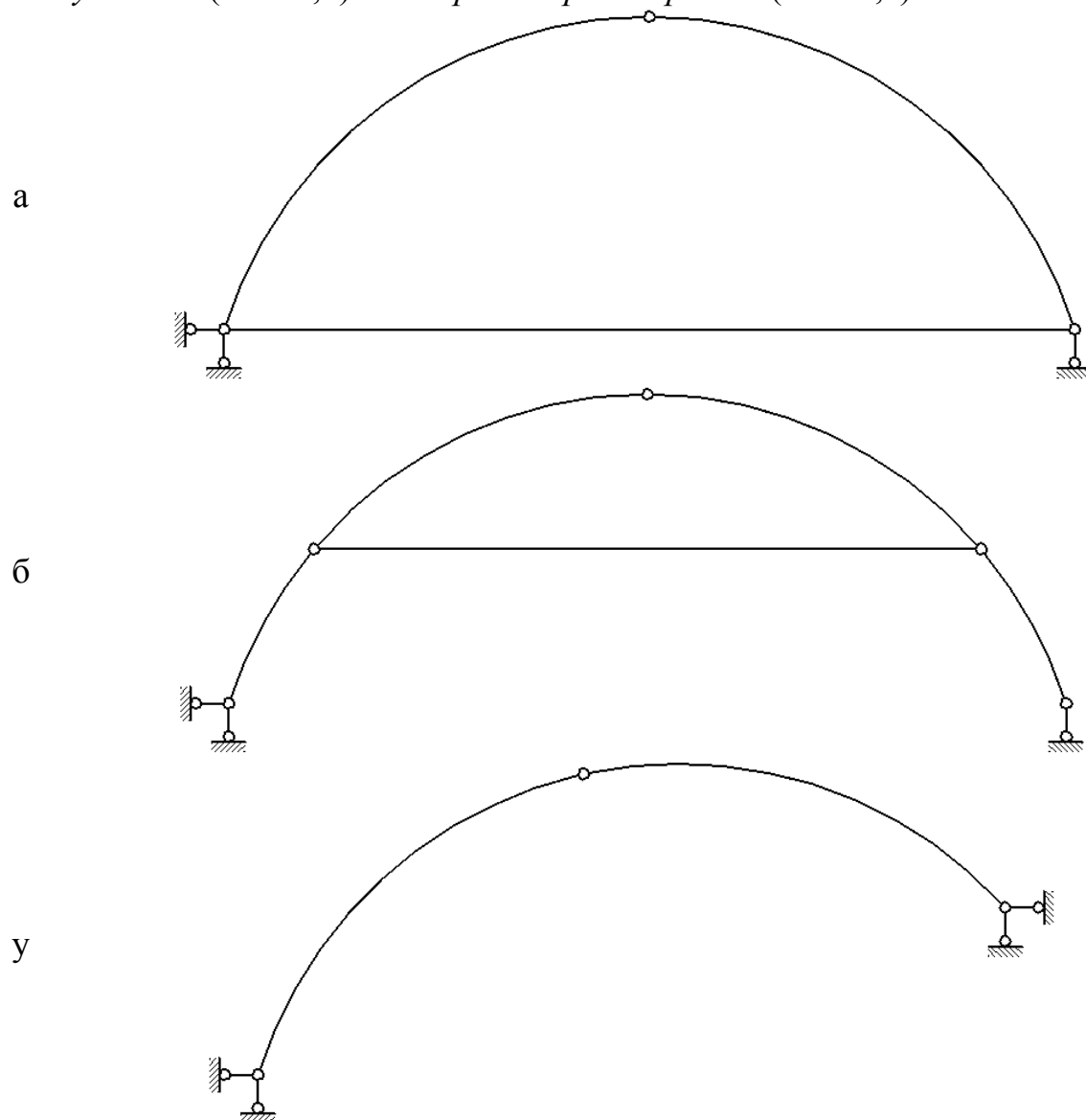
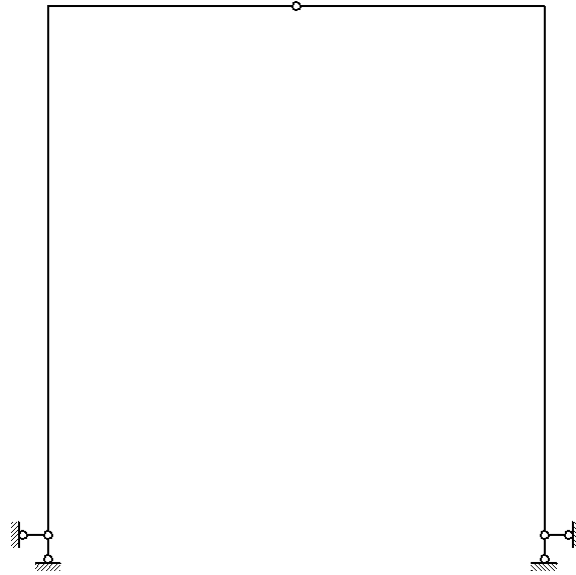


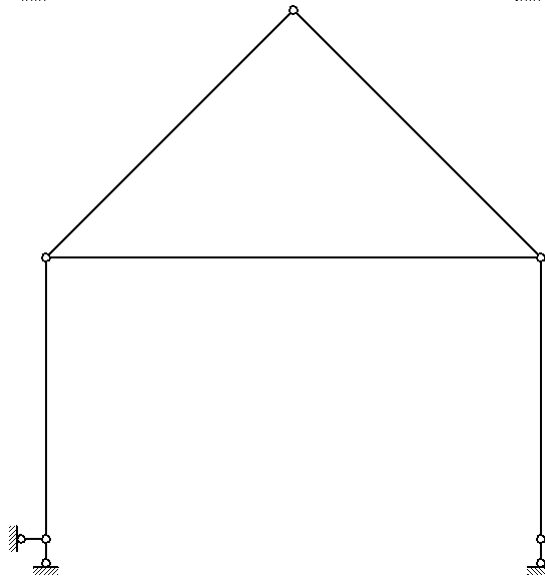
Рис. 2. *Трьохшарнірні* арки

Трьохшарнірні рами можуть бути *одноповерховими* (мал. 3,а,б) і *двоповерховими* (мал. 3,в).

а



б



у

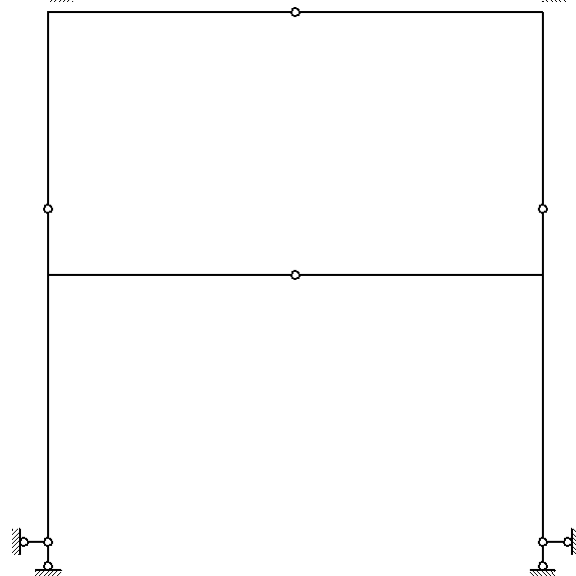


Рис. 3. Трьохшарнірні рами

2 Визначення опорних реакцій в арках

2.1 Опори розташовані на одному рівні

В арці без затягування (мал. 1,б) вертикальні складові і визначаються з умов

$\sum M_A = 0;$	(1)
$\sum M_B = 0.$	(2)

Тому що горизонтальні реакції (розпір) у ці рівняння не входять, то і дорівнюють реакціям у балці того ж прольоту від того ж навантаження і називаються *балковими реакціями*.

Третім рівнянням рівноваги буде

$\sum X = 0,$	(3)
---------------	-------

звідки випливає, що

$$H_A = H_B = H.$$

Четверте рівняння рівноваги дозволяє визначити величину розпору H . Це рівняння записується у виді

$\sum M_C^{лев} = 0 \text{ (або } \sum M_C^{прав} = 0),$	(4)
--	-------

або в розгорнутій формі:

$M_C^0 - H \cdot f = 0,$	(5)
--------------------------	-------

де M_C^0 — балковий згинальний момент у шарнірі C .

З (5) випливає, що

$H = \frac{M_C^0}{f},$	(6)
------------------------	-------

тобто, чим менше стріла підйому арки f , тим більше (за інших рівних умов) величина розпору.

В арках із затягуванням вертикальні складові R_A і R_B також є балковими реакціями, а роль розпору грає зусилля в затягуванні.

2.2 Опори розташовані на різних рівнях

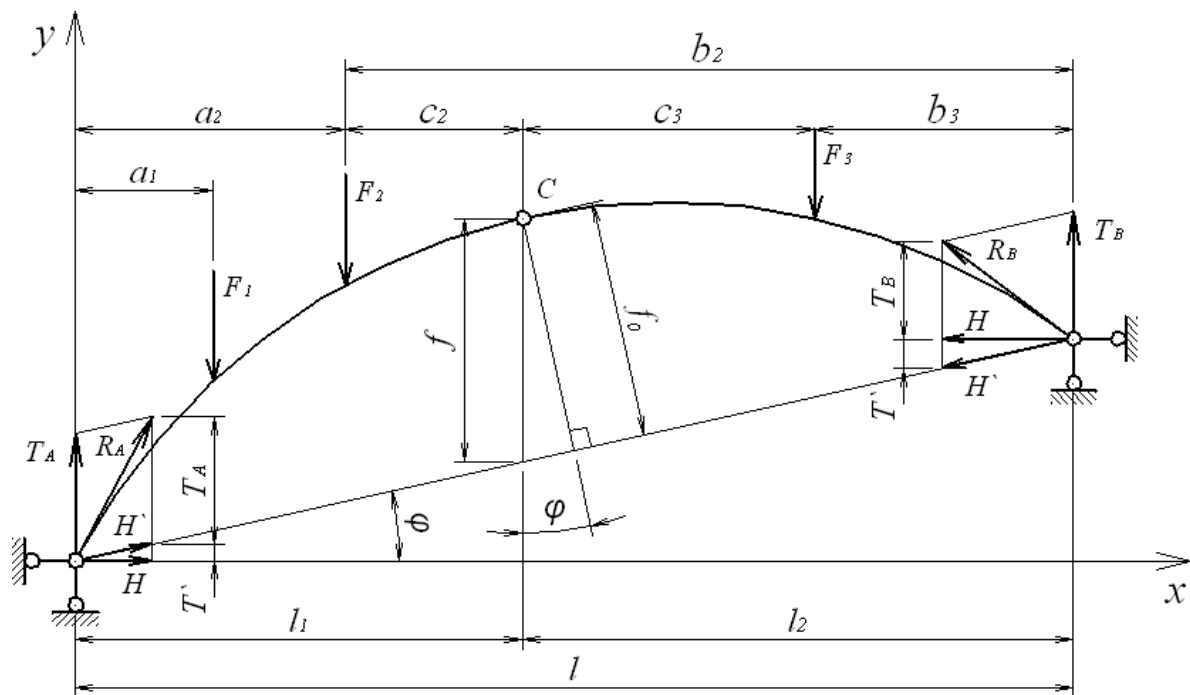


Рис. Трьохшарнірна арка з опорами в різних рівнях

З рівняння рівноваги

$$\sum X = H'_A \cos \varphi - H'_B \cos \varphi = 0$$

знаходимо

$$H'_A = H'_B = H'.$$

Вертикальні реакції T_A і T_B (мал. 4) визначимо з рівнянь рівноваги

$$\sum M_A = 0 \text{ і } \sum M_B = 0:$$

$$\sum M_B = T_A l - \sum_{i=1}^n F_i b_i = 0 \Rightarrow T_A = \frac{\sum_{i=1}^n F_i b_i}{l};$$

$$\sum M_A = T_B l - \sum_{i=1}^n F_i a_i = 0 \Rightarrow T_B = \frac{\sum_{i=1}^n F_i a_i}{l}.$$

Сумарні вертикальні реакції опор A и B відповідно рівні

$$V_A = T_A + T';$$

$$V_B = T_B - T',$$

де

$$T' = H' \sin \varphi.$$

Для визначення горизонтальної реакції H запишемо вираз згинаючого моменту в перетині C (мал. 4) і прирівняємо його нулеві:

$$M_C = T_A l_1 - \sum_{i=1}^n F_i c_i - H' f_0 = 0,$$

звідки

$H' = \frac{T_A l_1 - \sum_{i=1}^n F_i c_i}{f_0} = \frac{M_C^0}{f_0}.$	(7)
--	-------

Визначимо величину розпору H .

$$H = H' \cos \varphi \Rightarrow H' = \frac{H}{\cos \varphi}.$$

Прирівнюючи це значення виразу (7), одержимо:

$\frac{H}{\cos \varphi} = \frac{M_C^0}{f_0} \Rightarrow H = \frac{M_C^0 \cos \varphi}{f_0} = \frac{M_C^0}{f},$	(8)
--	-----

де

$$f = \frac{f_0}{\cos \varphi}.$$

Повна реакція лівої (правої) опори може бути отримана двома шляхами: як рівнодіючих сил T_A і H' (T_B і H') або як рівнодіючих сил V_A і H (V_B і H).

3 Визначення внутрішніх зусиль в арці при довільному навантаженні

У поперечних перерізах арки виникають три внутрішні силових фактори: повздовжня сила N , поперечна сила Q і згинальний момент M .

Повздовжня сила в перетині чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону від розглянутого перетину, на дотичну до осі арки в даному перетині. При цьому проєкції прямих сил беруться зі зворотним знаком.

Повздовжню силу будемо вважати *позитивною*, якщо в перетині арки вона викликає розтягування і *негативною* — у противному випадку.

Визначимо повздовжню силу в перетині K арки (мал. 5).

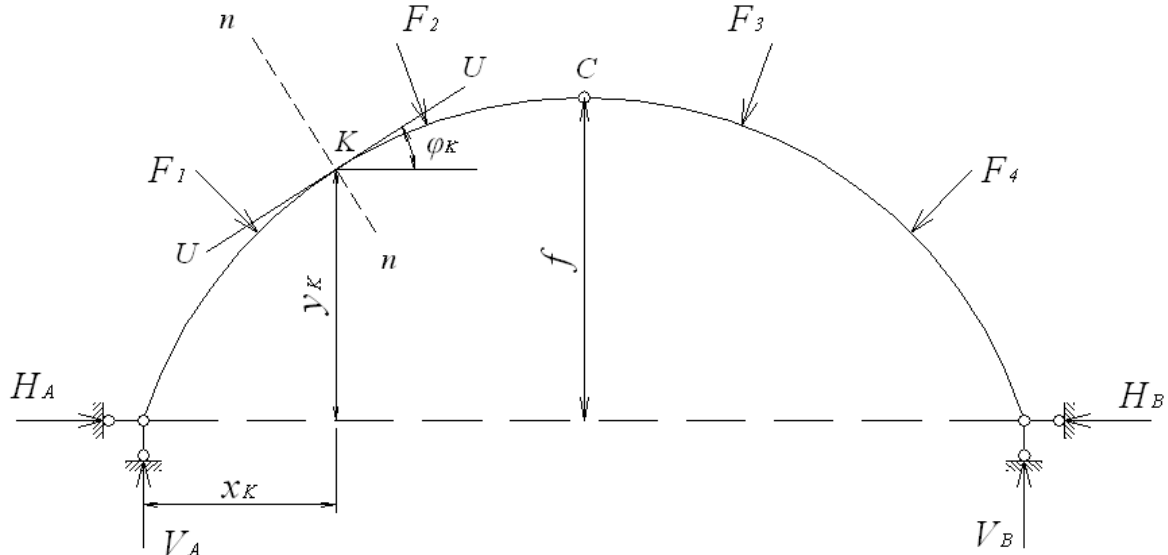


Рис. 5. До визначення внутрішніх силових факторів

Спроектуємо всі сили, що діють на арку ліворуч від перетину K , на дотичну до арки, проведену в точці K (вісь $U - U$):

$N_K = -V_A \sin \varphi_K - H_A \cos \varphi_K + \sum_{i=1}^n F_{ix} \cos \varphi_K - \sum_{i=1}^n F_{iy} \sin \varphi_K,$	(9)
---	-----

де F_{ix} і F_{iy} — горизонтальні і вертикальна складові сили F_i відповідно.

Поперечна сила в перетині *чисельно дорівнює* алгебраїчній сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону від розглянутого перетину (проекції правих сил беруться зі зворотним знаком), на нормаль до осі арки в даному перетині.

Поперечну силу в перетині будемо вважати *позитивною*, якщо рівнодіюча зовнішніх сил, прикладених до відсіченої частини арки, прагне повернути розглянутий перетин по годинниковій стрілці, тобто спрямована нагору ліворуч від перетину або вниз праворуч від даного перетину.

Для визначення поперечної сили в перетині K (мал. 5) спроекуємо всі сили, що діють ліворуч від перетину K , на нормаль до осі арки в цьому перетині (вісь $n - n$):

$Q_K = V_A \cos \varphi_K - H_A \sin \varphi_K - \sum_{i=1}^n F_{iy} \cos \varphi_K - \sum_{i=1}^n F_{ix} \sin \varphi_K.$	(10)
--	--------

Згинальний момент у перетині *чисельно дорівнює* алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх лівих сил щодо центру тяжіння перетину, або алгебраїчній сумі моментів усіх правих сил зі зворотним знаком.

Згинальний момент будемо вважати *позитивним*, якщо ліві сили прагнуть повернути розглянутий перетин по годинниковій стрілці, або праві — у протилежному напрямку.

Згинальний момент у перетині K арки (мал. 5):

$M_K = V_A x_K - H_A y_K - \sum_{i=1}^n F_{iy} (x_K - x_{iF}) - \sum_{i=1}^n F_{ix} (y_K - y_{iF}),$	(11)
--	--------

де x_{iF} і y_{iF} — координати точки прикладення сили .

У формулах (9) – (11) під знаки підсумовування входять сили, що розташовані тільки ліворуч або тільки праворуч від перетину K .

4 Визначення внутрішніх зусиль при вертикальному навантаженні

При дії на арку тільки вертикальних сил (мал. 6,а) формули (9) – (11) спрощуються.

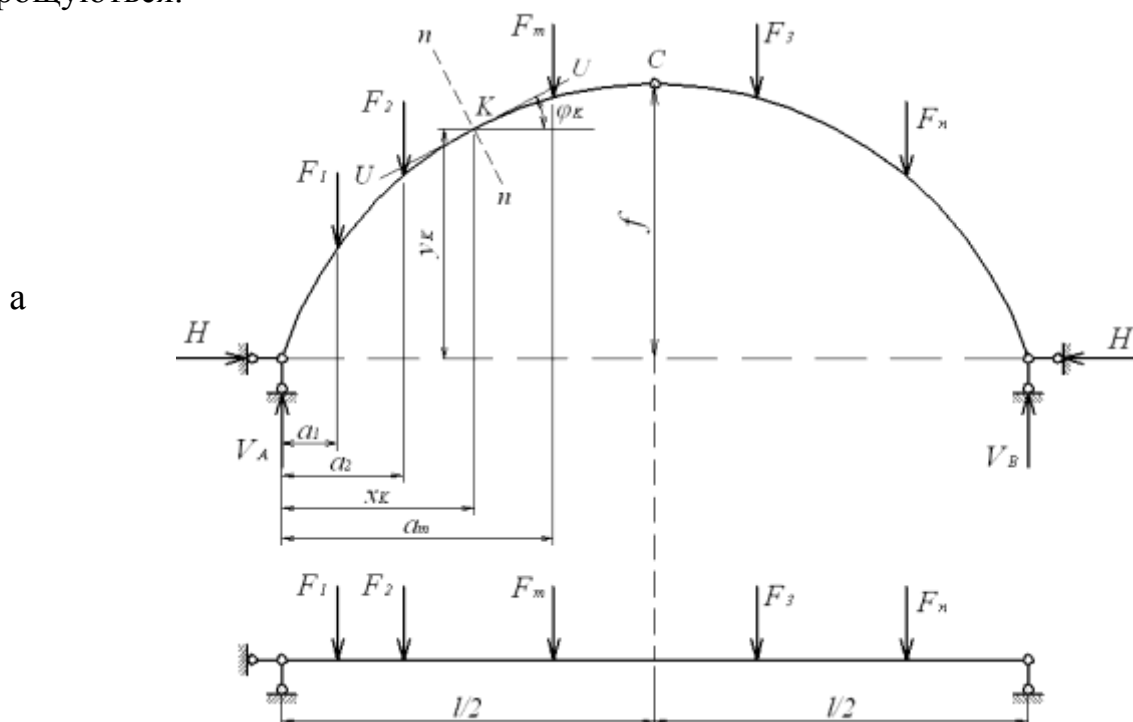


Рис. 6. Вертикальні навантаження на арку

Проектуючи всі ліві сили (або праві зі зворотним знаком) на дотичну U – U до осі арки в перетині K , одержимо для подовжньої сили:

$$N_K = -(V_A - \sum_{i=1}^n F_i) \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K.$$

З мал. 6,б випливає, що величина $V_A - \sum_{i=1}^n F_i$ являє собою поперечну силу Q_K^0 в перетині K шарнірної балки тієї ж довжини l , тоді

$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K,$	(12)
---	--------

де Q_K^0 називається «балковою» поперечною силою.

Аналогічно для поперечної сили в перетині K арки одержимо (мал. 6,а)

$$Q_K = (V_A - \sum_{i=1}^n F_i) \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K,$$

або

$Q_K = -Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K.$	(13)
---	--------

Згинальний момент у перетині K :

$$M_K = V_A x_K - \sum_{i=1}^n F_i (x_K - a_i) - H \cdot y_K,$$

де $V_A x_K - \sum_{i=1}^n F_i (x_K - a_i)$ являє собою згинальний момент M_K^0 у перетині K шарнірної балки (мал. 6,б) і тоді

$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K.$	(14)
------------------------------	--------

З формул (9) - (14) випливає, що *всі* епюри внутрішніх зусиль в арках, як правило, *криволінійні*. Звичайно при побудові епюр арку розбивають уздовж осі x на рівні відрізки, обчислюють в отриманих у такий спосіб перетинах внутрішні зусилля і по цим даним будують епюри N , Q , M .

Інший підхід полягає в тому, що обчислюють значення N , Q , M на границях характерних ділянок (які визначаються точками прикладення зосереджених сил і моментів, початком і кінцем розподілених навантажень, точками примикання підвищених затягувань) і в деяких (у залежності від складності епюри) проміжних перетинах.

5 Рівняння раціональної осі арки. Ядрові моменти

Ядровим моментом називається момент від усіх сил, узятих по одну сторону перетину, щодо крайньої точки *ядра перетину*.

При внецентровому стиску найбільша і найменша напруги виникають у крайніх точках поперечного перерізу і визначаються у виді

$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M}{W},$	(15)
--	--------

де A — площа поперечного перерізу; W — момент опору; N , M — поздовжня сила і згинальний момент у перетині відповідно.

При дії на арку рухомого навантаження для визначення найбільших нормальних напруг по формулі (15) одночасно доводиться завантажувати дві лінії впливу (N і M), що мають різні обриси, до того ж, одна з них — двохзначна. У зв'язку з цим вираз для доцільно перетворити так, щоб формула (15) стала одночленною. Для цього розкладемо рівнодіючу лівих сил, прикладену в точці r перетину $n - m$ (мал. 7), на складові N і Q .

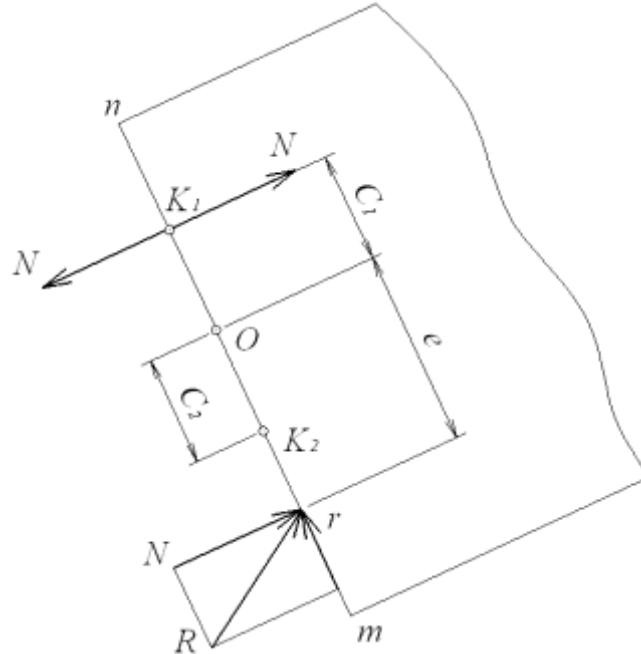


Рис. 7. До перетворення виразу для

В одній із крайніх точок ядра перетину, наприклад, у верхній точці K_1 , прикладемо дві взаємно врівноважують сили N . У результаті цього в перетині будуть прикладені три сили N , які можна звести до пари сил з моментом $N \cdot (e + c_1)$ і подовжній силі N , що діє в крайній лівій ядровій точці. Тоді нормальна напруга в нижній точці m перетину визначається по формулі

$\sigma_m = \frac{N(e + c_1)}{W_m},$	(16)
--------------------------------------	------

тому що від сили N , прикладеної у верхній ядровій точці, нормальна напруга в нижній точці m перетину дорівнює нулеві.

Добуток $N \cdot (e + c_1)$ являє собою момент поздовжньої сили, прикладеної в точці r , щодо верхньої ядрової точки і називається *ядровим моментом*.

Відмінність ядрового моменту від звичайного згинаючого полягає в тому, що при його обчисленні потрібно множити ліві (або праві) сили на відстань до однієї з ядрових точок, а не до центра тяжіння перетину.

Аналогічно, нормальна напруга в точці n перетину визначається по формулі

$$\sigma_n = \frac{N(e - c_2)}{W_n} = \frac{M_{K_2}^{ядр}}{W_n},$$

де $M_{K_2}^{ядр}$ — момент зовнішніх лівих (або правих) сил щодо точки K_2 .

Ці формули є одночленними, що дозволяє більш просто вирішувати задачі, зв'язані з визначенням максимальних напруг у перетинах арки при дії на неї рухомого навантаження.

Раціональною віссю арки називається така вісь, при якій згинальний момент у всіх перетинах арки дорівнює нулеві.

Якщо вважати, що арка завантажена тільки вертикальними навантаженнями, то для цього необхідно і досить, щоб вертикальні ординати у усіх точок осі арки, відраховуванні від прямої (AB), проведеної між опорами, були пропорційні відповідним ординатам «балкової» епюри моментів M^0 (мал. 8), тобто в будь-якому перетині арки

$$y = k \cdot M^0,$$

де y — вертикальні ординати точок, що лежать на осі балки; k — постійний коефіцієнт пропорційності; M^0 — ординати «балкової» епюри моментів.

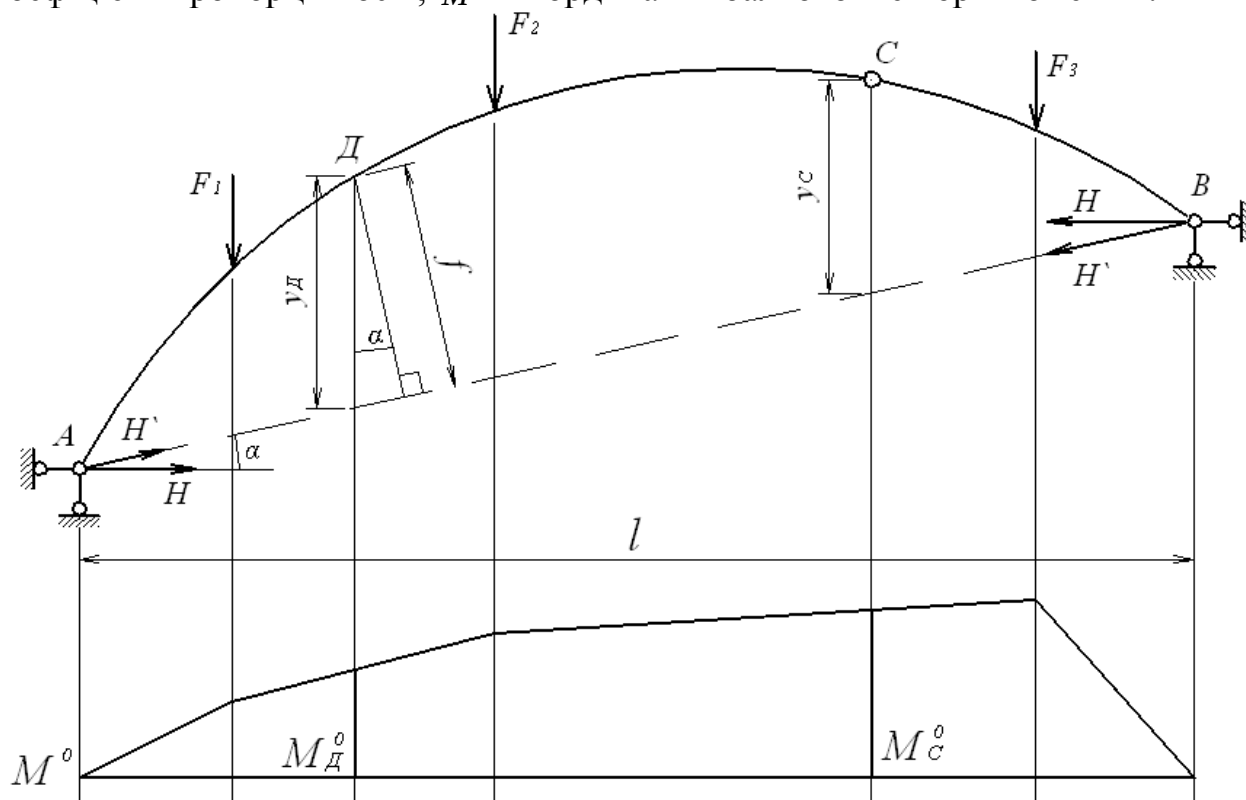


Рис. 8. До визначення раціональної осі арки

У перетині D арки:

$$y_D = k \cdot M_D^0,$$

$$M_D = M_D^0 - H \cdot y_D = M_D^0 - H \cdot k \cdot M_D^0 = (1 - H \cdot k) M_D^0.$$

У шарнірі C :

$$M_C = M_C^0 - H \cdot y_C = M_C^0 - H \cdot k \cdot M_C^0 = (1 - H \cdot k) M_C^0 = 0.$$

Тому що $M_C^0 \neq 0$, те $1 - H \cdot k = 0$,

отже, $M_D = 0$.

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ І ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Розглянуті в попередніх главах задачі про напружено-деформований стан пружних тіл зводилися до рішення диференціальних рівнянь при відповідних граничних умовах. Диференціальні рівняння виражали умови рівноваги і умови спільності деформацій всередині тіла, а граничні умови – на його границях.

Для ряду задач, які ставляться до тіл певної форми при відомому розподілі зовнішніх навантажень, були отримані точні або засновані на деяких припущеннях, спрощуючих, загальні рішення відповідних диференціальних рівнянь. Однак для багатьох задач диференціальні рівняння настільки складні, що одержати загальне рішення в аналітичній формі важко або взагалі неможливо, а їх чисельне рішення сполучене із громіздкими викладеннями. У зазначених випадках прибігають до використання варіаційних методів.

Справа в тому, що стан рівноваги або руху деформованих систем поряд з диференціальними рівняннями може описуватися за допомогою варіаційних принципів. Так, положення рівноваги консервативної системи є положення, у якому силова функція роботи всіх сил системи має мінімальне значення. Зазначена обставина дозволяє замінити проблему рішення систем диференціальних рівнянь рівноваги розглянутої механічної системи проблемою визначення функцій, що забезпечують мінімум деякого функціонала, у цьому випадку силової функції роботи всіх сил, що діють на систему. Для визначення цього мінімуму використовуються так звані прямі варіаційні методи, основи яких були закладені в роботах Релея і Рітца.

У загальному випадку поведження деформованих систем описується умовою стаціонарності деякого функціонала. І ця умова стаціонарності еквівалентна основним рівнянням, які описують поведження деформованої системи.

Використання варіаційних принципів дозволяє одержати наближене рішення і при цьому, по суті, з будь-якою заданою точністю.

У цій главі для суцільних тіл, які перебувають у рівновазі, формулюються два основних варіаційних принципи: *можливих переміщень і можливих напружень*. Наведено деякі узагальнення цих принципів.

Варіаційні принципи дозволяють з єдиних позицій розглянути поведження зовсім різних фізичних процесів. Вони знайшли широке використання і при рішенні задач механіки деформівних середовищ. Нижче приводиться короткий виклад їх основних ідей, проілюстроване прикладами. Наведені також і деякі додаткові теореми, відомості про властивості пружних систем, що впливають із розгляду потенційної енергії деформації.

1 Лінійно і нелінійно деформівні пружні системи

Розглянуті тут залежності відносяться тільки до зовсім пружних тіл і систем. Відмінною властивістю таких тіл і систем, як відомо, є однозначність залежності між деформаціями і переміщеннями, з одного боку, напруженнями і зовнішніми силами, які викликають зазначену деформацію, з іншого. При знятті навантаження повністю зникає викликаний нею напружено-

деформований стан тіла. Остаточні значення деформацій, напруг і переміщень залежать тільки від остаточних значень зовнішніх сил і не залежать від історії навантаження тіла (порядку появи і закону зростання окремих складових зовнішнього навантаження, прикладеного до тіла).

Пружні тіла і системи діляться на два класи: *лінійно деформівні* і *нелінійно деформівні*. У лінійно деформівних систем залежність між зовнішніми навантаженнями і переміщеннями (деформаціями, напругами, внутрішніми зусиллями) лінійна. Нагадаємо, що для лінійно деформівних систем основні рівняння: рівноваги, спільності деформацій і фізичні, складені для розглянутої конструкції, – лінійні.

Принцип незалежності дії сил. Для лінійно деформівних систем справедливий принцип незалежності дії сил, що формулюється так: якщо на конструкцію діє кілька видів навантажень, то сумарний результат від дії цих навантажень дорівнює сумі результатів кожного окремого навантаження. Це відноситься до зусиль, деформацій, переміщенням і будь-якого іншого розрахункового навантаження.

З принципу незалежності дії сил випливає, що конструкцію можна розраховувати на окремі одиничні зусилля, а потім результати помножити на значення цих зусиль і скласти один з одним.

Наприклад, переміщення якої-небудь i -й точки або перерізу буде пов'язане з діючими зовнішніми силами залежністю (рис. 1)

$\varpi_i = \sum_k \alpha_{ik} Q_k$	(1)
-------------------------------------	-----

де Q_k — параметри, що характеризують зовнішнє навантаження (розподілені і зосереджені сили, моменти); α_{ik} — коефіцієнти впливу сил на переміщення ϖ_i , чисельно рівні значенню цього переміщення, викликаному дією відповідної сили при одиничному значенні характеризуючого її параметра $Q_k = 1$.

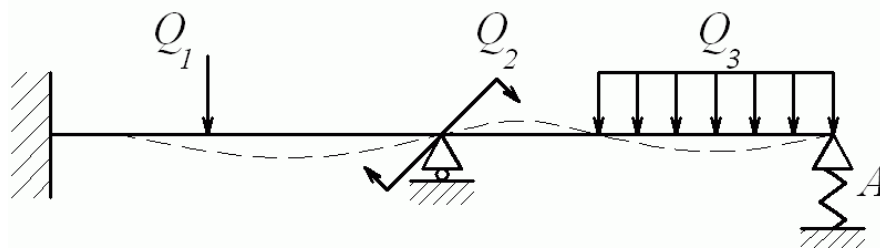


Рис. 1. Лінійна система

У випадку нелінійно деформівної системи значення коефіцієнтів впливу α_{ik} змінюються в міру зміни величини зовнішніх сил.

Нелінійна залежність буде мати місце, наприклад, між прогином консольної балки і прикладеної на її кінці силою P при великих прогинах (рис. 2). З ростом величини сили балка згинається усе більше й більше, що приводить до зменшення плеча дії сили. У результаті згинальні моменти, а, отже, напруги, деформації й переміщення будуть зростати повільніше, ніж сила P . Залежність між силою P і переміщенням кінця балки буде нелінійною. Зразковий вид цієї залежності наведений на рис. 2, б.

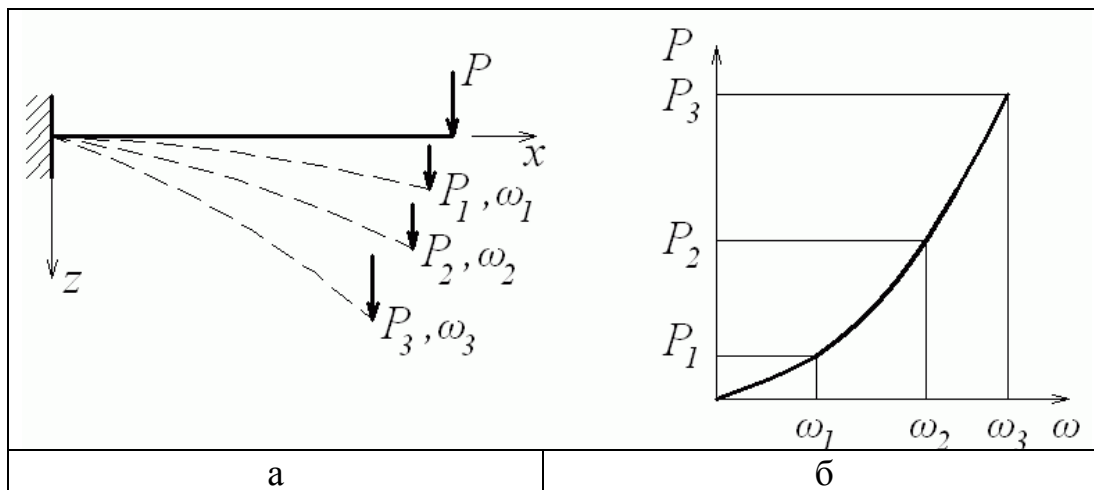


Рис. 2. Нелінійна система

Цей приклад показує, що до певного значення зовнішніх сил, коли переміщення малі і матеріал підкоряється закону Гука, система буде мати властивість лінійної деформованості. При подальшому збільшенні зовнішніх навантажень через зріст переміщень, а також можливості появи пластичних деформацій система втрачає властивість лінійної деформованості, перетворюючись у нелінійно деформовану систему.

2 Робота зовнішніх сил і потенційна енергія пружних систем

Закон збереження енергії. Зовнішні сили, що викликають деформацію пружної системи внаслідок переміщень точок їх додатка, виконують певну роботу. Відповідно до закону збереження енергії, пружна система при деформуванні одержує кількість енергії, рівна роботі зовнішніх сил, що беруть участь у цьому деформуванні. В загальному випадку отримана системою енергія може існувати в різних формах: у вигляді пружної потенційної енергії, кінетичної енергії, тепловий, електромагнітної та ін. У статичних задачах передбачається дуже повільний ріст зовнішніх навантажень, а тому і малі швидкості деформування розглянутої системи, що дозволяє зневажати при розрахунку таких систем кінетичною енергією, що накопичується в них.

Поява теплової, електромагнітної та іншої форм енергії супроводжується необоротними процесами, у результаті чого система не буде вже зовсім пружною, тому що при повному розвантаженні вона вже не в змозі, повернути всю ту енергію, що була нею отримана в процесі навантаження.

Таким чином, при статичних деформаціях зовсім пружної системи, в силу закону збереження механічної енергії, у цій системі накопичується в оборотній формі кількість потенційної енергії пружної деформації, рівна роботі, виконаної зовнішніми силами:

$\Pi = U,$	(2)
------------	-------

де Π — повна потенційна енергія деформації системи, включаючи енергію деформацій всіх її пружних опор і закладень; U — робота зовнішніх сил на переміщеннях системи.

Принцип можливих переміщень. Із закону збереження енергії (2) випливає принцип можливих переміщень, що формулюється так: для тіла, що

перебуває в положенні рівноваги, сума робіт всіх діючих на нього зовнішніх і внутрішніх сил на будь-якій системі можливих переміщень дорівнює нулю.

Можливими переміщеннями пружної системи називаються переміщення, що не порушують умов спільності переміщень як всередині системи (тіла), так і в точках її з'єднання із зовнішніми зв'язками (рівність нулю переміщень на жорстких опорах, відсутність кутів повороту в опорних перерізах жорсткозатиснутої балки і т.п.).

Можливі нескінченно малі переміщення системи з положення рівноваги можна одержати, даючи нескінченно малі збільшення зовнішнім силам. При цьому внутрішні сили також будуть одержувати нескінченно малі збільшення. Оскільки робота нескінченно малих збільшень зовнішніх і внутрішніх сил на нескінченно малому переміщенні системи буде малою величиною більш високого порядку в порівнянні з роботою самих сил, то при обчисленні збільшень роботи на нескінченно малому відхиленні системи з положення рівноваги зовнішні і внутрішні сили можна вважати незмінними по величині. Збільшення роботи внутрішніх сил пружності дорівнює збільшенню потенційної енергії системи зі зворотним знаком ($-\delta\Pi$). З урахуванням цього математичне формулювання принципу можливих переміщень представиться в такому виді

$\delta U - \delta \Pi = 0.$	(3)
------------------------------	-------

Потенційна енергія деформації. Відомі формули для обчислення потенційної енергії деформації лінійно пружного тіла.

Одержимо необхідні залежності для обчислення потенційної енергії тіла з довільними фізичними властивостями.

Виділимо із жорсткого тіла елементарний паралелепіпед, ребра якого рівні dx, dy, dz . Допустимо, що на виділений елемент об'єму діють напруження σ_x , а всі інші компоненти напружень дорівнюють нулю. Нехай далі сила $\sigma_x dydz$ під впливом якихось зовнішніх факторів отримує деяке мале збільшення $d\sigma_x dydz$, тоді паралелепіпед подовжиться по напрямку осі x на величину $d\varepsilon_x dx$. Діючі на елемент зусилля виконують роботу, що з точністю до величин другого порядку малості буде дорівнює

$$\sigma_x d\varepsilon_x dx dy dz.$$

Тоді при дії на елемент всіх компонентів тензора напружень збільшення роботи всіх зусиль визначиться формулою

$$dA = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} d\gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Звідси приріст роботи, що доводиться на одиницю об'єму тіла,

$dW = dA / dx dy dz = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \dots + \sigma_{zx} d\varepsilon_{zx} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$	(4)
---	-------

За допомогою отриманого виразу можна визначити потенційну енергію одиниці об'єму (питома потенційна енергія):

$W = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$	(5)
---	-------

Інтеграл в (5) береться по шляху деформування тіла.

Для ідеально пружного тіла значення W не повинне залежати від шляху інтегрування, отже, підінтегральний вираз повинний бути повним диференціалом:

$dW = (\partial W / \partial \varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}.$	(6)
--	-------

У цьому випадку при обчисленні криволінійного інтеграла (5) доцільно вибрати шлях деформування, що реалізований у формулі, яка нижче приводиться:

$W = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_z d\varepsilon_z + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} +$ $+ \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz}.$	(7)
---	-------

Порівнюючи вирази (4) і (6), знайдемо

$\sigma_{ij} = \partial W_i / \partial \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$	(8)
---	-------

Співвідношення (8) справедливі для пружних тел.

Потенційна енергія деформації всього тіла Π і її збільшення визначаються інтегруванням по всьому обсягу тіла:

$\Pi = \int_V W dV;$	(9)
----------------------	-------

$d\Pi = \int_V dW dV = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV.$	(10)
--	--------

На закінчення ще раз слід зазначити, що питома потенційна енергія W суцільного тіла з довільними фізичними властивостями знаходиться по формулі (5); для зовсім пружного тіла — по (7).

Потенційна енергія деформації лінійно пружного стержня. Всі основні варіаційні методи рішення задач теорії пружності і будівельної механіки, які викладаються в справжній главі, ілюструються на прикладах розрахунку найпростіших стрижневих систем. При цьому доводиться обчислювати потенційну енергію деформації. Одержимо необхідні для цього формули.

Передбачається, що матеріал стержня відповідає закону Гука. Розглянемо випадок, коли стержень під дією зовнішнього навантаження випробовує згинання в одній площині, наприклад, у площині Oxz . Дія зовнішнього навантаження викликає в кожному з поперечних перерізів стрижня по його довжині узагальнені внутрішні зусилля: згинальний момент $M(x)$, поперечну силу $Q(x)$, поздовжню силу $T(x)$.

Використовуючи відомі залежності технічної теорії згинання і розтягання - стискання балки, для визначення її напруженого стану можна виписати наступні формули:

$\sigma_x = \frac{T(x)}{F(x)} + \frac{M(x)z}{I(x)}; \quad \tau_{xz} = \tau_{cp} = \frac{Q(x)}{\omega};$ $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0,$	(11)
--	--------

де $F(x)$, $I(x)$ — площа поперечного перерізу і момент інерції цієї площі щодо нейтральної осі, ω — так звана приведена площа поперечного переріза балки. Для двотаврової балки, наприклад при її вигині в площині стінки, ω приймається рівної площі перерізу стінки. Прийняті тут позитивні напрямки внутрішніх зусиль у поперечному перерізі балки показані на рис. 3.

Підставляючи напруги (11) у формулу (3.41) для питомої потенційної енергії, одержуємо

$$W = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 + \frac{1}{2G} \tau_{xz}^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{T}{F} + \frac{Mz}{I} \right)^2 + \frac{1}{2G} \frac{N^2}{\omega^2}.$$

Інтегруючи цей вираз по всьому обсягу стержня (спочатку по площі поперечного переріза, а потім по довжині), знайдемо наступний вираз для повної енергії стрижня:

$\Pi = \int_0^l \left[\int_F W dF \right] dx = \int_0^l \left[\frac{T^2(x)}{2EF(x)} + \frac{M^2(x)}{2EI(x)} + \frac{N^2(x)}{2G\omega(x)} \right] dx,$	(12)
---	-------

де l — довжина стрижня.

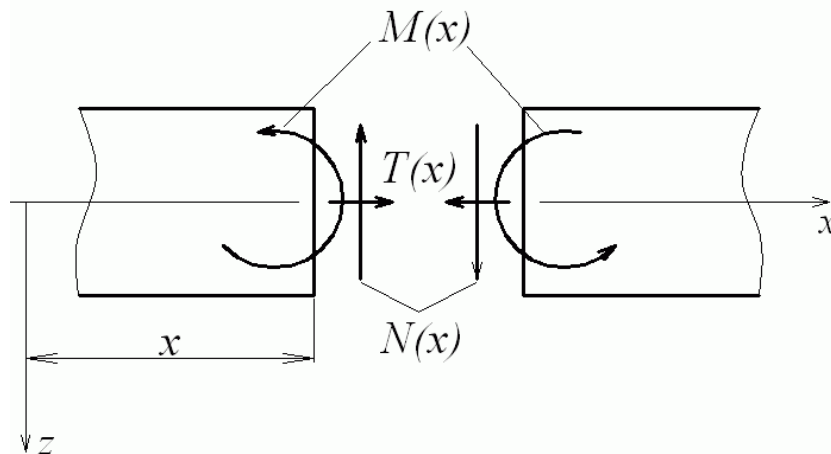


Рис. 3. Прийняті правила знаків

При одержанні формули (12) враховувалося, що інтеграл по площі d перерізу дає F , від $z^2 dF$ дає I ; від $z d$ інтеграл буде дорівнює нулю, тому що вісь u є нейтральною віссю поперечного переріза.

З технічної теорії згинання і розтягання балки відомі наступні залежності, що встановлюють зв'язок між внутрішніми зусиллями в поперечних перерізах балки і компонентами переміщення її осі:

$\begin{aligned} T(x) &= EF(x)u'(x); & M(x) &= FI(x)\varpi_1''(x) \\ N(x) &= G\omega(x)\varpi_2', \end{aligned}$	(13)
--	-------

де $u(x)$ — переміщення точок осі балки в напрямку осі x ;

$\varpi_1(x)$, $\varpi_2(x)$ — відповідно згинальна і зсувна складового прогину осі балки.

Якщо виключити в (12) за допомогою формул (13) зусилля $T(x)$, $M(x)$ і $N(x)$, одержуємо ще одну корисну формулу для підрахунку потенційної енергії балки:

$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EF(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + EI(x) \left(\frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial x^2} \right)^2 + G\omega(x) \left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$	(14)
--	-------

Потенційна енергія стрижневої системи буде дорівнює сумі потенційних енергій всіх стрижнів, що входять до складу системи.

Якщо окремі перерізи стержня опираються на пружні опори або мають пружні закладення, то потенційна енергія, що накопичується в цих елементах, повинна враховуватися в розрахунках. Обмежимося розглядом лише лінійно деформованих опор і закладень. Осідання такої опори ϖ_i лінійно залежить тільки від її реакції R_i :

$\varpi_i = A_i R_i,$	(15)
-----------------------	-------

а кут повороту пружного закладення лінійно залежить від реактивного моменту m_i :

$\alpha_i = a_i m_i,$	(16)
-----------------------	-------

де A_i — коефіцієнт піддатливості i -й пружної опори; a_i — коефіцієнт піддатливості пружного закладення.

Потенційна енергія, що накопичується, у пружній опорі і пружному закладенні дорівнює відповідно роботі, виконуваної $R_i(m_i)$ реакціями на відповідних $\varpi_i(\alpha_i)$ переміщеннях . Якщо при цьому врахувати залежності (15) і (16), то одержимо

$\left. \begin{aligned} \Pi_{y.on} &= \frac{1}{2} R_i \varpi_i = \frac{1}{2} R_i^2 A_i = \frac{\varpi_i^2}{2A_i}; \\ \Pi_{y.za\partial} &= \frac{1}{2} m_i \alpha_i = \frac{1}{2} m_i^2 a_i = \frac{\alpha_i^2}{2a_i}. \end{aligned} \right\}$	(17)
--	-------

3 Узагальнені переміщення і узагальнені сили

У попередніх розділах переміщення точок пружних тіл і систем, що виникають у результаті деформації, визначалися як зміни значень їхніх координат у тій або іншій системі координат. Зазначені переміщення, які надалі будемо називати *простими переміщеннями*, по суті є координатами пружної системи щодо її початкового недеформованого стану.

При використанні багатьох наближених і, зокрема, варіаційних методів зручніше використовувати так звані *узагальнені переміщення*, або *узагальнені координати*.

Узагальненими переміщеннями будемо називати таку сукупність деяких параметрів, які цілком визначають переміщення всіх точок пружного тіла або пружної системи. Узагальнені переміщення повинні бути обрані так, щоб вони були незалежними і при їх довільній зміні не порушувалися зв'язки, накладені на систему. Приведемо кілька прикладів.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі за узагальнене переміщення можна прийняти кут повороту; при обертанні твердого тіла навколо нерухомої точки за узагальнені переміщення приймають три зйлерових кути і т.п. У цих прикладах число узагальнених координат дорівнює числу ступенів волі, і маючи у своєму розпорядженні значення узагальнених координат, можна визначити зовсім точно положення будь-якої точки тіла.

Для пружного тіла число ступенів волі нескінченно велико. Тому згинання осі вільно обпертої балки довжиною l можна представити у вигляді ряду

$\varpi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin(k\pi x/l).$	(18)
---	-------

Коефіцієнти цього ряду q_k можна розглядати як узагальнені координати. Справді, при довільній зміні коефіцієнтів q_k у виразі (18) на величину δq_k зв'язку, накладені на балку, не будуть порушені, оскільки форми узагальнених переміщень $\sin(k\pi x/l)$ або, як їх звичайно називають, *фундаментальні (координатні) функції* задовольняють кінематичним умовам (звертаються в нуль на кінцях балки).

З наведених вище міркувань виходить ряд властивостей, якими повинні володіти координатні функції:

1. Кожна з координатних функцій повинна бути безперервною функцією координат точок у межах безперервної частини тіла або системи.

2. Кожна з координатних функцій повинна задовольняти кінематичним зв'язкам системи: у точках або перерізах, де по улаштуванню зовнішніх зв'язків які-небудь переміщення виключені (переміщення на жорстких опорах, кути повороту перерізів балки у жорсткому затисненні), відповідні координатні функції або їх похідні повинні мати нульові значення, у точках і перерізах, де переміщення можливі, принаймні одна з координатних функцій (похідних) повинна бути відмінною від нуля.

3. Сукупність усієї нескінченної безлічі координатних функцій повинна утворити повну систему лінійно незалежних функцій. Аналогічно поняттю узагальненого переміщення вводиться поняття *узагальненої сили*. Узагальнені сили Q_k не можуть задаватися довільно, а повинні відповідати обраним узагальненим координатам (переміщенням) q_k . По визначенню узагальнена сила Q_k є коефіцієнт при прирощенні узагальненого переміщення загальному виразі для роботи всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на цьому переміщенні

$\delta U_k = Q_k \delta q_k.$	(19)
--------------------------------	-------

Приклад 1. Нехай на вільно обперту балку діє розподілене навантаження інтенсивністю $p(x)$, в перерезі $x=c_1$ прикладена сила P , а в перерезі $x=c_2$ — момент M (рис. 4).

Рішення

Для визначення узагальненої сили Q_k необхідно надійти в такий спосіб. Дано узагальненому переміщенню q_k прирощення δq_k . Прирощення δq_k викликає збільшення пружної лінії балки (18):

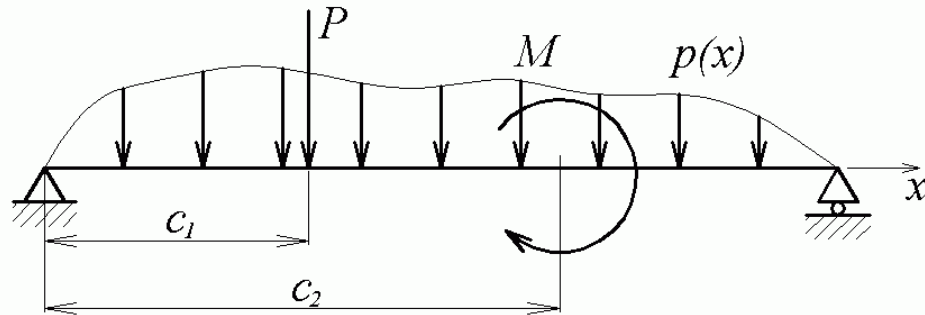


Рис. 4. Наприклад 1

На цьому прирощенні зазначене вище навантаження балки зробить роботу

$\delta U_k = \left(\int_0^l p(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx + P \sin \frac{k\pi c_1}{l} + M \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi c_2}{l} \right) \delta q_k.$	(20)
---	-------

Коефіцієнт (вираз в дужках) при δq_k буде шуканим значенням для узагальненої сили Q_k .

4 Деякі теореми теорії пружності і будівельної механіки

Теорема Лагранжа. Якщо виразити можливі переміщення системи через узагальнені, то сума робіт всіх зовнішніх сил при відхиленні системи від положення рівноваги запишеться у вигляді

$\delta U = \sum_k Q_k \delta q_k.$	(21)
-------------------------------------	-------

Для зовсім пружного тіла потенційна енергія є однозначною функцією компонентів переміщень і, отже, однозначною функцією узагальнених координат. Тоді варіацію потенційної енергії можна визначити по формулі

$\delta \Pi = \sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k.$	(22)
---	-------

Вносячи вираження (21) і (22) у рівняння (3) і дорівнюючи в отриманій рівності коефіцієнти при однакових варіаціях , одержуємо математичне формулювання теореми Лагранжа

$\partial \Pi / \partial q_k = Q_k,$	(23)
--------------------------------------	-------

т.є. у положенні рівноваги похідна від потенційної енергії деформації по узагальненій координаті дорівнює відповідній узагальненій силі.

Теореми для лінійно деформівних систем. Для лінійно деформівних систем між узагальненими силами і переміщеннями існує лінійна залежність

$Q_k = \sum_i \beta_{ki} q_i, \quad k=1, 2, \dots$	(24)
--	-------

Початок взаємності сил. Скориставшись теоремою Лагранжа (23) і врахувавши, що значення другої похідної не залежить від порядку диференціювання, знайдемо

$\partial Q_k / \partial q_i = \partial Q_i / \partial q_k,$	(25)
--	-------

або, якщо врахувати (24),

$\beta_{ki} = \beta_{ik}.$	(26)
----------------------------	-------

Рівностію (26) виражається властивість взаємності коефіцієнтів β_{ki} ; тому що на підставі (24) β_{ki} дорівнює значенню k -ї узагальненої сили при одиничному i -му узагальненому переміщенні, а β_{ik} дорівнює значенню i -ї узагальненої сили при одиничному k -м переміщенні, то умову (26) часто називають *початком взаємності сил*.

Теорема Клапейрона. Для лінійно деформівної системи похідна потенційної енергії по узагальненому переміщенню, якщо врахувати залежності (23) і (24), є лінійною функцією узагальнених переміщень. Тоді сама потенційна енергія деформації буде однорідною квадратичною функцією узагальнених переміщень (координат). На підставі теореми Ейлера про однорідні степеневі функції можна записати

$\sum_k (\partial \Pi / \partial q_k) q_k = 2\Pi.$	(27)
--	-------

Отриманий вираз, якщо врахувати теорему Лагранжа (23), перетвориться до виду

$\sum_k Q_k q_k = 2\Pi.$	(28)
--------------------------	-------

Формулою (28) і виражається *теорема Клапейрона: подвоєна потенційна енергія деформації лінійно деформованої системи дорівнює сумі добутків узагальнених сил на узагальнені переміщення, що відповідають положенню рівноваги системи*.

Теорема Кастільяно. Потенційна енергія деформації може бути виражена не тільки через узагальнені переміщення, як це приймалося в теоремі Лагранжа, але і через узагальнені сили.

Якщо розглядати сукупність залежностей (24) як систему рівнянь щодо узагальнених переміщень, то, вирішивши цю систему, можна одержати

$q_k = \sum_{i=1} \alpha_{ki} Q_i.$	(29)
-------------------------------------	-------

Як ми вже відзначали вище, у випадку лінійно деформівної системи потенційна енергія деформації є однорідною функцією другого ступеня від узагальнених переміщень. Тому при заміні за допомогою залежності (29) узагальнених переміщень узагальненими силами потенційна енергія перетвориться в однорідну функцію другого ступеня від узагальнених сил.

На підставі теореми Ейлера про однорідні функції

$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial Q_k} Q_k = 2\Pi.$	(30)
--	--------

Порівнюючи ліві частини виразу (28) і (30), приходимо до залежності

$\partial V / \partial Q_k = q_k,$	(31)
------------------------------------	--------

яка виражає *теорему Кастільяно*: *частна похідна від потенційної енергії по узагальненій силі дорівнює відповідній цій силі узагальненому переміщенню*.

Під узагальненими переміщеннями (координатами) q_k , що відповідають узагальненим силам Q_k , необхідно розуміти переміщення, прирощення яких пов'язано з прирощенням роботи сили Q_k , залежністю (19).

Узагальненим переміщенням, що відповідає якій-небудь зовнішній зосередженій силі, буде лінійне переміщення точки прикладення цієї сили в напрямку її дії. Узагальненим переміщенням, що відповідає зовнішньому зосередженому моменту, буде кут повороту відповідного перерізу в напрямку дії моменту. Якщо ж в якості узагальненої сили прийняти сукупність двох моментів, прикладених до кінцевих перерізів балки (рис. 5), $M_1 = M_2 = M$, то відповідним узагальненим переміщенням буде кут повороту одного торцевого перерізу стосовно іншого.

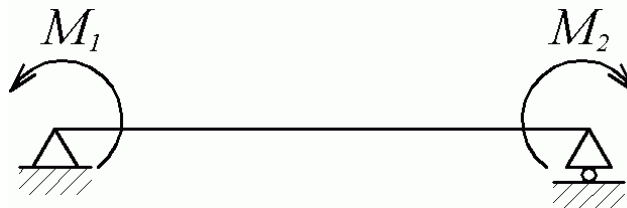


Рис. 5. Узагальнена сила у вигляді сукупності двох моментів

Узагальнене переміщення вважається позитивним, якщо узагальнена сила робить на ньому позитивну роботу. Наприклад, при визначенні по теоремі Кастільяно кутів повороту опорних перерізів балки, зображеної на рис. 5, кут повороту лівого опорного перерізу буде позитивним при повороті проти годинникової стрілки, а кут повороту правого опорного перерізу - при повороті за годинниковою стрілкою.

Теорема Кастільяно (31) дозволяє обчислити будь-яке узагальнене переміщення в лінійно деформівній системі, якщо тільки можна скласти вираз потенційної енергії в функції від; навантаження і узагальненої сили, що відповідає узагальненому переміщенню. Але це зробити можна тільки для пружної системи, статична невизначеність якої розкрита. У цьому випадку зайві реакції виражені через навантаження, після чого легко виписати вираз потенційної енергії у функції від навантаження і узагальненої сили.

Якщо до складу навантаження розглянутої пружної системи узагальнена сила, що відповідає шуканому переміщенню, не входить, потрібно ввести фіктивну силу Q_ϕ після знаходження узагальненого переміщення покласти цю силу, рівною нулю, тобто

$q_Q = \left(\partial \Pi / \partial Q_\phi \right)_{Q_\phi=0}.$	(32)
---	--------

Теорема про найменшу роботу. Вище затверджувалося, що теорема Кастільяно може бути використана для визначення переміщень лише після розкриття статичної невизначеності. Покажемо, що цією теоремою можна скористатися і для знаходження статично невизначених величин.

Загальний метод розкриття статичної невизначеності полягає в тім, що за допомогою розрізів і включення в навантаження статично невизначених величин заміняємо розглянуту систему іншою, статично визначеною. Балка, зображена на рис. 6,а є двічі статично невизначеною системою. За допомогою розрізу вихідна балка ділиться на дві частини (рис. 6,б). Зусилля взаємодії між лівою і правою частинами позначимо через N і M . Нехай Π_1 — повна потенційна енергія лівої частини балки, а Π_2 — правої. Тоді по теоремі Кастільяно (31) можна виписати наступні залежності для визначення узагальнених переміщень (вертикальні переміщення і кути повороту) лівої і правої частин вихідної балки в перетині розрізу (рис. 6,в):

$\left. \begin{aligned} q_1 &= \partial \Pi_1 / \partial N; \quad q_2 = \partial \Pi_2 / \partial N; \\ \alpha_1 &= \partial \Pi_1 / \partial M; \quad \alpha_2 = \partial \Pi_2 / \partial M. \end{aligned} \right\}$	(33)
--	------

З умови нерозривності - рівності відповідних узагальнених переміщень лівої і правої частин балки:

$$q_1 = -q_2; \quad \alpha_1 = -\alpha_2,$$

якщо взяти до уваги (33), одержимо

$\partial \Pi / \partial N = 0; \quad \partial \Pi / \partial M = 0,$	(34)
---	------

де $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ — повна потенційна енергія деформації обчислена з урахуванням дії на пружну систему зовнішнього заданого навантаження й статично невизначених зусиль N , M .

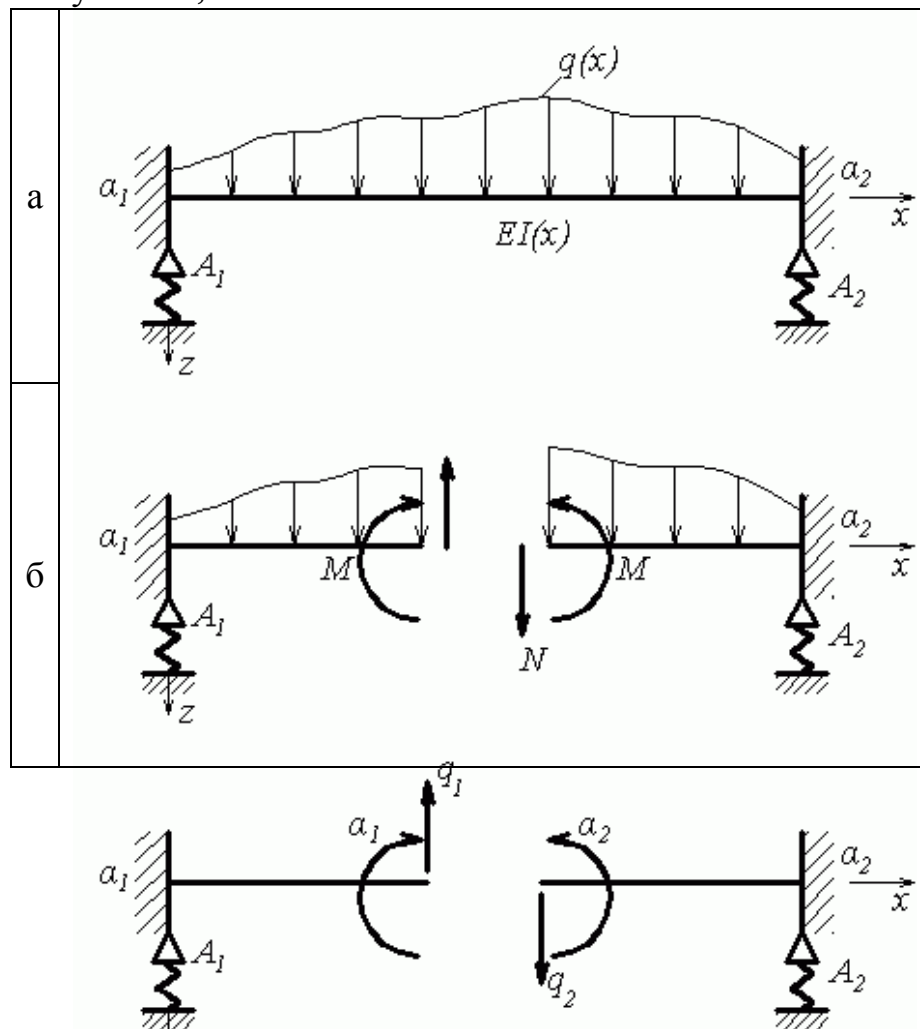


Рис. 6. Статично невизначена балка

Тому що потенційна енергія деформації є функція істотно позитивна й при збільшенні навантаження може безмежно зростати, то формули (34) є умовою мінімуму потенційної енергії і виражають собою *теорему про найменшу роботу: частинна похідна від потенційної енергії по зайвим (статично невизначеним) невідомим дорівнює нулю.*

Ця теорема іноді формулюється інакше: *дійсні значення зайвих невідомих перетворюють потенційну енергію деформації системи в мінімум.* При цьому

$\delta\Pi = 0.$	(35)
------------------	-------

Властивість взаємності переміщень. На підставі залежностей (31) і (24)

$\partial\Pi/\partial Q_k = \sum_i \alpha_{ki} Q_i.$	(36)
--	-------

Для інтегрувальної функції значення змішаної похідної не залежить від порядку диференціювання:

$$\partial^2\Pi/(\partial Q_k \partial Q_i) = \partial^2\Pi/(\partial Q_i \partial Q_k)$$

Звідси, якщо врахувати (36), треба властивість взаємності переміщень (коефіцієнтів впливу)

$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}.$	(37)
------------------------------	-------

Як видно з виразу (24), коефіцієнт α_{ik} є значення *i*-го узагальненого переміщення при дії на лінійно деформівну систему (тіло) одиничної *k*-ї узагальненої сили, а α_{ki} — значення *k*-го узагальненого переміщення при дії *i*-ї одиничної сили.

Теорема про взаємність робіт. Властивість взаємності коефіцієнтів впливу (26) і (37) дозволяє довести теорему про взаємність робіт, що спрощує рішення деяких задач будівельної механіки.

Нехай на пружне тіло діють по черзі дві системи сил: сили першого стану $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ і сили другого стану $R_1, R_2, \dots, R_n$.

Узагальнені переміщення, що відповідають силам другого стану і викликані силами першого стану, визначаються по формулах

$r_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} Q_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$	(38)
---	-------

узагальнені переміщення, що відповідають силам першого стану і викликані силами другого стану,- по формулах

$q_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} R_i, \quad k = 1, 2, \dots, m.$	(39)
---	-------

Теорема про взаємність робіт говорить: при дії на пружне лінійно деформівне тіло по черзі двох систем навантажень робота сил першого стану на відповідним їм переміщеннях, викликаних дією сил другого стану, дорівнює роботі сил другого стану на відповідним їм переміщеннях, викликаних дією на тіло сил першого стану, тобто

$\sum_{k=1}^m Q_k q_k = \sum_{i=1}^n R_i q_i.$	(40)
--	-------

Щоб переконатися в справедливості рівності (40), виразимо за допомогою залежностей (38) і (39) узагальнені переміщення через узагальнені зусилля. Тоді одержимо

$$\sum_{k=1}^m Q_k \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} R_i = \sum_{i=1}^n R_i \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} Q_k$$

або

$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} Q_k R_i = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} Q_k R_i.$	(41)
--	-------

З урахуванням властивості взаємності коефіцієнтів впливу (37) остання рівність перетворюється в тотожність, чим і підтверджується справедливість теореми про взаємність робіт (40).

5 Принцип можливих переміщень

Розглянемо деяке тіло, завантажене об'ємними $\bar{X}_i$ і поверхневими $\bar{p}_{vi}$ силами на частині поверхні S_1 . Частина поверхні тіла, що залишилася, S_2 має задані переміщення (кінематичні граничні умови)

$u_i = \bar{u}_i \in S_2.$	(42)
----------------------------	-------

Припустимо, що стан рівноваги тіла характеризується компонентами переміщення u_i , шістьма компонентами напруги σ_{ij} і шістьма компонентами деформації ε_{ij} . Далі, нехай переміщення тіла в його рівноважному стані одержали малі можливі переміщення. Тоді відповідно до принципу можливих переміщень (3)

$\delta \Pi - \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i RV - \iint_{S_1} \bar{p}_{vi} \delta u_i ds = 0,$	(43)
---	-------

де варіація потенційної деформації тіла (10)

$\delta \Pi = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV.$	(44)
---	-------

Принцип можливих переміщень у формулюванні (43) справедливий при будь-яких властивостях матеріалу тіла, тобто при довільному законі зв'язку між компонентами напружень і деформацій, і при довільному законі кінематичного зв'язку між компонентами переміщень u_i і деформацій ε_{ij} . Ним можна користуватися і у випадку неконсервативних зовнішніх сил, тобто сил, робота яких залежить від історії навантаження тіла.

Покажемо, що виконання умови (43) приводить до тотожного виконання всіх рівнянь рівноваги по обсягу тіла і природних (силових) граничних умов на частині поверхні S_1 . Для простоти обмежимося виводом рівнянь рівноваги лінійної теорії пружності, що припускає справедливість лінійних співвідношень (2.40) між компонентами переміщень і деформацій.

Варіації від компонентів деформації рівні

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \right).$$

Вносячи вираз для $\delta \varepsilon_{ij}$ у формулу (44) і інтегруючи кожний член підінтегрального виразу вроздріб з використанням відомої формули Гаусса-Остроградського

$$\iiint_V \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (L l_{v1} + M l_{v2} + N l_{v3}) dS$$

для перетворення об'ємного інтеграла в поверхневий, одержуємо

$\delta \Pi = \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{vj} \delta u_i dS + \iint_{S_2} \sigma_{ij} l_{vj} \delta u_i dS - \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV_i.$	(45)
--	-------

Можливі переміщення δu_i повинні бути погоджені з кінематичними умовами закріплення тіла. У нашому випадку δu_i потрібно вибрати так, щоб не порушувалася умова (42) на поверхні S_2 . Ця умова не буде порушена, якщо

$$\delta u_i = 0 \in S_2.$$

Тоді другий інтеграл у формулі (45) звернеться в нуль і, отже,

$$\delta \Pi = \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{vj} \delta u_i dS - \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV.$$

Підставляючи значення $\delta \Pi$, у вираз (43) і збираючи всі члени при варіаціях δu_i , одержуємо

$- \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vi} - \bar{p}_{vi}) \delta u_i dS = 0.$	(46)
--	-------

У силу довільності варіацій δu_i (δu , δv , δw) рівність (46) можливо лише у випадку, якщо кожний з коефіцієнтів при цих варіаціях буде дорівнювати нулю

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \in V,$	(47)
---	-------

$\sigma_{ij} l_{vj} = \bar{p}_{vi}, \quad i = 1, 2, 3 \in S_1.$	(48)
---	-------

Рівняння (47) являють собою основні диференціальні рівняння рівноваги для об'ємного напруженого стану лінійної теорії пружності; система рівнянь (48) — силові граничні умови на частині поверхні тіла S_1 , де прикладені поверхневі сили $\bar{p}_{vi}$.

Отриманий результат дає підставу вважати, що *принцип можливих переміщень* (43) є найбільш загальним початком статички, застосовним до задач визначення рівноважного стану тіла незалежно від того, підкоряється матеріал тіла закону Гука чи ні.

Якщо при використанні принципу можливих переміщень функції, якими апроксимуються компоненти переміщення u_i , безперервні і диференційовані по всій області V , а також задовольняють всім кінематичним зв'язкам, накладеним на тіло, то умови сплошности тотожно виконуються по всьому обсягу тіла і на

частині його поверхні S_2 . Рівняння ж рівноваги (47) і (48), як було показано вище, автоматично виконуються як наслідок використання принципу можливих переміщень.

Оскільки всі основні залежності теорії пружності виявилися при цьому виконаними, то знайдені при використанні принципу можливих переміщень переміщення u_i будуть дійсними переміщеннями тіла.

Консервативні зовнішні сили. *Консервативними вважаються сили, які володіють потенціалом.* Ознакою існування потенціалу зовнішніх сил є незалежність роботи, чиненої силами, від шляху, яким система приводиться в остаточний стан.

Переважає більшість зовнішніх сил не міняє в процесі деформування тіла своєї величини й напрямку дії. Такі сили часто називають *мертвими*. Для них $\delta \bar{X}_i = 0$, $\delta \bar{p}_{vi} = 0$. Легко бачити, що вони є консервативними. При використанні принципу можливих переміщень для таких сил зручно ввести в розгляд *потенціал (силову функцію) зовнішніх сил*

$U = \iiint_V \bar{X}_i u_i dV + \iint_{S_1} \bar{p}_{vi} u_i dS.$	(49)
--	-------

Варіація потенціалу U

$\delta U = \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \iint_{S_1} \bar{p}_{vi} \delta u_i dS$	(50)
--	-------

визначає збільшення роботи зовнішніх сил на можливому переміщенні тіла.

З урахуванням виразу (50), залежність (50) перепишеться у вигляді

$\delta \mathcal{E}_1 = \delta (\Pi - U) = 0,$	(51)
--	-------

де

$\mathcal{E}_1 = \Pi - U = \Pi - \iiint_V \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_1} \bar{p}_{vi} u_i dS;$	(52)
--	-------

$\mathcal{E}_1$ — повна енергія деформованого тіла; Π — потенційна енергія тіла.

Рівність (51) показує, що для консервативних систем із всіх можливих з точки зору сплошності тіла і умов його закріплення (42) переміщень дійсними переміщеннями будуть ті з них, яким повна енергія $\mathcal{E}_1$ приймає стаціонарне значення. При цьому можливі наступні положення рівноваги:

- стійке: $\mathcal{E}_1 = \min$, $\delta \mathcal{E}_1 = 0$, $\delta^2 \mathcal{E}_1 > 0$;
- нестійке: $\mathcal{E}_1 = \max$, $\delta \mathcal{E}_1 = 0$, $\delta^2 \mathcal{E}_1 < 0$;
- байдужне: $\mathcal{E}_1 = \text{const}$, $\delta \mathcal{E}_1 = 0$, $\delta^2 \mathcal{E}_1 = 0$.

Наведені умови становлять сутність *принципу Діріхле*, що представляє собою достатній критерій для оцінки стану рівноваги консервативних систем.

Вище наведені два формулювання принципу можливих переміщень: (43) - найбільш загальне формулювання, що може бути використана для рішення фізично і геометрично лінійних і нелінійних крайових задач напувай дії консервативних і неконсервативних зовнішніх сил; (51) - справедлива при дії на розглянуте тіло консервативних зовнішніх сил.

6 Метод Рітца

Основні положення методу. Нехай є тіло, завантажене об'ємними $\bar{X}_i$ і поверхневими $\bar{p}_{vi}$ силами на частині поверхні S_1 . На частині, що залишилася, S_2 поверхні накладені певні геометричні зв'язки

$u_i = \bar{u}_i, \quad i=1, 2, 3.$	(53)
-------------------------------------	-------

Невідомі компоненти переміщень $u_i(x, y, z)$ шукаємо у вигляді

$u_i(x, y, z) = u_{i0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^{N_i} a_{ik} f_{ik}(x, y, z),$	(54)
---	-------

де $u_{i0} = \bar{u}_i \in S_2$; $f_{ik}(x, y, z)$, $(k=1, 2, \dots, N_i)$ — координатні функції, що задовольняють при кожному фіксованому значенні i ($i=1, 2, 3$) умовам лінійної незалежності і повноти, а також умові $f_{ik} = 0$ на S_2 ; a_{ik} — параметри, що підлягають визначенню. При такому підході до вибору функцій u_{i0} і f_{ik} вираз (64) будуть задовольняти геометричним зв'язкам (53)

Треба, однак, помітити, що в окремих випадках при застосуванні варіаційних методів і, зокрема, методу Рітца можна одержати цілком задовільну точність при використанні у виразах (54) систем функцій, що не задовольняють умовам повноти. Говорячи точніше, умова повноти систем функцій f_{ik} — лише бажана умова, але не обов'язкова.

Для відшукування постійних a_{ik} варто попередньо одержати вираз для потенційної енергії Π в функції від компонентів переміщення.

Підстановка виразу (54) для компонентів переміщення в основне рівняння принципу можливих переміщень (43), якщо врахувати довільність варіацій , дозволяє одержати систему основних рівнянь методу Рітца

$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ik}} - \iiint_V X_i f_{ik} - \iint_{S_1} \bar{p}_{vi} f_{ik} = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad k=1, 2, \dots, N_i.$	(55)
--	-------

для визначення невідомих параметрів a_{ik} .

При дії консервативних зовнішніх сил (51) рівняння методу Рітца приймають наступний вид:

$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial a_{ik}} = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad k=1, 2, \dots, N_i,$	(56)
--	-------

де $\mathcal{E}_1 = \Pi - U$ — повна енергія тіла. Потенціал зовнішніх сил U у виразі для визначається по формулі (49).

Розрахунковий алгоритм методу Рітца досить простий і включає виконання наступних основних операцій:

1) вибір координатних функцій f_{ik} і запис на їх основі виразів (54) для компонентів переміщень u_i ;

2) підстановку обраних виразів для переміщень у рівняння методу Рітца (55) або (56) при дії консервативних зовнішніх навантажень. Після виконання всіх необхідних обчислювальних операцій одержуємо систему лінійних (для лінійних задач) або нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо параметрів a_{ik} ;

3) визначення параметрів a_{ik} зі спільного рішення системи алгебраїчних рівнянь, отриманих у п. 2;

4) визначення компонентів переміщень по формулах (54);

5) визначення компонентів деформації і напруження по знайдених компонентах переміщення за допомогою відповідних залежностей теорії пружності.

Приклади використання методу для дослідження згинання балок. Ступінь успішності застосування методу Рітца до рішення практичних задач багато в чому залежить від ступеня вдалості вибору координатних функцій. Розумно обрана система координатних функцій дозволяє обмежитися в рішенні малим числом членів ряду і істотно скоротити обсяг обчислень. Підбір координатних функцій при рішенні конкретних задач вимагає певних навиків. Дуже важливо навчитися вдало вибирати ці функції для одномірних задач, оскільки при рішенні дво- і тривимірних задач координатні функції, як правило, задають у вигляді добутку одномірних функцій.

Приклад 2. Визначити за допомогою методу Рітца пружну лінію вільно обпертої по кінцях призматичної балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 7).

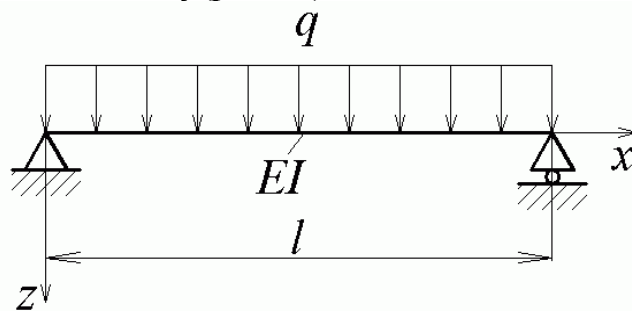


Рис. 7. Наприклад 2

Рішення

Пружну лінію балки $\varpi(x)$ будемо знаходити у вигляді

$\varpi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x).$	(57)
---	-------

Функції $f_k(x)$ в (57) повинні бути лінійно незалежними. Крім того, бажано, щоб їхня система задовольняла умовам повноти. Нарешті, у методі Ритца прийнятий вираз для пружної лінії повинен обов'язково задовольняти кінематичним граничним умовам задачі: при $x=0$, $x=l$, $\varpi=0$ і у жодному разі не накладати додаткових кінематичних обмежень (наприклад, закріплювати якийсь переріз балки по її довжині). Ці вимоги будуть виконані, якщо в якості координатних функцій приймемо

$f_k(x) = \sin(k\pi x/l), \quad k=1, 2, \dots$	(58)
--	-------

Помітимо, що функції (58) задовольняють також і силовим граничним умовам: при $x=0$, $x=l$

$EI \varpi''(x) = 0.$	(59)
-----------------------	-------

Задоволення силовим граничним умовам у методі Рітца хоча і не обов'язково, але бажано, оскільки при цьому підвищується швидкість збіжності, рішення. З урахуванням (58) вираз (57) перепишеться у вигляді

$\varpi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l).$	(60)
---	-------

Щоб скористатися рівняннями методу Рітца (56)

$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial a_k} = \frac{\partial (\Pi - U)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$	(61)
--	-------

необхідно попередньо визначити вираз для потенційної енергії балки і силової функції поперечного навантаження $q(x)$.

Якщо обмежитися врахуванням лише деформацій вигину балки, то

$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left[\frac{\partial \varpi^2(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$	(62)
--	-------

або, після підстановки (60) в (62),

$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} \right]^2 dx.$	(63)
--	-------

Силова функція зовнішніх сил [див. (49)]

$U = \int_0^l q(x) \varpi(x) dx = q \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$	(60.64)
---	---------

Вносячи отримані вираз для Π и U у рівняння (61), маємо

$$\frac{\partial (\Pi - U)}{\partial a_k} = EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} a_k - \frac{ql}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = 0,$$

звідки

$a_k = \begin{cases} \frac{4q}{EI} \frac{l^4}{k^5 \pi^5} & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots; \\ 0 & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$	(65)
---	-------

З урахуванням (65) вираз для пружної лінії балки остаточно прийме наступний вид:

$\varpi(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$	(66)
--	-------

Цікаво оцінити точність рішення при збереженні в ряді (66) лише декількох перших членів. Підрахуємо прогин балки в середині прольоту ($x=l/2$) й збереження в (66) лише першого члена

$\varpi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \frac{ql^4}{EI} \cong 0,013071 \frac{ql^4}{EI}$	(67)
---	-------

Точне рішення дає

$$\varpi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \cong 0,0130208 \frac{ql^4}{EI}.$$

Погрішність результату (67) становить усього 0,4%.

Приклад 3. У методі Рітца не завжди можна скористатися якою-небудь відомою системою функцій як координатні функції. Систему координатних функцій часто доводиться будувати безпосередньо при рішенні задач. Як приклад покажемо, як можна побудувати систему координатних функцій для балки, один кінець якої жорстко затиснений, а другий - вільно обпертий на жорстку опору.

Граничні умови такої балки мають вигляд:

$\left. \begin{aligned} \text{при } x=0 : \varpi = \varpi' = 0; \\ \text{при } x=l : \varpi = \varpi'' = 0. \end{aligned} \right\}$	(68)
---	-------

Задамо пружну лінію балки у формі статичного ряду

$\varpi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$	(69)
--	-------

Кінематичні умови задовольняються, якщо покласти $a_0 = a_1 = 0$.

Підкоряючи далі вираз (69) умові $\varpi(l) = 0$, одержуємо

$$a_2 l^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k l^k = 0,$$

звідки

$$a_2 = - \sum_{k=3}^{\infty} a_k l^{k-2}.$$

У результаті пружна лінія балки прийме вид

$\varpi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^2 (x^{k-2} - l^{k-2}).$	(70)
--	-------

Безпосередньо з (70) одержуємо шуканий вираз для координатних функцій

$f_k(x) = x^2 (x^{k-2} - l^{k-2}), \quad k = 3, 4, \dots$	(71)
---	-------

Кожна з функцій (71) задовольняє всім кінематичним умовам задачі

$$f_k(0) = 0; \quad f'_k(0) = 0; \quad f_k(l) = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Приклад 4. За допомогою методу Рітца визначити пружну лінію непрямокутної балки, що лежить на суцільній пружній основі змінної жорсткості $k(x)$. Зовнішнє навантаження і умови закріплення балки зображені на рис. 8. Тут через a позначений коефіцієнт піддатливості пружного закладення, а через A — коефіцієнт піддатливості пружної опори.

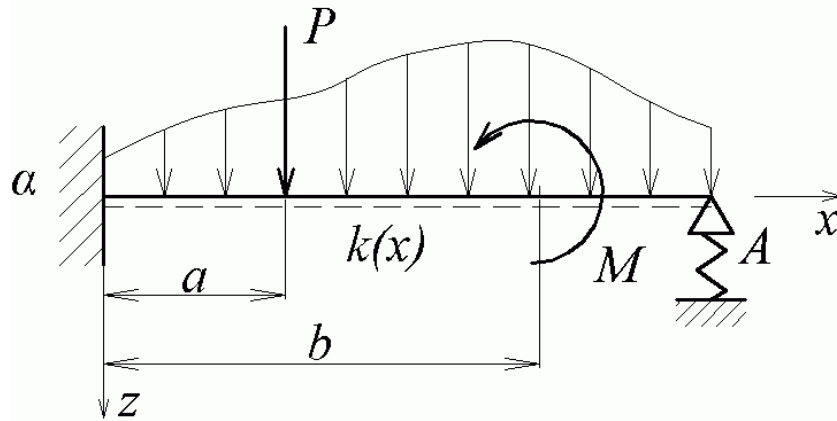


Рис. 8. Наприклад 4

Рішення

Із граничних умов балки лише умова $w(0)=0$ є кінематичною. Вона буде задовольнена, якщо вираз для пружної лінії балки задати у вигляді ряду

$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x),$	(72)
--	--------

де

$f_k(x) = x^k, \quad k=1, 2, \dots$	(73)
-------------------------------------	--------

Визначимо попереднє значення функціонала $\mathcal{E}_1 = \Pi - U$.

Потенційна енергія Π складається з потенційної енергії вигину балки, енергії пружної основи, енергії пружного закладення й енергії пружної пори:

$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [w''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k(x) w^2(x) dx + \frac{1}{2a} [w'(0)]^2 + \frac{1}{2A} [w(l)]^2.$	(74)
--	--------

Силова функція зовнішніх сил U містить члени, що враховують роботу поперечного навантаження $q(x)$, зосередженої сили P і моменту M :

$U = \int_0^l q(x) w(x) dx + P w(a) - M w'(b).$	(75)
---	--------

При визначенні знака для кожного доданка в (75) варто врахувати, що робота позитивна, якщо напрямок дії навантаження збігається з позитивним напрямком переміщення, на якому це навантаження робить роботу.

Підставляючи (72) у вираз (74) і (75), одержуємо

$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} a_k a_i; \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a_k,$	(76)
--	--------

де

$$A_{ki} = \int_0^l EI(x) f_k''(x) f_i''(x) dx + \int_0^l k(x) f_k(x) f_i(x) dx + \frac{1}{a} f_k'(0) f_i'(0) + \frac{1}{A} f_k(l) f_i(l);$$

$$B_k = \int_0^l q(x) f_k(x) dx + P f_k(a) - M f_k'(b).$$

Скориставшись далі рівняннями методу Рітца (56), одержимо систему рівнянь для визначення параметрів a_k

$$\sum_{i=2}^{\infty} A_{ki} a_i = B_k, \quad k=1, 2, \dots$$

Знаючи параметри a_k , можна за допомогою виразу (72) знайти пружну лінію, а потім і всі інші елементи згинання балки.

7 Узагальнений метод Бубнова- Гальоркіна

Узагальнений метод Бубнова-Гальоркіна заснований на використанні принципу можливих переміщень і є, по суті, трохи іншою формою запису основних рівнянь методу Рітца (43).

Нехай є тіло, завантажене об'ємними $\bar{X}_i$ і поверхневими F_{vi} силами на частині поверхні S_1 . На частині, що залишилася, S_2 поверхні накладені геометричні зв'язки (42).

При рішенні задачі як невідомі компоненти переміщень приймаються, як і в методі Рітца, вираження (54).

Система основних рівнянь методу може бути отримана безпосередньо з (43), для задачі лінійної теорії пружності вона має вигляд (46)

$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV - \iint_{S_2} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{p}_{vi}) \delta u_i dS = 0, \quad i=1, 2, 3.$	(77)
---	-------

Вносячи сюди вираз для варіацій переміщень

$\delta u_i = \sum_{k=1}^{N_i} \delta a_{ik} f_{ik}(x, y, z)$	(78)
---	-------

і з огляду на довільність і лінійну незалежність між собою, одержуємо систему рівнянь *узагальненого методу Бубнова— Гальоркіна* для визначення параметрів

$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) f_{ik}(x, y, z) dV - \iint_{S_2} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{p}_{vi}) f_{ik}(x, y, z) dS = 0,$ $i=1, 2, 3; \quad k=1, 2, \dots, N_i.$	(79)
---	-------

У рівняннях (77) і (79) у круглих дужках під знаком інтеграла знаходяться відповідно основні рівняння рівноваги об'ємної задачі теорії пружності і силові (природні) граничні умови. Саме з цієї причини метод Бубнова-Гальоркіна особливо ефективний, якщо для розглянутої задачі вже відомі диференціальні рівняння рівноваги і силові (природні) крайові умови. Це дозволяє, по суті, відразу виписати систему розв'язних рівнянь методу (79), уникнувши тим самим досить громіздких викладень, пов'язаних з обчисленням потенційної енергії як функції параметрів a_{ik} . При цьому, звичайно, потрібно попередньо переписати всі рівняння рівноваги й силові граничні умови в компонентах переміщень.

8 Метод Бубнова-Гальоркіна

Якщо обрані вирази для переміщень u_i , поряд з кінематичними граничними умовами задовольняють також і силовим умовам, то в рівняннях

узагальненого методу Бубнова-Гальоркіна (77) поверхневі інтеграли зникають, і вони для геометрично лінійних задач теорії пружності приймають наступний вид:

$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV = 0, \quad i=1, 2, 3.$	(80)
---	-------

Рівняння (80) є рівняннями методу Бубнова-Гальоркіна.

При наближеному рішенні задачі невідомі компоненти переміщень u_i шукаємо у вигляді

$u_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_i} a_{ik} f_{ik}(x, y, z)$	(81)
--	-------

[або у формі (54)]. Система лінійно незалежних функцій $f_{ik}(x, y, z)$ обрана так, що всі крайові умови розглянутої задачі тотожно виконуються. Вносячи (81) в (80), одержуємо для визначення невідомих параметрів a_{ik} наступну систему рівнянь:

$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) f_{ik}(x, y, z) dV = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad k=1, 2, \dots, N_i.$	(82)
--	-------

Якщо рівняння рівноваги (вираз, що знаходиться в круглих дужках під знаком інтеграла) записані в напруженнях, то, використовуючи фізичний закон зв'язку між компонентами напружень і деформацій, а також кінематичні співвідношення між компонентами деформацій і переміщень, необхідно ці рівняння переписати в переміщеннях.

Метод Бубнова-Гальоркіна можна застосовувати і для наближеного рішення диференціальних рівнянь, необов'язково пов'язаних з якою-небудь варіаційною проблемою. Справді, нехай деяка крайова задача описується диференціальним рівнянням $2m$ -го порядку

$L^{(2m)}[u(x, y, z)] - q(x, y, z) = 0 \in V$	(83)
---	-------

при крайових умовах

$Q_j[u(x, y, z)] = f_j(x, y, z), \quad j=1, 2, \dots, m \in S,$	(84)
---	-------

де $L^{(2m)}(\)$ і $Q_j(\)$ — задані диференціальні оператори; $q(x, y, z)$ і $f_j(x, y, z)$ — задані функції.

Запишемо шукану функцію $u(x, y, z)$ у формі (81)

$u(x, y, z) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x, y, z)$	(85)
--	-------

і виберемо систему лінійно незалежних функцій $f_k(x, y, z)$ так, щоб всі крайові умови задачі (84) тотожно виконувалися. Якщо тепер припустити, що і є точним рішенням розглянутої задачі, то рівність (83) буде ортогонально до будь-якої сукупності функцій і, зокрема, до системи функцій $f_k(x, y, z)$

$\iiint_V [L^{(2m)}(u) - q(x, y, z)] f_k(x, y, z) dV = 0, \quad k=1, 2, \dots, N.$	(86)
--	-------

Рівняння (86) по своїй структурі тотожні рівнянням (82). Вносячи в (86) замість функції $u(x, y, z)$ вираз (85), одержуємо систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих параметрів a_k .

Приклад 5. Знайти прогин призматичної вільно обпертої балки жорсткістю на згинання EI , завантаженою рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q .

Рішення

Згинання розглянутої балки описується диференціальним рівнянням

$EI \varpi^{IV}(x) - q = 0$	(87)
-----------------------------	-------

при граничних умовах

$x = 0, \quad x = l : \varpi = 0, \quad \varpi'' = 0.$	(88)
--	-------

Прогин шукаємо у вигляді

$\varpi(x) = \sum_{k=1, 2, \dots}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l).$	(89)
---	-------

Вираз (89) задовольняє всім граничним умовам. Це дозволяє для визначення параметрів скористатися методом Бубнова-Гальоркіна

$\int_0^l [EI \varpi^{IV}(x) - q] \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$	(90)
---	-------

Підставивши сюди вираз для прогину з (89) і виконавши необхідні обчислювальні операції, знайдемо значення параметра a_k , а потім по формулі (89) зможемо одержати шуканий вираз для прогину балки

$\varpi(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1, 3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$	(91)
--	-------

Ряд, що стоїть в правій частині, підсумується в замкнутому виді, і тому

$\varpi(x) = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right),$	(92)
---	-------

що є точним виразом для прогину розглянутої балки.

9 Метод Курдюмова-Кочанова

При використанні методу Бубнова-Гальоркіна лінійно незалежні функції в (81) повинні бути обрані так, щоб всі крайові умови розглянутої задачі тотожно виконувалися. При досить складних граничних умовах виконання цієї вимоги стає досить скрутним. Цього недоліку позбавлений метод Курдюмова-Кочанова, що, як і метод Бубнова-Гальоркіна, застосуємо для одержання наближеного рішення як лінійних, так і нелінійних одномірних і багатомірних крайових задач.

Викладемо сутність цього методу на прикладі рішення одномірної задачі, описуваної диференціальним рівнянням

$L^{(2m)}[\varpi(x)] = q(x)$	(93)
------------------------------	-------

при крайових умовах

$\left. \begin{aligned} x=0 : Q_j(\varpi) &= f_j(x), \quad j=1, 2, \dots, m; \\ x=l : R_j(\varpi) &= r_j(x), \quad j=1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\}$	(94)
--	-------

де $L^{(2m)}(\cdot)$, $Q_j(\cdot)$ и $R_j(\cdot)$ — задані диференціальні оператори; $q(x)$, $f_j(x)$ і $r_j(x)$ — задані функції.

Рішення рівняння (93) шукаємо у вигляді

$\varpi(x) = \varpi_0(x) + \varpi_1(x),$	(95)
--	-------

де $\varpi_0(x)$ — загальний інтеграл деякого спрощеного диференціального рівняння (лінійного з постійними коефіцієнтами) того ж порядку, що й вихідне рівняння,

$L_0^{(2m)}(\varpi_0) = q_0.$	(96)
-------------------------------	-------

Зокрема, у якості $\varpi_0(0)$ можна взяти загальний інтеграл найпростішого диференціального рівняння 2 m-го порядку:

$\varpi_0^{(2m)}(x) = 0,$	(97)
---------------------------	-------

звідси одержимо

$\varpi_0(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_{2m-1} x^{2m-1} = \sum_{j=0}^{2m-1} C_j x^j,$	(98)
--	-------

де C_j — довільні постійні інтегрування.

С урахування залежності (95) безпосередньо з рівняння (93) можна одержати диференціальне рівняння для визначення $\varpi_1(x)$:

$L^{(2m)}(\varpi_1) = q(x) - L^{(2m)}(\varpi_0).$	(99)
---	-------

Частне рішення рівняння (99) будемо шукати у вигляді

$\varpi_1(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x),$	(100)
--	--------

де a_k — невідомі параметри, а $\varphi_k(x)$ — система функцій, що задовольняє лише умовам повноти.

Доцільно вибрати таку систему функцій $\varphi_k(x)$, що приводила б до максимального спрощення процедури визначення частного рішення рівняння (99). Цій вимозі найбільшою мірою задовольняє система функцій

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k=1, 2, \dots$$

Тоді

$\varpi_1(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x/l).$	(101)
--	--------

Для визначення невідомих скористаємося методом Бубнова-Гальоркіна:

$\int_0^l [L^{(2m)}(\varpi_1) - q(x) + L^{(2m)}(\varpi_0)] \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0, \quad k=1, 2, \dots, N.$	(102)
---	--------

Після підстановки (98) і (101) в (102) і виконання необхідних обчислювальних операцій, одержимо систему N алгебраїчних рівнянь щодо невідомих параметрів $a_k (k=1, 2, \dots, N)$ і постійних інтегрувань $C_j (j=0, 1, 2, \dots, 2m-1)$.

Отриману систему N рівнянь необхідно доповнити системою $2m$ алгебраїчних рівнянь, які знайдемо із граничних умов (94) після підстановки в них функції $\varpi(x)$, обумовленою сумою $\varpi_0(x)$ й $\varpi_1(x)$.

Вирішуючи спільно ці дві системи алгебраїчних рівнянь, зможемо визначити невідомі параметри $a_k (k=1, 2, \dots, N)$, і постійні інтегрування $C_j (j=0, 1, 2, \dots, 2m-1)$. Після чого по формулах (98) і (101) визначаються функції $\varpi_0(x)$ й $\varpi_1(x)$, по формулі (95) — рішення розглянутої крайової задачі $\varpi(x)$.

Приклад 6. Знайти прогин призматичної балки (рис. 9), лівий кінець якої вільно обертий, а правий — жорстко затиснений. Поперечне навантаження змінюється за законом

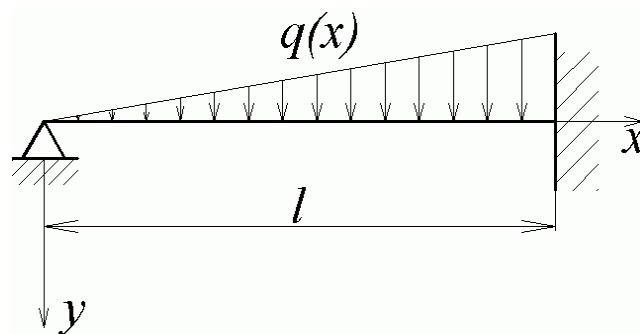


Рис. 9. Наприклад 6

Рішення

Згинання балки описується диференціальним рівнянням

$EI \varpi^{IV}(x) - q \frac{x}{l} = 0$	(103)
---	--------

при граничних умовах

$x=0: \varpi = \varpi'' = 0; \quad x=l: \varpi = \varpi' = 0.$	(104)
--	--------

Якщо намагатися відразу представити шукану функцію $\varpi(x)$ у формі ряду (81), що задовольняє всім граничним умовам (94), то можуть виникнути затруднення з підбором функцій $f_k(x)$. Саме із цієї причини доцільно скористатися для рішення розглянутої задачі методом Курдюмова - Кочанова.

Рішення рівняння (103) шукаємо у вигляді (95). При цьому як функція прийемо загальний інтеграл рівняння

$$\varpi_0^{IV}(x) = 0,$$

т. е.

$\varpi_0(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3,$	(105)
---	--------

а функцію $\varpi_1(x)$ візьмемо у вигляді (101). Тоді

$\varpi(x) = \varpi_0(x) + \varpi_1(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x/l).$	(106)
---	--------

Підкоряючи (106) граничним умовам (104), одержуємо систему рівнянь для визначення постійних C_i . У результаті

$$C_1 = C_3 = 0; \quad C_2 = -C_4; \quad C_4 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} k a_k.$$

Підставляючи знайдені значення C_i у вираз для прогину (106), одержуємо

$\varpi(x) = \left(-\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} k a_k + \varpi_1(x),$	(107)
--	--------

де

$\varpi_1(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x/l).$	(108)
--	--------

Вносячи (107) у рівняння (103), одержуємо диференціальне рівняння для визначення функції $\varpi_1(x)$:

$EI \varpi_1^{IV}(x) - q_1(x) = 0,$	(109)
-------------------------------------	--------

де

$q_1(x) = q \frac{x}{l} - EI \varpi_0^{IV}(x).$	(110)
---	--------

Інтегруючи знову отримане рівняння (109) по методу Бубнова—Гальоркіна, одержуємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів a_k

$$\int_0^l \left[EI \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{k\pi x}{l} - q_1(x) \right] \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

звідси знаходимо

$$a_k = (2ql^4 / \pi^5 EI) [(-1)^{k+1} / k^5],$$

що дозволяє переписати вираз для прогину (107) у вигляді

$$\varpi(x) = \frac{ql^4}{90EI} \frac{x}{l} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) + \frac{2ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

або, якщо врахувати, що ряд у правій частині підсумується в замкнутому виді при $N \rightarrow \infty$,

$\varpi(x) = \frac{ql^4}{120EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^2.$	(111)
--	--------

Вираз для прогину (111) є точним рішенням розглянутої задачі.

10 Метод Трєффца

Якщо функції для компонентів переміщень обрані так, що вони задовольняють кінематичним граничним умовам і є частними рішеннями рівнянь рівноваги по обсягу тіла, то в рівняннях (77) узагальненого методу Бубнова-Гальоркіна об'ємні інтеграли обертаються в нуль і рівняння приймають вид

$\iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{p}_{vi}) \delta u_i dS = 0, \quad i=1, 2, 3.$	(112)
---	--------

Система рівнянь (112) є математичним формулюванням методу Трєффца.

Вносячи сюди вираз для варіацій переміщень (78), одержуємо

$\iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{vj} - \bar{p}_{vi}) f_{ik}(x, y, z) dS = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad k=1, 2, \dots, N_i.$	(113)
--	--------

Якщо рівняння рівноваги в підінтегральних виразах записані в переміщеннях, то, використовуючи для переміщень вираз (54) і виконуючи необхідні обчислювальні операції, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів a_{ik} . Якщо ж рівняння рівноваги записані в напруженнях, то, попередньо використовуючи фізичні рівняння зв'язку між напруженнями й деформаціями, а потім залежності Коші, варто переписати рівняння рівноваги в переміщеннях.

11 Принцип можливих напружених станів

Для рішення крайових задач може бути використаний принцип можливих напружених станів, що у якомусь ступені є антиподом принципу можливих переміщень. Принцип цей може бути сформульований як для лінійних, так і нелінійних задач теорії пружності і будівельної механіки. Однак його використання для рішення геометрично нелінійних задач натрапляє на певні обчислювальні труднощі. Обмежимося викладом принципу можливих змін напруженого стану лише для рішення геометрично лінійних задач.

Варіаційна формула Кастільяно. За аналогією з поняттям можливих переміщень уводиться поняття статично можливих напружень $\delta\sigma_{ij}$, при яких не відбувається порушення рівнянь рівноваги тіла.

Статично можливі напруження задовольняють наступним однорідним рівнянням рівноваги по обсягу

$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta\sigma_{ij} = 0, \quad i=1, 2, 3 \in V,$	(114)
---	--------

і на його поверхні

$\delta\sigma_{ij} l_{vj} = 0, \quad i=1, 2, 3 \in S_1.$	(115)
--	--------

Принцип можливих напружених станів формулюється так: *якщо деформація системи погодиться з усіма внутрішніми зовнішніми зв'язками, то сума робіт, вироблених можливими змінами всіх зовнішніх і внутрішніх сил на дійсних переміщеннях тіла, дорівнює нулю.* Його математичне формулювання має вигляд

$\iiint_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{S_2} \bar{u}_i \delta p_{vi} dS = 0$	(116)
--	--------

або

$\delta \Pi' - \iint_{S_2} \bar{u}_i \delta p_{vi} dS = 0,$	(117)
---	--------

де

$\Pi' = \iiint_V w' dV = \iiint_V \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \int_0^{\sigma_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dV = \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \Pi$	(118)
---	--------

— так звана *додаткова потенційна енергія тіла*. Тут w' — додаткова потенційна енергія одиниці об'єму тіла. Якщо поведження матеріалу підкоряється закону Гука, то $\Pi' = \Pi$.

Залежність (117) носить назву *варіаційного рівняння Кастильяно*.

Напружений стан, варіації якого задовольняють рівнянню (117), відрізняється від всіх інших статично можливих напружених станів тим, що задовольняє не тільки рівнянням рівноваги усередині й на поверхні тіла, але й всім умовам сплошности по обсягу тіла й кінематичних умов на частині поверхні S_2 . А якщо це так, то такий стан і буде дійсним напруженим станом, що виникає в тілі під дією заданої сукупності зовнішніх сил.

Таким чином, якщо принцип можливих переміщень заміняє собою всі рівняння рівноваги, то принцип можливих напружених станів заміняє собою всі умови сплошности (диференціальні рівняння Сен-Венана і кінематичні крайові рівняння на S_2).

Початок найменшої роботи. В окремому випадку жорсткого закріплення точок тіла на поверхні варіаційна формула (117) спрощується і приймає вид S_2

$$\bar{u}_i = 0 \in S_2$$

варіаційна формула (117) спрощується й приймає вид

$\delta \Pi' = 0.$	(119)
--------------------	--------

Залежністю (119) виражається відомий *початок найменшої роботи*. З (119) виходить, що із всіх статично можливих напружень дійсним будуть ті, при яких додаткова потенційна енергія Π' приймає стаціонарне значення.

Для лінійно пружного матеріалу $\Pi' = \Pi$. Тоді варіаційна формула (119) перетвориться до виду (35)

$\delta \Pi = 0.$	(120)
-------------------	--------

Приклад 7. Використовуючи принцип можливих напружень, визначити напружений стан призматичного стержня при дії зовнішніх моментів, що M_z скручують, прикладених до торцевих перерізів стержня (рис. 10). Матеріал стержня ізотропний і підкоряється закону Гука.

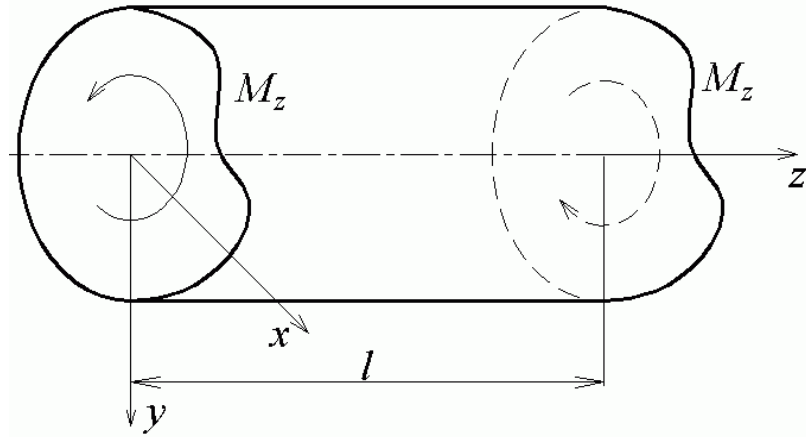


Рис. 10

Рішення

Задача про крутіння призматичних стержнів зводиться до пошуку функції напружень $\varphi(x, y)$, пов'язаної з компонентами напружень τ_{xz} і τ_{yz} залежностями (5.7):

$\tau_{xz} = \alpha G(d\psi/dy); \tau_{yz} = -\alpha G(d\psi/dx),$	(121)
--	--------

за умови на контуру поперечного перерізу однозв'язного стрижня (5.14)

$\psi = 0.$	(122)
-------------	--------

При цьому всі рівняння рівноваги по обсягу й умови відсутності зовнішнього навантаження на бічній поверхні тіла строго виконуються. Отже, для визначення значення $\psi(x, y)$ можна скористатися варіаційною формулою (116), що приводить до тотожного виконання всіх умов сплошності.

Торцеві перетини стрижня ($z=0, z=l$) завантажені крутними моментами M_z . Однак закон розподілу дотичних напружень τ_{xz} і τ_{yz} по площі торцевих перерізів невідомий — він визначається з умов спільності деформацій тіла стрижня.

Для компонентів переміщення, які будуть потрібні при складанні основної залежності принципу можливих напружень (116), приймемо використовуємо в теорії крутіння призматичних стержнів вирази (5.19)

де α — кут закручування на одиницю довжини стрижня — підлягає визначенню.

Беручи до уваги, що компоненти переміщення точок торцевого перетину $z=0$ дорівнюють нулю, а також незмінність компонентів напруження й компонентів деформації по довжині стрижня, рівняння (116) стосовно до розглянутого випадку переписується в наступному виді:

$$l \iint_F (-\alpha y \delta \tau_{xz} + \alpha x \delta \tau_{yz}) dx dy - l \iint_F (\gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}) dx dy = 0$$

або, якщо скористатися законом Гука (2.32) і виразити компоненти деформації через компоненти напруги,

$\iint_F (\alpha y \delta \tau_{xz} + \alpha x \delta \tau_{yz}) dx dy + \frac{1}{2G} \delta \iint_F (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy = 0,$	(123)
--	--------

де l і F — довжина й площа поперечного переріза стрижня відповідно.

Далі, вносячи у вираз (123) τ_{xz} і τ_{yz} з формул (121), одержуємо рівняння для визначення невідомої функції напруження $\psi(x, y)$

$$\delta \iiint_F \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(y \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0.$$

Отриману рівність можна спростити, якщо два останніх члени в лівій частині проінтегрувати по частинам і використовувати граничну умову (122). Остаточно для визначення функції ψ будемо мати наступне варіаційне рівняння:

$\delta \iint_F \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx dy = 0.$	(124)
--	--------

Рівнянням (124) виражається умова стаціонарності функціонала

$$\mathcal{E}_{II} = \iint_F \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 4\psi \right] dx dy.$$

Таким чином, задача звелася до визначення функції $\psi(x, y)$, що задовольняє на контурі поперечного перерізу стержня умові $\psi = 0$, а усередині контуру — умові стаціонарності функціонала $\mathcal{E}_{II}$.

Відразу ж виникає питання про вибір підходящого виразу для $\psi(x, y)$. Можна надійти так. Нехай $\Phi(x, y) = 0$ є рівняння контуру поперечного перерізу розглянутого стержня. Тоді вираз

$\psi(x, y) = \Phi(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} x^n y^m$	(125)
--	--------

задовольняє, з одного боку, контурній умові $\psi = 0$, а з іншого боку - дозволяє апроксимувати будь-який закон зміни функції $\psi(x, y)$ по площі поперечного перерізу стержня.

Підставляючи вираз (125) у функціонал $\mathcal{E}_{II}$, з умови його стаціонарності (124), якщо врахувати довільність варіацій δA_{nm} , одержуємо для визначення коефіцієнтів наступну систему (у нашій випадку — лінійних алгебраїчних) рівнянь:

$\partial \mathcal{E}_{II} / \partial A_{nm} = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots; \quad m=1, 2, 3, \dots$	(126)
---	--------

Із спільного рішення рівнянь системи визначаються коефіцієнти A_{nm} у виразі (125). Далі, маючи у своєму розпорядженні знайдене вираження, по формулах (5.16) можна визначити спочатку жорсткість стержня на крутіння

$C_K = 2G \iint_F \psi dF,$	(127)
-----------------------------	--------

а потім значення погонного кута закручування

$\alpha = M_z / C_K,$	(128)
-----------------------	--------

після чого шукані компоненти напружень τ_{xz} і τ_{yz} визначаються по формулах (121).

12 Зниження мірності вихідної крайової задачі. Метод Канторовича

Для рішення багатомірних крайових задач, описуваних диференціальними рівняннями в частинних похідних, можна скористатися варіаційними методами, методом сіток і методом кінцевих елементів.

Однак в окремих випадках може виявитися доцільним за допомогою спеціальних методів понизити мірність вихідної крайової задачі, і замість диференціальних рівнянь у частинних похідних (або відповідної умови стаціонарності функціонала від функції декількох змінних) одержати систему звичайних диференціальних рівнянь (або умова стаціонарності функціонала від функції однієї змінної), що описують уже одномірну крайову задачу. Рішення одномірних задач простіше і може бути виконане за допомогою розглянутих методів.

Обмежимося викладом лише одного методу зниження мірності вихідних крайових задач - методу Канторовича.

Метод являє собою розвиток методу Рітца для функціоналів від функції декількох змінних. Він полягає в наступному.

Нехай маємо варіаційну задачу, що зводиться до визначення, наприклад, невідомої функції $\varpi(x, y)$ двох змінних з умови стаціонарності деякого функціонала $\mathfrak{A}[\varpi(x, y)]$.

На відміну від методу Рітца, у методі Канторовича як коефіцієнти розкладання шуканої функції $\varpi(x, y)$ по координатних функціях замість невідомих констант беруться невідомі функції від деякої однієї змінної. Наприклад, для двомірної області, зображеної на рис. 11, функція $\varpi(x, y)$ представляється у вигляді

$\varpi(x, y) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x, y) f_k(x)$	(129)
--	---------

або, зокрема, у вигляді

$\varpi(x, y) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(y) f_k(x).$	(130)
--	---------

Функція $\varphi_k(x, y)$ або $\varphi_k(y)$ приймаються заздалегідь так, щоб вони задовольняли граничним умовам на контурі S за винятком, може бути, прямих $x = a$ і $x = b$.

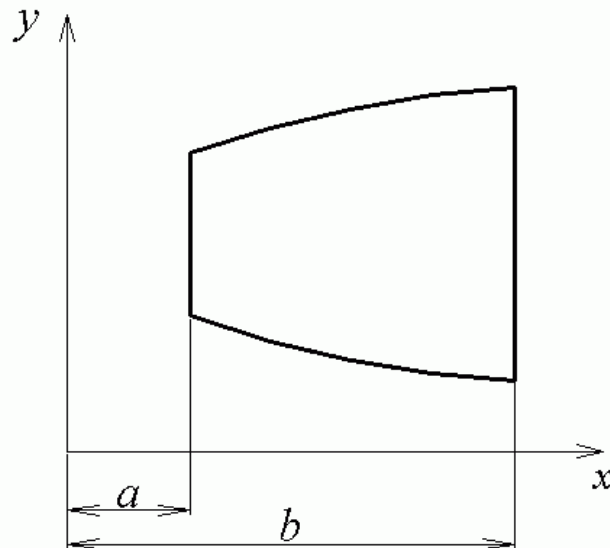


Рис. Двовимірний область

Вносячи вираз (129) у функціонал $\mathfrak{E}[\varpi(x, y)]$ і виконуючи операції інтегрування по y , приходимо до задачі визначення невідомих функцій: $f_k(x)$, $k=1, 2, 3, \dots, N$, з умови стаціонарності вже нового спрощеного функціонала

$\delta \mathfrak{E}'[f_1(x), f_2(x), \dots, x]=0.$	(131)
---	--------

Таким чином, крайова задача щодо функції $\varpi(x, y)$ двох змінних замінюється крайовою задачею щодо невідомих функцій $f_k(x)$ однієї змінної.

Граничні умови для функцій $f_k(x)$ випливають із граничних умов для функції $\varpi(x, y)$ на сторонах контуру $x=a$ й $x=b$.

Вирішуючи це останню одномірну крайову задачу, одержимо значення функцій $f_k(x)$, отже, і наближений вираз для $\varpi(x, y)$.

Приклад 8. Потрібно визначити за допомогою методу Канторовича наближений вираз для прогину жорсткої прямокутної ізотропної пластини, навантаженою поперечним навантаженням інтенсивністю $q(x, y)$. Граничні умови на крайках пластини:

$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0, y=a \quad \varpi = \partial \varpi / \partial x = 0; \\ \text{при } y=0, y=b \quad \varpi = \partial^2 \varpi / \partial y^2 = 0. \end{array} \right\}$	(132)
---	--------

Рішення

Якщо скористатися для рішення принципом можливих переміщень, то завдання зводиться до визначення мінімуму наступного функціонала:

$\mathfrak{Z} = \Pi - U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 \varpi)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy -$ $- \int_0^a \int_0^b q(x, y) \varpi(x, y) dx dy.$	(133)
--	--------

Виберемо прогин пластини у вигляді

$\varpi(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} f_k(x) \sin(k\pi y/b).$	(134)
--	--------

При такому виборі функції прогину тотожно задовольняються всі граничні умови пластини на краяхах $y = const$.

Вносячи вираз (134) у формулу (133) і виконуючи інтегрування по y , одержуємо

$\mathfrak{Z}' = \frac{Db}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \left[f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 f_k(x) \right]^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 [f_k(x) f_k''(x) + (f_k'(x))^2] - \right.$ $\left. - \frac{1}{D} q_k(x) f_k(x) \right\} dx,$	(135)
--	--------

де $q_k(x) = (2/b) \int_0^b q(x, y) \sin(k\pi y/b) dy$.

Задача звелася до визначення невідомих функцій $f_k(x)$ в інтервалі $0 \leq x \leq a$, що забезпечують мінімум функціоналу $\mathfrak{Z}'$.

Граничні умови для функцій $f_k(x)$ можна одержати з розгляду граничних умов для функцій $\varpi(x, y)$ при $x = const$. Одержимо при

$f_k(x) = f_k'(x) = 0.$	(136)
-------------------------	--------

Кожну невідому функцію будемо шукати у вигляді ряду

$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N_{2k}} A_{ki} \varphi_i(x),$	(137)
---	--------

де $\varphi_i(x)$ — система лінійно незалежних функцій, що задовольняють граничним умовам типу (136).

Невідомі параметри A_{ki} можна визначити за допомогою методу Рітца

$\frac{\partial \mathfrak{Z}'[f_1(x), f_2(x), \dots, f_{N_1}(x)]}{\partial A_{ki}} = 0,$ $k = 1, 2, \dots, N_1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_{2k}.$	(138)
--	--------

Вносячи в рівняння (138) вираз для функціонала з формули (136), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих A_{ki} параметрів.

На закінчення глави треба ще раз підкреслити, що всі викладені вище принципи й методи можуть бути використані для рішення геометрично й фізично нелінійних задач теорії пружності, для чого необхідно внести деякі

зміни в математичні формулювання варіаційних принципів. Суть цих змін полягає в наступному:

- замість лінійних компонентів ε_{ij} варто внести нелінійні компоненти деформації;
- рівняння рівноваги по обсягу і рівняння рівноваги на поверхні S_1 замінити відповідними рівняннями нелінійної теорії пружності.