

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИЧНИЙ ВКАЗІВКИ

**для виконання практичних робіт
та самостійної роботи студентів
з курсу "Будівельна механіка"
підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр
за напрямом підготовки "Будівництво"**

Тернопіль

2011 р.

Методичні вказівки для виконання практичних робіт та самостійної роботи студентів з курсу "Будівельна механіка" підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за напрямом підготовки "Будівництво" / уклад. С.І.Федак. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2011.- 24 с.

Укладачі: доц., к.т.н. С.І.Федак

Відповідальний за випуск: доц., к.т.н. С.І.Федак

Рецензенти: доц., к.т.н. В.Б.Гладьо
доц., к.т.н. Ю.І.Пиндус

Методичні вказівки розглянуті і затверджені на засіданні кафедри будівельної механіки Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 30 серпня 2011 р.

Схвалено і рекомендовано до друку на методичною радою механіко-технологічного факультету Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 30 серпня 2011 р.

Зміст

1. Кінематичний аналіз систем	4
2. Побудова ліній впливу	9
3. Визначення зусиль у стержнях плоских ферм	11
4. Розрахунок арок	19

1. Кінематичний аналіз систем

Приклад 1.1. Виконати кінематичний аналіз системи (рис.1.1,а).

Визначаємо ступінь свободи системи по формулі П.Л.Чебишева:

$W = 3D - 2Ш - C_0,$	
----------------------	--

де D – число дисків, $Ш$ – число простих шарнірів, C_0 – кількість стержнів.

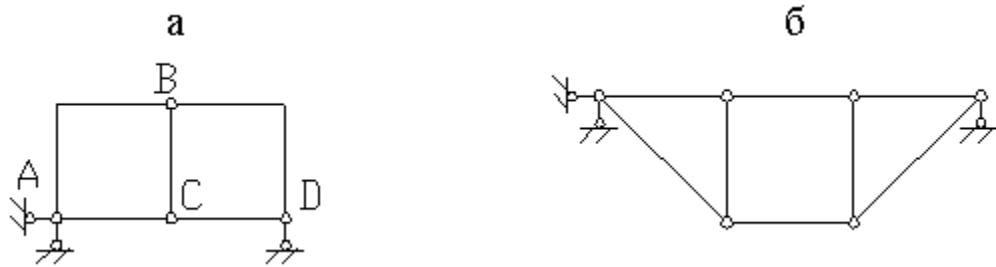


Рис.1.1. До прикладів 1.1 і 1.2

Відкидаючи всі шарніри й опорні стержні, знаходимо, що система складається з п'яти дисків ($D = 5$). Відкидаючи опорні стержні, визначаємо число шарнірів, приведених до простого ($Ш = 6$: по двох у точках B і C , по одному – у точках A і D). Число опорних стержнів – $C_0 = 3$.

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0,$$

тобто система може бути геометрично незмінною й статично невизначеною. Щоб переконатися, що це так, виконаємо аналіз структури системи. Так як диски AB , BC і AC зв'язані трьома шарнірами A , B і C , що не лежать на одній прямій, то вони утворять диск, до якого жорстко приєднаний диск BD за допомогою шарніра B й стержня CD , вісь якого не проходить через центр шарніра. Ця незмінна фігура жорстко приєднана до землі за допомогою трьох стержнів, що не перетинаються в одній точці. Таким чином, система (рис.1.1,а) геометрично незмінна й не є миттєво змінюваною.

Приклад 1.2. Виконати кінематичний аналіз системи (рис.1.1,б).

Так як система є шарнірно-стержневою, то для визначення її ступеня свободи використовуємо формулу

$W = 3U - 2C - C_0$	
---------------------	--

де U – число вузлів ферми; C – число внутрішніх стержнів; C_0 – число опорних стержнів.

Тут $U = 6$, $C = 8$, $C_0 = 3$, отже,

$$W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1$$

Таким чином, система має одну ступінь свободи, є механізмом і не може використовуватися як будівельна конструкція.

Приклад 1.3. Дослідити систему (рис.1.2,а).

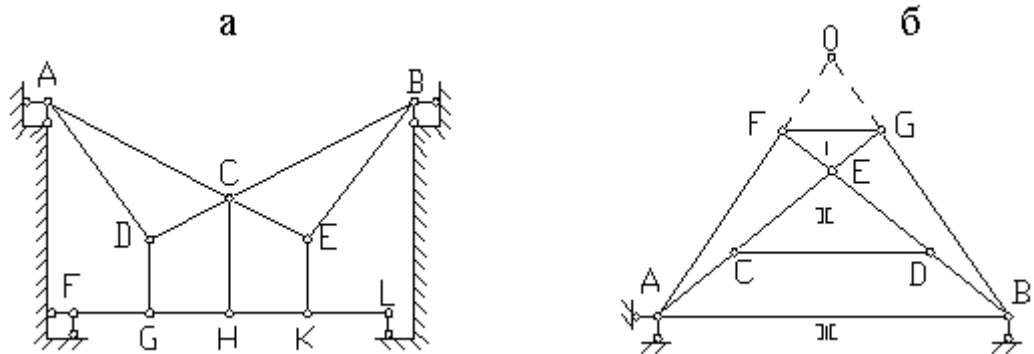


Рис.1.2. До прикладів 1.3 і 1.4

Ступінь свободи системи визначимо по формулі:

$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 14 - 7 = -2,$	
---	--

Отже, система має два зайві зв'язки. Щоб переконатися в її геометричній незмінюваності, проаналізуємо структуру системи. Тут можна виділити два незмінних трикутники ACD й EBC , які жорстко з'єднані один з одним і із землею (розглянутої як диск) за допомогою трьох шарнірів A, B, C , які не лежать на одній прямій. Стержень FN прикріплений до цієї незмінної частини системи за допомогою шарніра F й стержня CH , що не проходить через центр шарніра, так само як і стержень NL за допомогою шарніра N й

опорного стержня L . Стержні DG й EK – зайві, тому що й без них система незмінна.

Приклад 1.4. Виконати кінематичний аналіз системи (рис.1.2,б).

Використовуючи формулу, визначаємо число ступенів свободи системи:

$$W = 3U - 2C - C_0 = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0,$$

отже, система має необхідну кількість зв'язків, щоб бути геометрично незмінною й статично визначеною.

Проаналізуємо структуру. Виділимо незмінні трикутники FGE й CED . Стержень AB становить єдине ціле із землею (третій диск), тому що прикріплюється трьома опорними стержнями, що не перетинаються в одній точці. Щоб перевірити, чи жорстко з'єднані диски I, II, III (рис.1.2,б), переконаємося, що три їхніх миттєвих центри обертання не лежать на одній прямій. Шарнір є миттєвим центром обертання дисків I й II, а також дисків II й III, тому що тут перебуває фіктивний шарнір, що заміняє стержні AC й BD , що з'єднують ці два диски. Отже, система миттєво змінювана, тому що де б не перебував миттєвий центр обертання O дисків I й III, через нього й точку E завжди можна провести пряму, на якій будуть лежати всі три миттєвих центри обертання.

Приклад 1.5. Дослідити ферму (рис.1.3).

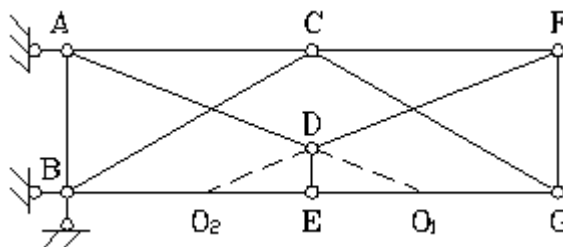


Рис.1.3. До прикладу 1.5

По формулі (1.4) визначаємо ступінь свободи ферми:

$$W = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0,$$

отже, система може бути геометрично змінюваною й статично визначеною.

Проаналізуємо систему. Вона складається із трьох дисків – трикутники ABC , CFG і стержень DE , зв'язаних між собою стержнями BE , AD , EG , DF , які можна замінити фіктивними шарнірами O_1 , O_2 і шарніром C . Отже, можна зробити висновок: всі стержні з'єднані між собою жорстко й прикріплюються до землі так само жорстко за допомогою трьох стержнів, що не перетинаються в одній точці.

Для перевірки системи на миттєву змінюваність застосуємо спосіб нульового навантаження – визначимо опорні реакції й зусилля у всіх стержнях за умови, що зовнішнього навантаження немає. З умов рівноваги всієї системи ($\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum Y = 0$) знаходимо, що опорні реакції дорівнюють нулю. Вирізуємо вузол E і проектуємо всі сили на вертикаль, знаходимо, що зусилля у вертикальному стержні $N_{DE} = 0$. Потім, записуючи рівняння проекцій двох сил, що сходяться у вузлі D (третя сила $-N_{DE} = 0$), на напрямки нормалей до цих стержнів, знаходимо, що зусилля в стержнях DA і DF також дорівнюють нулю. Нарешті, розглядаючи рівновагу вузлів A , F , B , G , знаходимо, що зусилля у всіх стержнях системи при відсутності навантаження дорівнюють нулю, отже, система незмінна.

Приклад 1.6. Виконати кінематичний аналіз системи (рис.1.4,а).

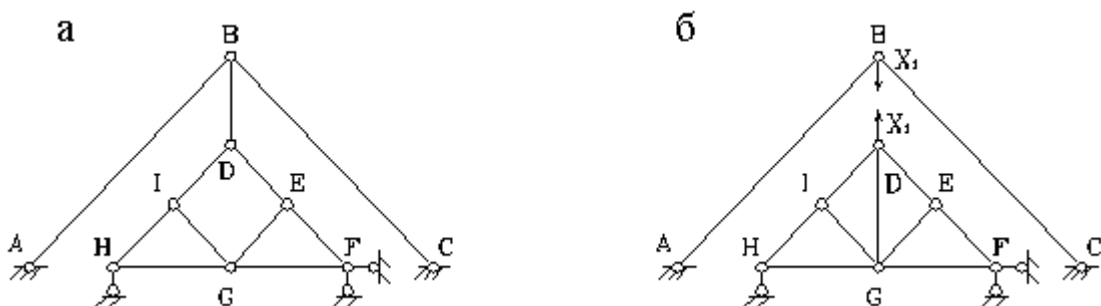


Рис.1.4. До прикладу 1.6

По формулі визначаємо ступінь свободи:

$$W = 2 \cdot 9 - 11 - 7 = 0,$$

тобто система має необхідний мінімум зв'язків, щоб бути геометрично незмінною. Для перевірки того, чи є система дійсно незмінною, використовуємо метод заміни стержнів. Виберемо замінюючу систему

(рис.1.4,б). Тут відкинутий стержень BD , а його дія замінена силами X_1 , і доданий замінюючий стержень DG . Обрана замінююча система незмінна: стержні AB , BC і земля жорстко з'єднані трьома шарнірами, що не лежать на одній прямій. А нижня частина системи незмінна, оскільки складається із трикутника (наприклад, GHI), до якого жорстко прикріплені всі інші вузли за допомогою діад, і все це прикріплено до землі трьома опорними стержнями.

Тепер визначимо зусилля в замінюю чому стержні від сил $X_1=1$. Вирізуючи послідовно вузли E , I , G і розглядаючи їхню рівновагу, одержимо, що зусилля в замінюючому стержні дорівнює нулю, отже, вихідна система - миттєво змінювана.

2. Побудова ліній впливу

Приклад 2.1. Для шарнірної балки (рис.2.1,а), завантаженою рівномірно розподіленим навантаженням, визначити опорну реакцію лівої опори, поперечну силу й згинальний момент у середньому перерізі за допомогою ліній впливу.

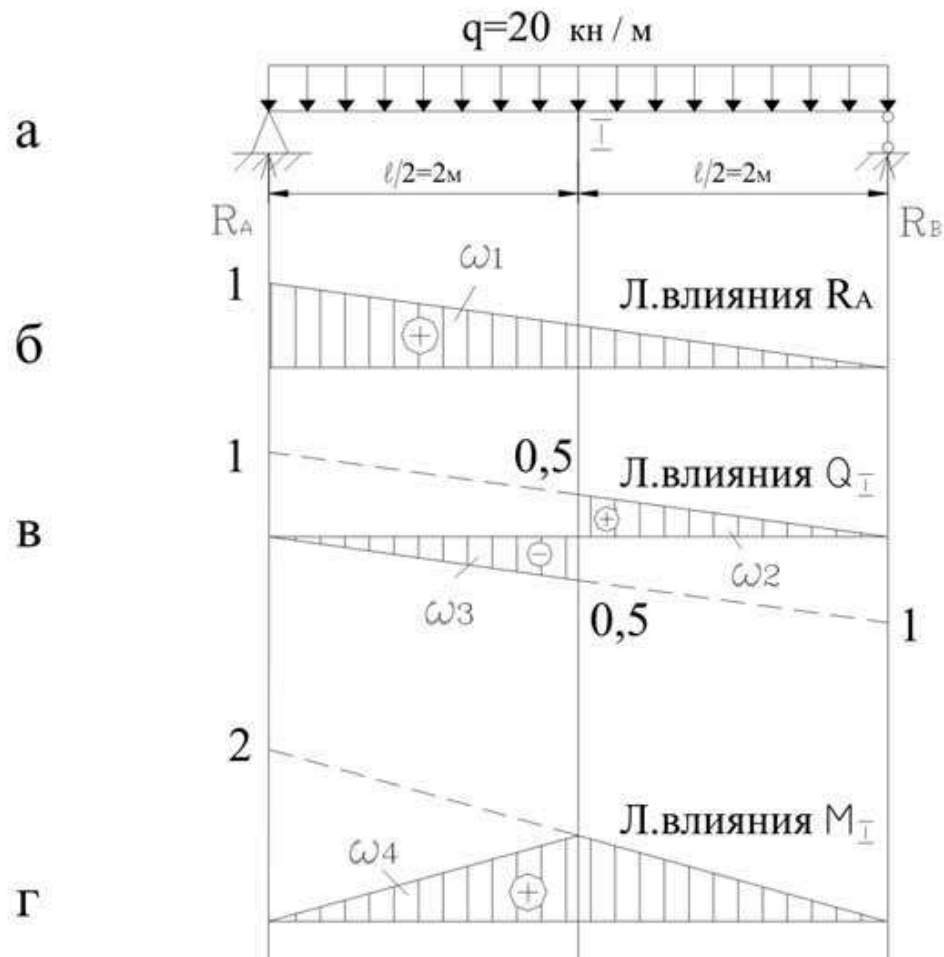


Рис. 2.1. До прикладу 2.1

Розв'язання.

Будуємо лінії впливу R_A (рис.2.1,б), Q_l (рис.2.1,в) і M_l (рис.2.1,г).

$$R_A = q\omega_1 = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 40 \text{ kN};$$

$$Q_l = q(\omega_2 + \omega_3) = 20 \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \right) = 0;$$

$$M_l = q\omega_4 = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 40 \text{ kN} \cdot \text{м}$$

Приклад 2.2. За допомогою ліній впливу визначити опорну реакцію правої опори, поперечну силу й згинальний момент у перерізі I балки (рис.2.2,а).

Розв'язання.

Будуємо лінії впливу R_B , Q_I , M_I (рис.2.2,б,в,г).

$$R_B = q\omega_1 + Fh_1 = 20 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 7 + 70 \cdot \frac{9}{7} = 160 \text{ кН};$$

$$Q_I = q(\omega_2 + \omega_3) + Fh_2 = 20 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3 \right) - 70 \cdot \frac{2}{7} = -10 \text{ кН};$$

$$M_I = q\omega_4 + Fh_3 = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7} \cdot 7 - 70 \cdot \frac{6}{7} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

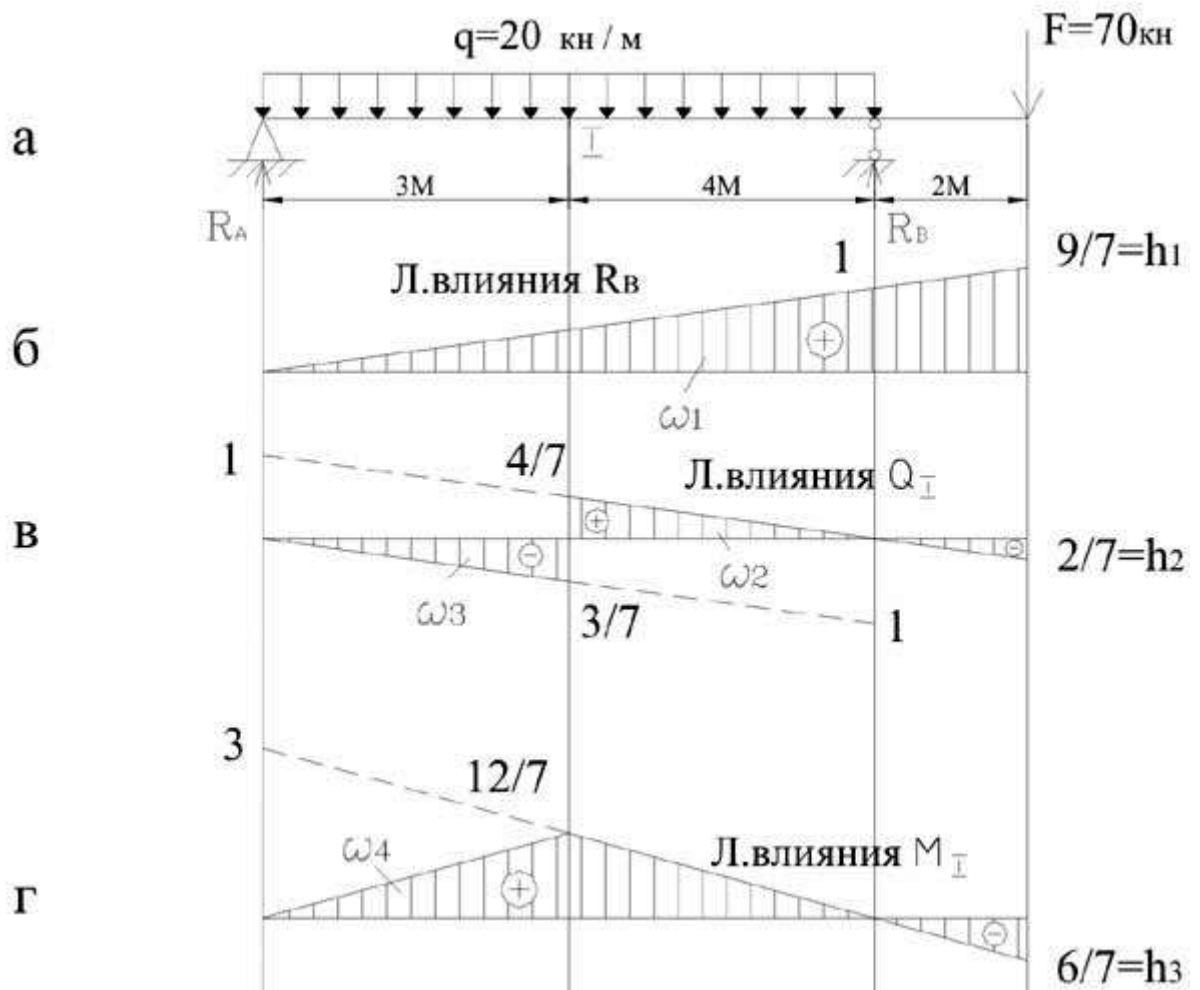


Рис.2.2. До прикладу 2.2

3. Визначення зусиль у стержнях плоских ферм

Приклад 3.1. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис.3.1), використовуючи спосіб вирізання вузлів і спосіб моментної точки ($F = 50kH$; $d = h = 1m$).

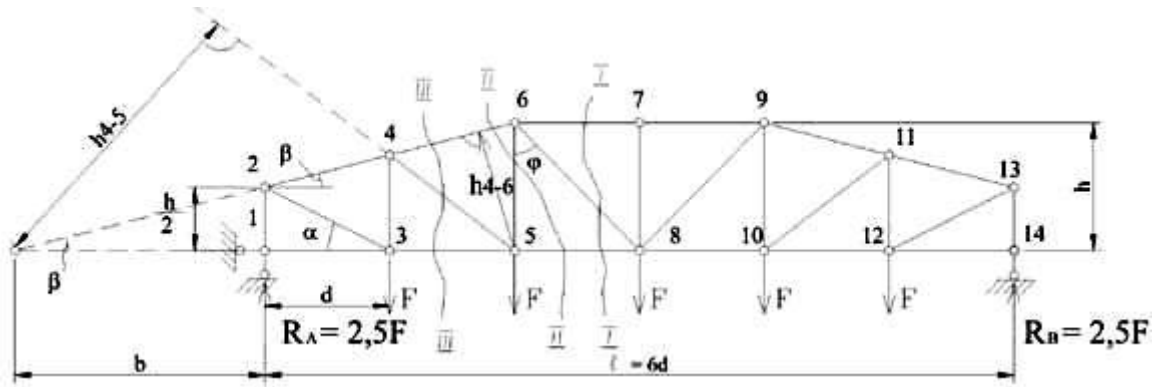


Рис.3.1. До прикладу 3.1

Розв'язання.

Почнемо з визначення опорних реакцій.

Так як навантаження симетричне, то очевидно

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \sum F = \frac{5F}{2} = 125kH.$$

Виріжемо вузол 1 (рис.3.2,а). З рівняння проєкцій на вертикальну вісь знаходимо:

$$\sum Y = 0: \quad V_{12} + R_A = 0 \Rightarrow V_{12} = -R_A = -125kH$$

З рівняння проєкцій на горизонтальну вісь випливає, що $U_{13}=0$, тобто стержень 1-3 є нульовим.

Виріжемо вузол 2 (рис.3.2,б) і проведемо допоміжні осі z_{23} , перпендикулярну стержню 2-3, і z_{24} , перпендикулярну стержню 2-4.

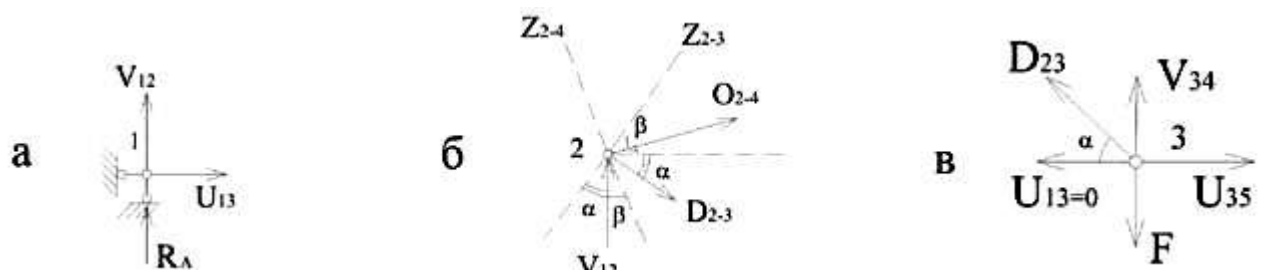


Рис.3.2. Вирізання вузлів (до прикладу 3.1)

$$\sum Z_{23} = 0: V_{12} \cos \alpha + O_{24} \sin(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow O_{24} = -\frac{V_{12} \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{125 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Розв'язуючи строго геометричну задачу, знаходимо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5h}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,56^\circ; \quad \sin \alpha = 0,45; \quad \cos \alpha = 0,89;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5h}{2d} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 14,04^\circ; \quad \sin \beta = 0,24; \quad \cos \beta = 0,97;$$

$$\alpha + \beta = 40,6^\circ; \quad \sin(\alpha + \beta) = 0,65.$$

$$\sum Z_{24} = 0: V_{12} \cos \beta + D_{24} \sin(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow D_{24} = \frac{V_{12} \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{125 \cdot 0,97}{0,65} = 186,54 \text{ kH}.$$

$$O_{24} = -\frac{125 \cdot 0,89}{0,65} = -171,15 \text{ kH}.$$

Тепер виріжемо вузол 3 (рис.3.2,в). Проектуючи всі сили на вісь y , знайдемо зусилля V_{34} :

$$\sum Y = 0: D_{23} \sin \alpha + V_{34} - F = 0 \Rightarrow V_{34} = F - D_{23} \sin \alpha = 50 - 186,54 \cdot 0,45 = 33,94 \text{ kH},$$

а із суми проекцій на вісь x - зусилля U_{35} :

$$\sum X = 0: -D_{23} \cos \alpha + U_{35} = 0 \Rightarrow U_{35} = D_{23} \cos \alpha = 186,54 \cdot 0,89 = 166 \text{ kH}.$$

Послідовно вирізуючи вузли 4, 5, ..., 14, можна визначити зусилля у всіх стержнях ферми. Причому, при вирізанні вузла 13 виявиться, що два рівняння рівноваги будуть містити одне невідоме зусилля V_{13-14} , тому одне з рівнянь можна використовувати для перевірки. А при вирізанні вузла 14 обидва рівняння рівноваги будуть перевірочними.

З наведених вище обчислень випливає, що спосіб вирізання вузлів приводить до нагромадження погрішностей, тому що наступне зусилля обчислюється через попереднє.

Цього недоліку можна уникнути, якщо використовувати для розрахунку спосіб моментної точки. Визначимо цим способом зусилля в стержнях 6-7, 6-8, 5-8, 5-6, 4-6, 4-5, (рис.3.1).

Проведемо переріз I-I і визначимо з рівноваги лівої частини:

$$\sum M_6^{\text{лев}} = 0: R_A \cdot 2d - F \cdot d - U_{5-8} \cdot h = 0;$$

$$U_{5-8} = \frac{4Fd}{h} = 200 \text{ kH}.$$

$$\sum M_8^{\text{леґ}} = 0: R_A \cdot 3d - F \cdot 2d - F \cdot d + O_{6-7} \cdot h = 0;$$

$$O_{6-7} = -\frac{4,5Fd}{h} = -225 \text{ kH}$$

Зусилля D_{6-8} знайдемо способом проекцій:

$$\sum Y^{\text{леґ}} = 0: R_A - F - F - D_{6-8} \cos \varphi = 0$$

($\varphi = 45^\circ$, так як $h = d$);

$$D_{6-8} = \frac{0,5F}{\cos 45^\circ} = 35,36 \text{ kH}$$

Проведемо переріз II – II :

$$\sum M_K^{\text{леґ}} = 0: R_A \cdot b - F \cdot (b + 2d) - F(b + d) + V_{5-6}(b + 2d) = 0.$$

З геометричних міркувань:

$$b + 2d = h \operatorname{ctg} \beta = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}; \quad b = 4 - 2d = 2 \text{ м},$$

$$\text{тоді } V_{5-6} = \frac{2F}{4} = 25 \text{ kH}.$$

$$\sum M_5^{\text{леґ}} = 0: R_A \cdot 2d - F \cdot d + O_{4-6} \cdot h_{4-6} = 0,$$

$$h_{4-6} = (b + 2d) \sin \beta = 4 \cdot 0,24 = 0,96 \text{ м};$$

$$O_{4-6} = -\frac{4F}{0,96} = -208,4 \text{ kH}.$$

Для визначення зусилля D_{4-5} проводимо переріз III – III :

$$\sum M_K^{\text{леґ}} = 0: -R_A + F(b + d) + D_{4-5} h_{4-5} = 0;$$

$h_{4-5} = 2,4 \text{ м}$ (рекомендуємо переконатися в цьому самостійно!) і тоді

$$D_{4-5} = \frac{2F}{h_{4-5}} = 41,67 \text{ kH}.$$

Приклад 3.2. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис.3.3), використовуючи спосіб спільних перерізів ($F = 100\text{ kH}$).

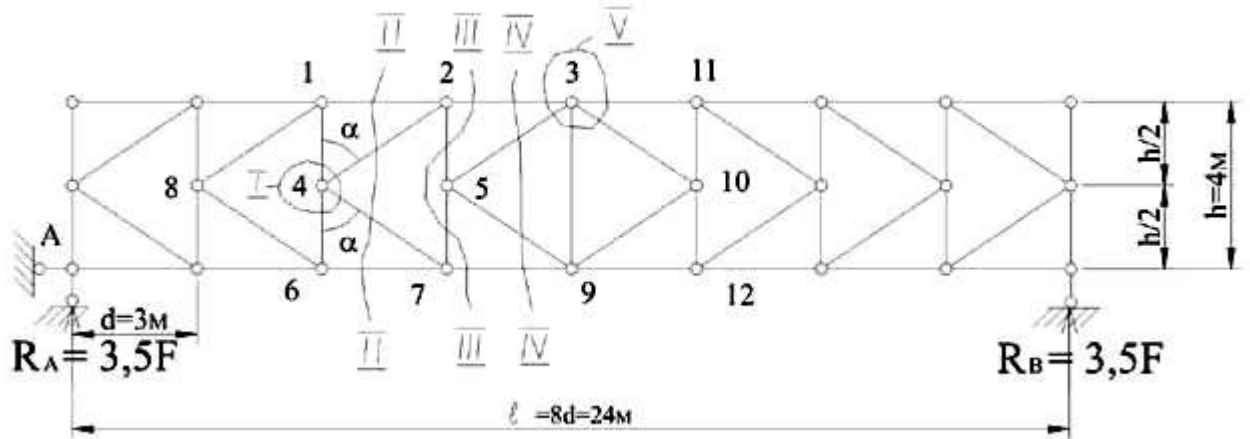


Рис.3.3. До прикладу 3.2

Розв'язання.

Виріжемо вузол 4 круговим перерізом *I* (рис.3.3) і складемо рівняння проєкцій на горизонтальну вісь (рис. 3.4,а):

$$\sum X = 0: D_{4-2} \sin \alpha + D_{4-7} \sin \alpha = 0 \Rightarrow D_{4-2} = -D_{4-7}.$$

Тепер розріжемо ферму перерізом *II* – *II* і, розглядаючи рівновагу лівої частини, складемо суму проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y^{лев} = 0: D_{4-2} \cos \alpha - D_{4-7} \cos \alpha + 3,5F - F - F = 0;$$

$$D_{4-7} = \frac{0,75F}{\cos \alpha} = \frac{0,75 \cdot 100}{0,555} = 135\text{ kH},$$

де $\alpha = 56,3^\circ$, що легко визначити з геометричних міркувань.

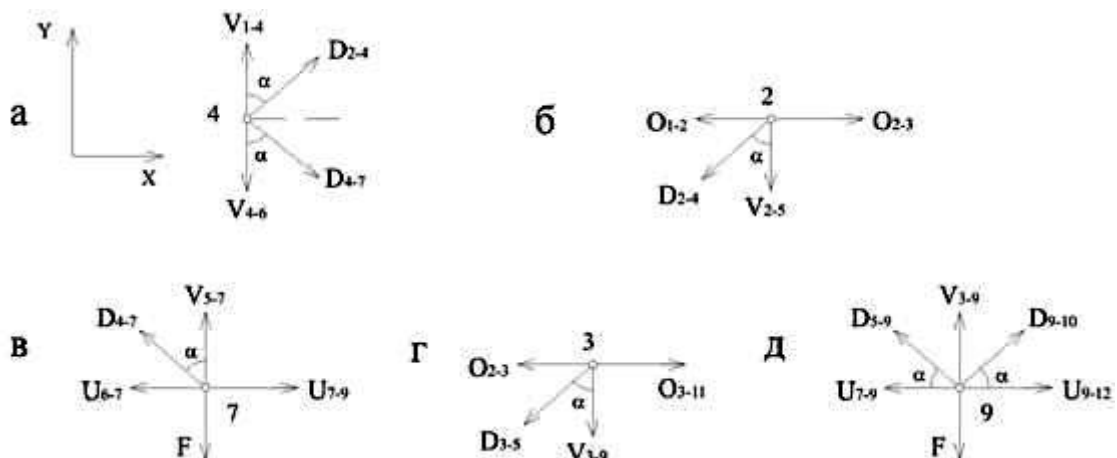


Рис. 3.4. Спосіб моментної точки (до прикладу 3.2)

Вирізуємо вузол 2 (рис.3.4,б) і проектуємо всі сили на вертикальну вісь, визначимо зусилля в стержні 2-5, а вирізуємо вузол 7 (рис.3.4,в) - зусилля в стержні 5-7:

$$\sum Y_2 = 0: -D_{2-4} \cos \alpha - V_{2-5} = 0 \Rightarrow V_{2-5} = 0,75F = 75 \text{ kH};$$

$$\sum Y_1 = 0: D_{4-7} \cos \alpha + V_{5-7} - F = 0 \Rightarrow V_{5-7} = 0,25F = 25 \text{ kH}.$$

Для визначення зусиль у стержнях 2-3 і 7-9 проведемо переріз (рис.3.3) і складемо суми моментів лівих сил:

$$\sum M_7^{\text{лев}} = 0: 3,5F \cdot 3d - F \cdot 2d - Fd + O_{2-3}h = 0 \Rightarrow O_{2-3} = -\frac{7,5Fd}{h} = -1000 \text{ kH},$$

$$\sum M_2^{\text{лев}} = 0: 3,5F \cdot 3d - F \cdot 2d - Fd - U_{7-9}h = 0 \Rightarrow U_{7-9} = \frac{7,5Fd}{h} = 10000 \text{ kH}.$$

Для визначення зусилля в стержні 3-9 виріжемо круговим перерізом вузол 5 (рис.3.13) і з рівняння проєкцій на горизонтальну вісь знайдемо $D_{5-3} = -D_{5-9}$, а потім проведемо переріз $IV-IV$, відкинемо праву частину, а для лівої частини складемо рівняння проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0: D_{5-3} \cos \alpha - D_{5-9} \cos \alpha + 3,5F - 3F = 0,$$

звідки

$$D_{5-3} = -\frac{0,25F}{\cos \alpha} = -45 \text{ kH}; \quad D_{5-9} = 45 \text{ kH}.$$

Виходячи із симетрії ферми й навантаження, зусилля в симетрично розташованих стержнях 3-5 і 3-10, а також 5-9 і 9-10 рівні. Тоді, вирізуємо круговим перерізом V вузол 3, із суми проєкцій на вертикальну вісь (рис. 3.4,г) знайдемо:

$$\sum Y = 0: -D_{3-5} \cos \alpha - D_{3-10} \cos \alpha - V_{3-9} = 0 \Rightarrow V_{3-9} = 0,5F = 50 \text{ kH}.$$

Цей же результат можна одержати, якщо вирізати вузол 9 і скласти рівняння проєкцій всіх сил на вісь Y (рис.3.4,д).

Приклад 3.3. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис.3.5), використовуючи спосіб замкнутих перерізів.

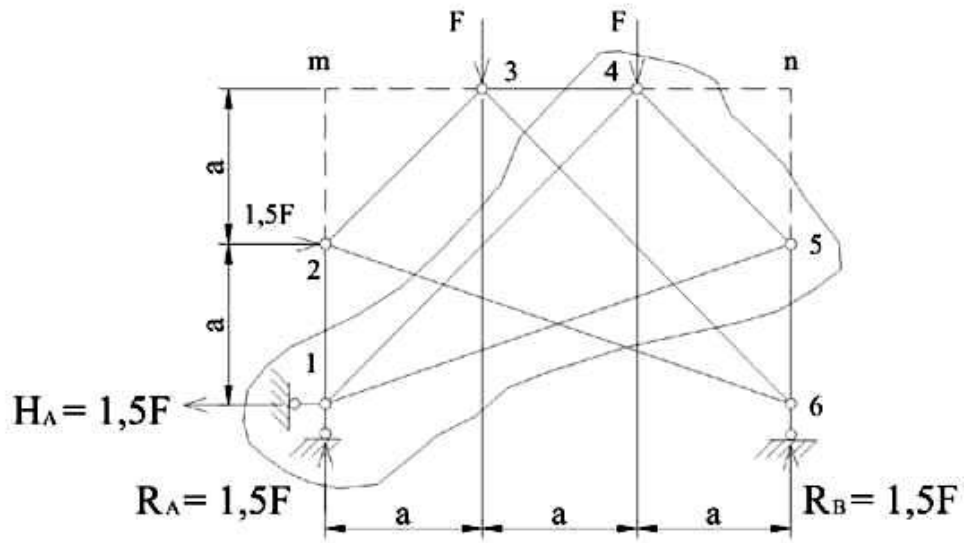


Рис.3.5. До прикладу 3.3

Розв'язання.

Визначивши з умов рівноваги ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M_a = 0$, $\sum M_b = 0$) опорні реакції, проведемо замкнутий переріз, що охоплює вузли 1, 4, 5 (рис.3.5), і розглянемо рівновагу частини ферми, розташованої в середині цього перерізу. При цьому рівняння сум моментів складемо щодо точок m і n , що лежать на перетинанні стержня 3-4 зі стержнями 1-2 і 5-6 відповідно. Зусилля в стержнях 3-6 і 2-6 у рівняння рівноваги не ввійдуть, тому що ці стержні двічі перетинаються замкнутим перерізом і зусилля в них взаємно врівноважуються.

$$\sum M_m = 0: 1,5F \cdot 2a + V_{5-6} \cdot 3a + F \cdot 2a = 0: V_{5-6} = -5F/3;$$

$$\sum M_n = 0: 0,5F \cdot 3a + 1,5F \cdot 2a - F \cdot a + V_{1-2} = 0: V_{1-2} = -7F/6;$$

$$\sum X = 0: -1,5F - O_{3-4} = 0: O_{3-4} = -1,5F.$$

Використовуючи отримані результати, способом вирізання вузлів можна визначити зусилля у всіх інших стержнях ферми.

Приклад 3.4. Визначити зусилля в стержнях ферми (рис.3.6,а) способом заміни стержнів.

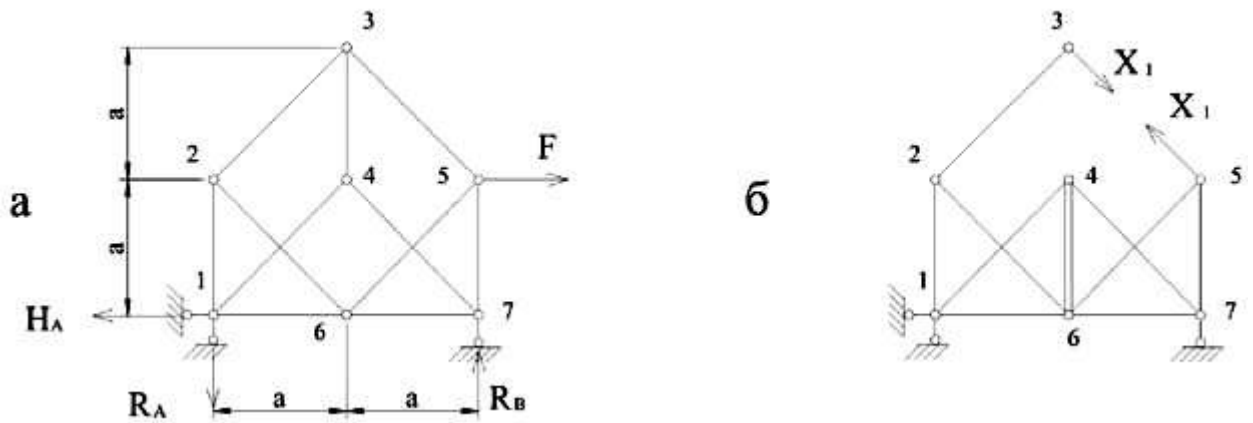


Рис.3.6. До прикладу 3.4

Розв'язання.

Відкинемо стержень 3-5, замінивши його дію силою X_1 , і введемо замінюючий 4-6 (рис. 3.6,а). Зусилля в стержнях ферми, що вийшла таким чином, можна визначити способом вирізання вузлів.

Опорні реакції від зовнішнього навантаження (рис.3.6,б):

$$H_A = F; \quad R_A = 0,5F; \quad R_B = 0,5F.$$

Опорні реакції від $\bar{X}_1$:

$$H'_A = R'_A = R'_B = 0.$$

Результати визначення зусиль у замінюючих стержнях ферми (рис.3.6,б) від зовнішнього навантаження (N_{iF}), і від одиничної сили $\bar{X}_1 = 1(\bar{N}_i)$ й значення зусиль у заданій фермі (N_i) наведені в табл.3.1, причому

$$N_i = N_{iF} + \bar{N}_i X_1.$$

Для визначення X_1 використовуємо рівняння:

$$A_{11}X_1 + A_{1F} = 0,$$

де з таблиці знаходимо (стержень 4-6):

$$A_{1F} = -F; \quad A_{11} = 1,414$$

і тоді

$$X_1 = 0,707F.$$

Таблиця 3.1

Номер стержня	N_{iF}	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i X_1$	N_i	l_i	$N_i l_i$
3 – 2	0	1	0,707F	0,707F	1,414a	a
3 – 4	0	-1,414	-F	-F	a	-a
2 – 1	0	1,414	F	F	a	a
2 – 6	0	-1	-0,707F	-0,707F	1,414a	-a
1 – 4	0,707F	-2	-1,414F	-0,707F	1,414a	-a
1 – 6	0,5F	1,414	F	1,5F	a	1,5a
4 – 7	0,707F	-2	-1,414F	-0,707F	1,414a	-a
4 – 6	-F	1,414	F	0	a	0
5 – 6	1,414F	-1	-0,707F	0,707F	1,414a	a
5 – 7	-F	1,414	F	0	a	0
6 – 7	-0,5F	1,414	F	0,5F	a	0,5a
3 – 5	0	1	0,707F	0,707F	1,414a	a

Для перевірки правильності виконаного розрахунку використовуємо умову:

$$\sum N_i l_i = \sum F_x x + \sum F_y y,$$

де N_i – розрахункова величина зусилля в стержні;

l_i – довжина стержня;

x, y – координати точок прикладення навантаження;

F_x, F_y – проекції навантаження, включаючи опорні реакції, на осі x й y .

Підсумовуючи цифри останнього стовпця табл.3.1, одержимо:

$$\sum N_i l_i = 2aF.$$

Проекції навантаження F і її координати: $F_x = F$, $F_y = 0$, $x = 2a$, $y = a$.

Проекції опорної реакції R_A і її координати: $F_x = -F$, $F_y = -0,5F$, $x = 0$, $y = 0$.

Проекції опорної реакції R_B і її координати: $F_x = 0$, $F_y = 0,5F$, $x = 2a$, $y = 0$.

$$\sum F_x x + \sum F_y y = F \cdot 2a - F \cdot 0 + 0 \cdot 2a + 0 \cdot a - 0,5F \cdot 0 + 0,5F \cdot 0 = 2aF,$$

що підтверджує правильність розрахунку.

4. Розрахунок арок

Приклад 4.1. Визначити рівняння раціональної осі трьохшарнірної арки при дії на неї вертикального рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q (рис.4.1).

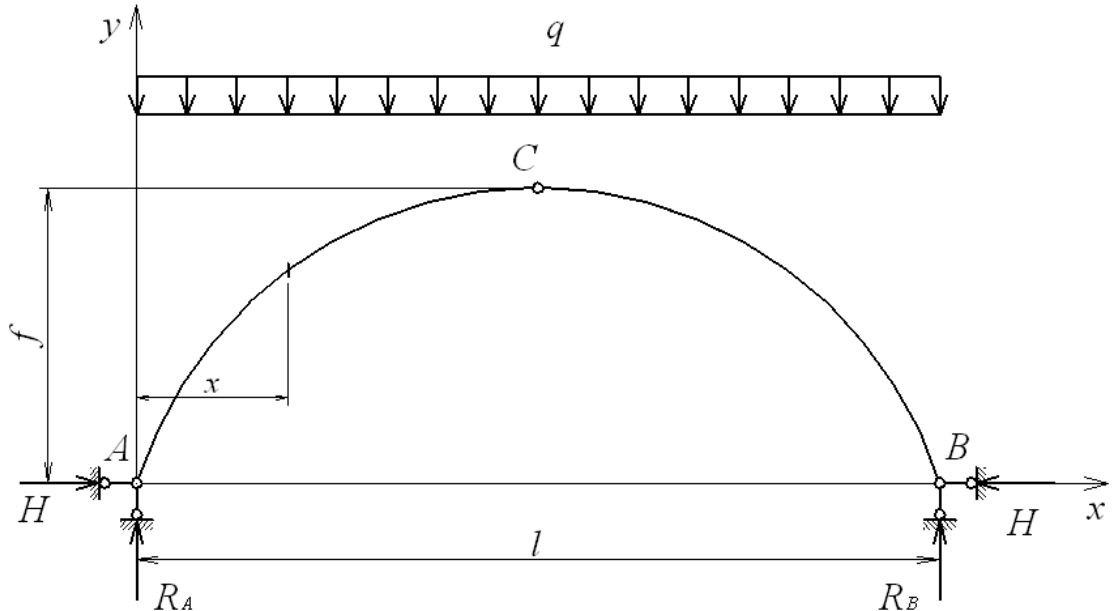


Рис.4.1. До визначення раціональної осі арки
Розв'язання.

Рівняння раціональної осі арки визначаємо з умови:

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y = 0.$$

Балковий згинальний момент:

$$M_x^0 = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Величина розпору H :

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

$$M_x = \frac{qx}{2}(l - x) - \frac{ql^2}{8f} \cdot y = 0,$$

отже, шукане рівняння має вигляд

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Приклад 4.2. Визначити рівняння раціональної осі трьохшарнірної арки при дії на неї гідростатичного тиску (навантаження, розподілене за законом трикутника) (рис.4.2).

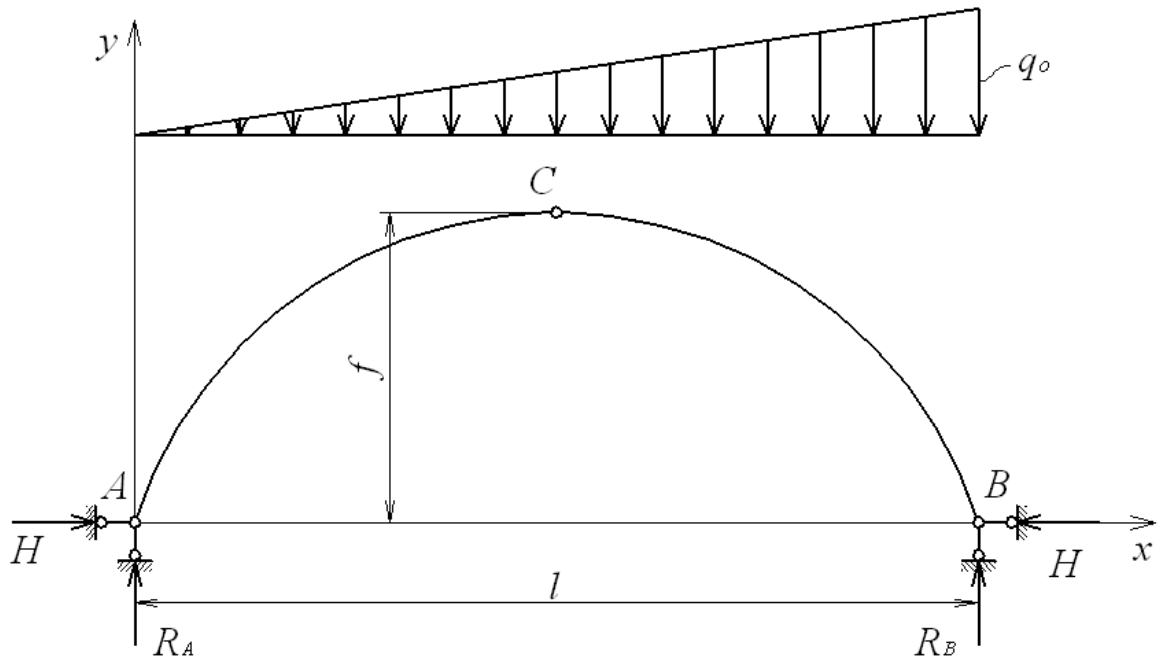


Рис.4.2. Арка під дією гідростатичного тиску

Розв'язання.

Прикладене навантаження змінюється за законом $q_x = q_0 x / l$, тоді опорні реакції R_A і R_B , які визначаються з умов $\sum M_B = 0$ і $\sum M_A = 0$, будуть

$$R_A = q_0 l / 6; \quad R_B = q_0 l / 3.$$

Балковий згинальний момент

$$M_C^0 = \frac{q_0 l}{6} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{6} = \frac{q_0 l^2}{16}.$$

Величина розпору:

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{q_0 l^2}{16 f}.$$

За умовою задачі

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y = 0 \Rightarrow y = M_x^0 / H.$$

$$M_x^0 = \frac{q_0 l}{6} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0 x}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{q_0 x}{6} \left(l - \frac{x^2}{l} \right),$$

$$y = \frac{8 f}{3 l^2} x \left(l - \frac{x^2}{l} \right) \text{ — кубічна парабола.}$$

Приклад 4.3. Побудувати епюри N , Q , M для арки (рис.4.3), вісь якої окреслена по квадратній параболі $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$.

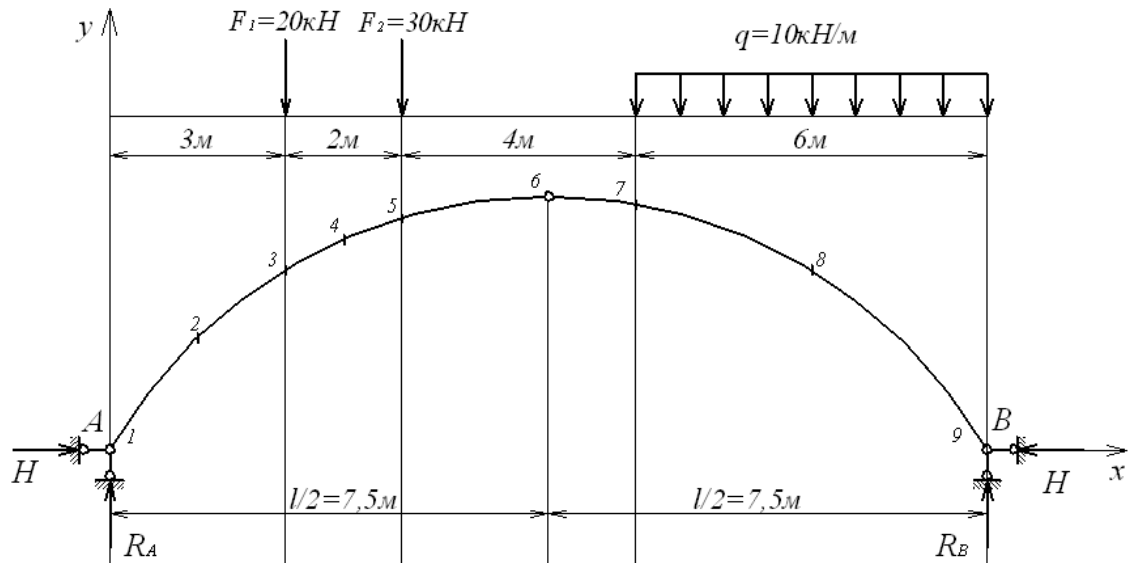


Рис.4.3. Арка, окреслена по квадратній параболі

Розв'язання.

Обчислюємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0: F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 5 + q \cdot 6 \cdot 12 - R_B \cdot 15 = 0; \quad R_B = 62kH;$$

$$\sum M_B = 0: F_1 \cdot 12 + F_2 \cdot 10 + q \cdot 6 \cdot 3 - R_A \cdot 15 = 0; \quad R_A = 48kH;$$

$$\sum M_C^{лев} = 0: F_1 \cdot 4,5 + F_2 \cdot 2,5 - R_A \cdot 7,5 + H \cdot 3 = 0; \quad H = 65kH.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum Y = 0: -F_1 - F_2 - q \cdot 6 + R_A + R_B = 0;$$

$$\sum M_C^{прав} = 0: q \cdot 6 \cdot 4,5 + H \cdot 3 - R_B \cdot 7,5 = 0.$$

Для побудови епюр розбиваємо арку на ділянки й вибираємо характерні перерізи на границях ділянок, а також посередині кожної ділянки (перерізу 1 - 9, рис.4.3).

Ординати y_i перерізів 1 – 9 обчислюємо по заданому рівнянню осі арки, а диференціюючи це рівняння, одержимо $\tan \varphi_i$ — тангенс кута нахилу дотичній до осі арки в точці i , що дозволяє послідовно обчислити значення φ_i , $\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$).

Наприклад,

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{4 \cdot 3}{15^2} \cdot 1,5 \cdot (15 - 1,5) = 1,08 \text{ м і т.д.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x);$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 \cdot 3}{15^2} \cdot (15 - 0) = 0,8; \quad \varphi_1 = 38^\circ 40'; \quad \sin \varphi_1 = 0,625; \quad \cos \varphi_1 = 0,781;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4 \cdot 3}{15^2} \cdot (15 - 2 \cdot 1,5) = 0,64; \quad \varphi_2 = 32^\circ 37'; \quad \sin \varphi_2 = 0,539; \quad \cos \varphi_2 = 0,842.$$

Аналогічні обчислення виконуємо для перерізів, що залишилися, 3 - 9.

Отримані результати зручно представляти в табличній формі (табл.4.1).

Таблиця 4.1

Визначення ординат епюр у табличній формі

№	x, м	y, м	$\operatorname{tg} \varphi$	φ	$\sin \varphi$		$Q^0, \text{кН}$	$M^0, \text{кНм}$	$H_y, \text{кНм}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0,8	$38^\circ 40'$	0,625	0,781	48	0	0
2	1,5	1,08	0,64	$32^\circ 37'$	0,539	0,842	48	72	70,2
3	3	1,92	0,48	$25^\circ 38'$	0,433	0,902	$\frac{48}{28}$	144	124,8
4	4	2,35	0,37	$20^\circ 28'$	0,350	0,937	28	172	152,8
5	5	2,67	0,27	$14^\circ 56'$	0,258	0,966	$\frac{28}{-2}$	200	173,6
6	7,5	3	0	0	0	1	-2	195	195
7	9	2,88	-0,16	$-9^\circ 05'$	-0,158	0,987	-2	192	187,2
8	12	1,92	-0,48	$-25^\circ 38'$	-0,433	0,902	-32	141	124,8
9	15	0	-0,8	$-38^\circ 40'$	-0,625	0,781	-62	0	0

Для визначення балкових зусиль M^0 і Q^0 будемо епюри згинальних моментів і поперечних сил від заданих навантажень, прикладених до шарнірної балки (рис.4.4, а, б, в).

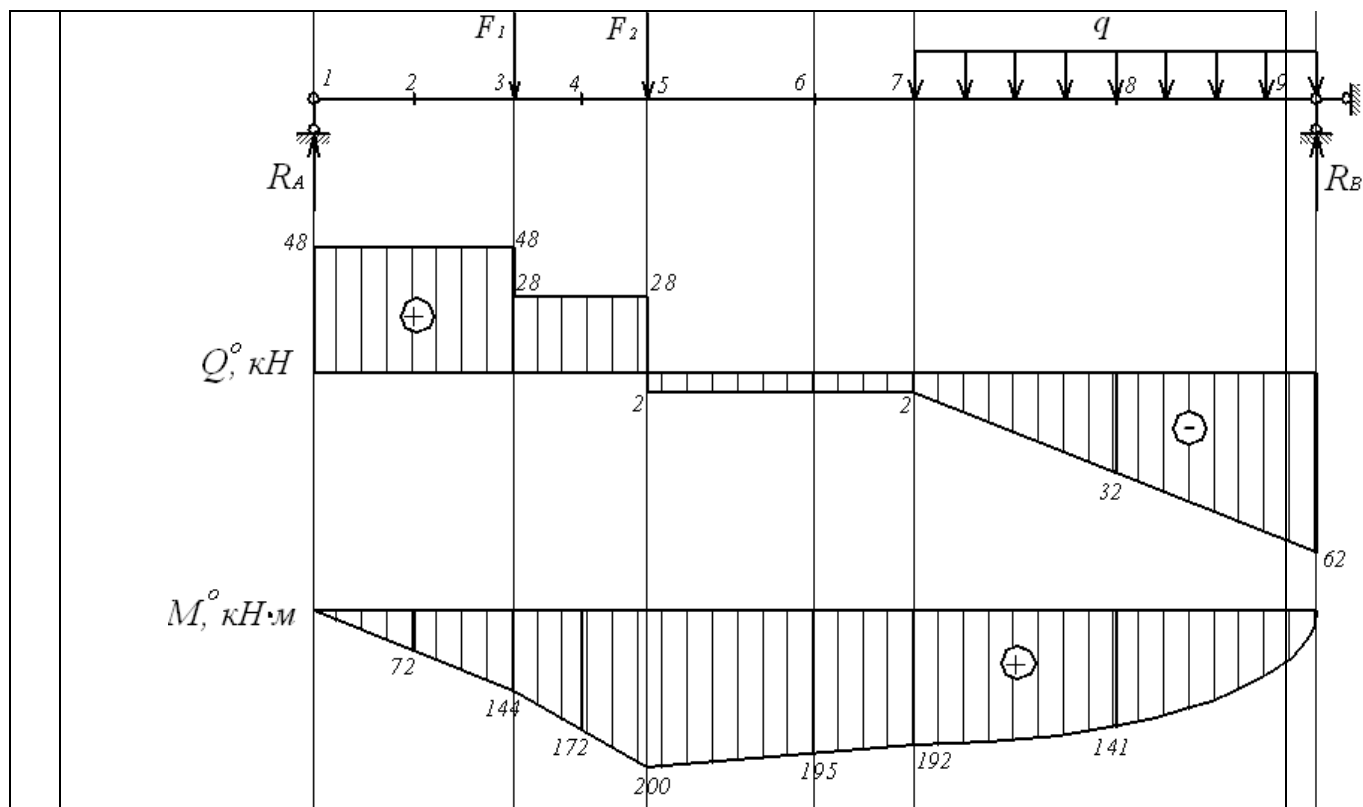


Рис.4.4. Визначення балкових зусиль

Ординати цих епюр, що відповідають перерізам 1 – 9, також вносимо в табл.4.1. Для перерізів 3 і 5, у яких прикладені зосереджені сили, визначаємо два значення Q^0 — ліворуч і праворуч від кожної із сил.

Тепер скористаємося формулами (4.12) – (4.14). Обчислимо спочатку компоненти цих формул, а потім — величини N , Q , M в перерізах 1 – 9. Ця процедура зводиться до арифметичних дій над числами з табл.4.1.

Результати обчислень зведені в табл. 4.2, а отримані епюри представлені на рис.4.5, а, б, в.

Таблиця 4.2

Обчислення значень N , Q , M у характерних перерізах

№	$Q^0 \cos \varphi$	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	M, kHm	Q, kH	N, kH
1	37,5	30	50,8	40,6	0	-3,1	-80,8
2	40,4	25,9	54,7	35	1,8	5,4	-80,6
3	43,3	20,8	58,6	28,1	19,2	15,2	-79,4
	25,3	12,1				-2,8	-70,7
4	26,2	9,8	60,9	22,8	19,2	3,4	-70,7
5	27,0	7,2	62,8	16,8	26,4	10,2	-70
	-1,9	-0,5				-18,7	-62,3
6	-2	0	65	0	0	-2	-65

7	-2	0,3	64,2	-10,3	4,8	8,3	-64,5
8	-28,9	13,9	58,6	-28,1	16,2	-0,8	-72,5
9	-48,4	38,8	50,8	-40,6	0	-1,8	-89,6

Відзначимо, що всі три епюри є криволінійними. Значення моментів в середині кожної ділянки визначаються по формулі

$$f_{cp}^{(M)} = \left(\frac{q}{8} - \frac{f}{l^2} H \right) \cdot a^2,$$

так як при дії на арку зосереджених сил і рівномірно розподілених навантажень згинальний момент на кожній ділянці змінюється за законом квадратної параболи.

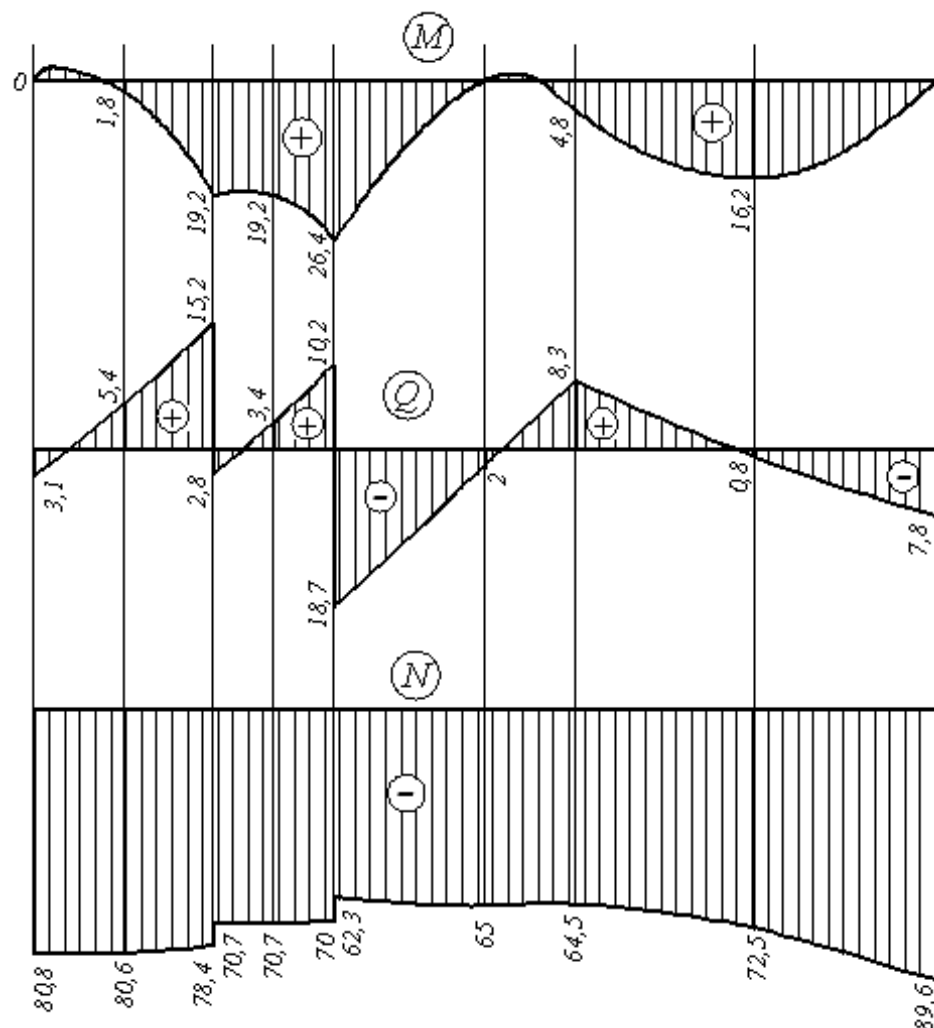


Рис.4.5. Епюри N , Q , M