Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Навчальний посібник

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА І КІНЕМАТИКА

Тернопіль
2024

УДК 531.1
Т33

У к л а д а ч і:
Михайлишин М. С. – кандидат фізико-математичних наук
Крива Н. Р.

Р е ц е н з е н т и:
Рачкевич Р. В. – д.т.н., професор кафедри технічної механіки, інженерної та комп’ютерної графіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу;
Марущак П. О. – д.т.н., професор кафедри автоматизії технологічних процесів і виробництв Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні вченої ради Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від 18.06.2024 р.

Т33 Теоретична механіка. Статика і кінематика : навчальний посібник/укладачі : Михайлишин М.С., Крива Н.Р.–Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2024.– 188 с.

УДК 531.1

В навчальному посібнику викладено два перші розділи теоретичної механіки: статика і кінематика. Матеріали видання відповідають новій програмі навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для вищих технічних навчальних закладів. У матеріалах підручника висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв’язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, розв’язуванні задач, виконанні практичних та розрахунково-графічних робіт. Значне місце відведено розв’язуванню практичних інженерно-технічних задач.

Видання рекомендовано студентам денної, заочної і дистанційної форм навчання вищих навчальних закладів технічного профілю, а також може бути корисним аспірантам, магістрам, інженерно-технічним працівникам.

ЗМІСТ

ВСТУП

Механіка є наукою про найпростіші форми руху матерії – прості переміщення реальних тіл природи в просторі і часі. В механіці ми будемо відволікатися від більшості індивідуальних властивостей фізичних тіл, зберігаючи лише такі, як властивість протяжності і властивість частин матерії притягуватися одна до одної або мати вагу. Ця остання властивість називається гравітаційною. Ми будемо також відволікатися від молекулярної будови речовини і розглядати речовину фізичних тіл, як «суцільне середовище».

Теоретична механіка є частиною загальної механіки, яка вивчає загальні закони механічного руху і взаємодії матеріальних тіл. Під механічним рухом розуміється зміна положення тіл в просторі по відношенню до інших тіл.

Теоретична механіка є фундаментальною загальнонауковою дисципліною фізико-математичного циклу. Встановлені в теоретичній механіці закони є основою для вивчення механіки здатних до деформування тіл: механіка пружних і пластичних тіл (опір матеріалів), теорія пружності, механіка рідин (гідравліка), гідромеханіка, механіка газів (газова динаміка), аеродинаміка. Вона також є науковою основою таких дисциплін, як механіка матеріалів і конструкцій, динаміка машин, теорія машин і механізмів, деталі машин, теорія сільськогосподарських машин.

Теоретична механіка традиційно ділиться на три розділи: *статика, кінематика і динаміка*. Цикл питань, які виясняють властивості системи прикладених до абсолютно твердого тіла сил, не розглядаючи при цьому властивостей визваних чи змінених цією системою сил рухів, складає зміст *статики*. Частина теоретичної механіки, в якій вивчаються геометричні властивості рухів, без врахування сил які їх викликали, називається *кінематикою. Динаміка* представляє собою частину теоретичної механіки, присвячену вивченню руху матеріальних тіл (або взагалі матеріальних систем) в залежності від діючих на них сил.

РОЗДІЛ І
СТАТИКА

ГЛАВА І
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ. ЗБІЖНІ СИЛИ

§ 1. Основні поняття і визначення

Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому розглядаються властивості сил, прикладених до твердого тіла. Зокрема вивчається приведення складних систем сил до більш простого вигляду і встановлюються умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло чи матеріальну точку.

Матеріальна точка перебуває в **рівновазі,** якщо вона перебуває в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху.

Матеріальною точкою називають тіло будь-якої форми, розмірами якого можна знехтувати при розв'язуванні окремих задач механіки. Таке тіло можна прийняти за геометричну точку, яка має визначену масу.

Механічна система (*система матеріальних точок*) – це така сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємно зв'язані.

Незмінюваною системою матеріальних точок називають таку систему, в якій взаємне розміщення точок, що належать їй, залишаються незмінними.

Абсолютно твердим тілом називають таку незмінювану механічну систему, точки якої неперервним чином заповнюють деяку частину простору. Надалі абсолютно тверде тіло будемо називати просто тверде тіло.

Тверде тіло, чи матеріальну точку називають **вільними**, якщо вони мають можливість здійснювати в даний момент часу будь-які переміщення в просторі.

Основним первинним поняттям в теоретичній механіці є поняття сили.

Сила – міра механічної взаємодії матеріальних тіл. Це векторна величина, яка характеризується точкою прикладання, напрямком дії і величиною. Лінія, вздовж якої направлена сила, називається лінією дії сили. На рис. 1.1 показана прикладена в точці *A* сила $\vec{F}$. LM – лінія дії цієї сили. Одиницею вимірювання сили у системі СІ є похідна одиниця, чисельно рівна силі, яка масі 1 *кг* надає прискорення 1 $^{\text{м}}/_{\text{сек}^2}$. Така сила називається *ньютоном* (1 Н).

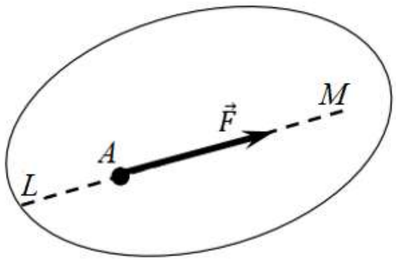


Рис. 1.1

Системою сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$ називають сукупність сил, що діють на яку-небудь матеріальну систему, в частковому випадку на абсолютно тверде тіло. Можна розглядати також систему сил, прикладених до однієї матеріальної точки.

Дві системи сил називаються **еквівалентними**, якщо їх дія окремо на одне і те ж тверде тіло чи матеріальну точку однакова при інших рівних умовах, тобто якщо одна система сил приводить тіло чи точку в якийсь рух з деякого початкового стану, то друга система сил, яка еквівалентна першій, надає такий же рух при такому ж початковому стані. Рухи, які викликані дією еквівалентних сил, мають однакові характеристики для кожного моменту часу.

Умова еквівалентності двох систем сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$ і $(\vec{Q}_1, Q_2, \cdots, \vec{Q}_n)$ записується так

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n) \sim (\vec{Q}_1, Q_2, \cdots, \vec{Q}_n).$$

Часто використовується таке означення: *дві системи сил називаються статично* ***еквівалентними****, якщо кожна з них окремо зрівноважує одну і ту ж третю систему сил*.

Зрівноваженою (*або еквівалентною нулю*) називається така система сил, котра діючи на тверде тіло, яке знаходиться в спокої, не надає йому ніякого руху. Інакше кажуть, що така система знаходиться в рівновазі.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Рівнодійною $\vec{R}^*$ називається сила, яка еквівалентна заданій системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$. Позначається це так

$$\vec{R}^* \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n).$$

Врівноважуючою силою заданої системи сил вважається така сила, добавлення якої до заданої дає нову систему сил, еквівалентну нулю. Якщо $\vec{R}^{*\prime}$ є врівноважуючою силою системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$ то, згідно з визначенням, вона задовольняє умові

$$(\vec{R}^{*\prime}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Виявляється, що не кожна система сил має рівнодійну і врівноважуючу сили. Є системи сил, які не еквівалентні одній силі. Про це ми дізнаємось дальше.

§ 2. Аксіоми статики

Статика базується на аксіомах, з яких отримують всі необхідні наслідки у вигідній для використання формі. Аксіоми механіки встановлюються в результаті узагальнення багатьох спостережень і дослідів над рухом матеріальних тіл. Аксіоми приймаються без доведення.

Аксіома 1 (*про дві сили*).

Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно врівноважуються (еквівалентні нулю) тільки тоді, коли вони рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис.1.2), тобто

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

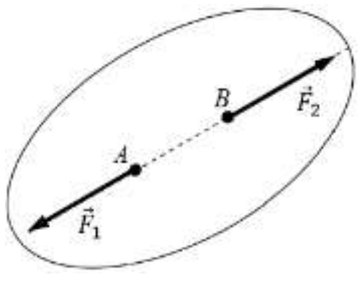


Рис. 1.2

Аксіома 2 (*про приєднання (відкидання) зрівноваженої системи сил*).

Якщо на тверде тіло діє система сил, то до неї можна добавити (відкинути) еквівалентну нулю систему сил. Отримана після цього нова система сил є еквівалентною початковій системі сил.

Отже, якщо дві системи відрізняються на зрівноважену систему сил, то такі системи сил еквівалентні.

Наслідок із аксіом 1 і 2.

Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо силу перенести вздовж її лінії дії в будь-яку іншу точку тіла.

Доведення. Нехай на тіло в точці A діє сила $\vec{F}$ (рис. 1.3). Вияснимо, чи зміниться дія сили на тіло, якщо силу перенести в іншу точку B тіла по лінії AB? Прикладемо в точці B тіла, котра знаходиться на лінії дії сили $\vec{F}$, зрівноважені систему сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, причому $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$. За другою аксіомою це можна зробити.

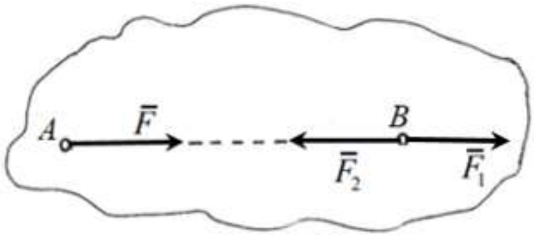


Рис. 1.3

Отримали еквівалентну силі $\vec{F}$ систему з трьох сил (рис. 1.3). Розглянемо сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$. Це зрівноважені сили і за другою аксіомою їх можна відкинути. В результаті залишилась сила $\vec{F}_1$, яка прикладена в точці B і яка дорівнює силі $\vec{F}$. Звідси випливає, що *сила є ковзний вектор*. Наголосимо, що силу можна переносити вздовж її лінії дії в іншу точку тільки в межах цього тіла. Крім цього зауважимо, що якщо сила прикладена до здатного до деформування тіла, то її не можна переносити в іншу точку тіла.

Аксіома 3 (*про паралелограм сил*).

Якщо на матеріальну точку діють дві сили, то їхню дію можна замінити дією однієї сили – їх рівнодійною. Рівнодійна системи двох сил по числовій величині і напрямку визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на відрізках прямих, якими зображуються сили, прикладені до матеріальної точки.

Інакше кажучи систему двох прикладених в одній точці сил можна замінити одною силою, яка називається рівнодійною і яка дорівнює векторній сумі цих сил та прикладена в тій же точці (рис. 1.4, a).

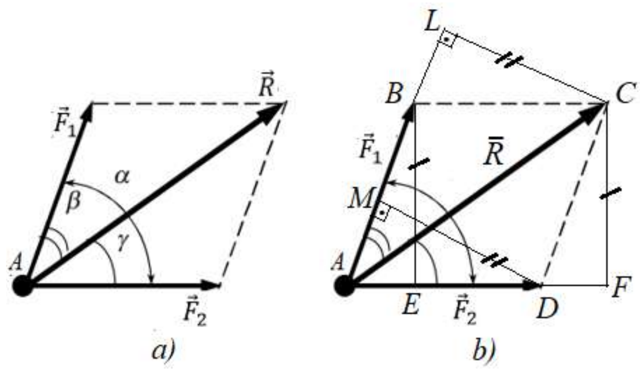


Рис. 1.4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{1.1}$$

Модуль рівнодійної знаходять як величину діагоналі паралелограма, побудованого на силах, як на сторонах:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2cos\alpha}. \tag{1.2}$$

У випадку, коли сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ направлені вздовж однієї лінії, то векторне складання переходить в алгебраїчне.

Нехай рівнодійна сила утворює з силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ кути β і γ (рис. 1.4, а) З рисунка 1.4, b маємо $BE = CF$, або $F_1 sin\alpha = Rsin\gamma$. Аналогічно $MD = LC$, або $F_2 sin\alpha = Rsin\beta$.

Звідки

$$sin\beta = \frac{F_2}{R} sin\alpha; \quad sin\gamma = \frac{F_1}{R} sin\alpha; \quad (\alpha = \beta + \gamma). \tag{1.3}$$

Очевидно, що справедливе і обернене твердження. Будь-яку силу $\vec{R}$, взявши її як рівнодійну, можна розкласти на дві складові сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили (рис. 1.4 a). Величини цих складових визначаються за формулами:

$$F_1 = \frac{Rsin\gamma}{sin(\beta + \gamma)}; \; F_2 = \frac{Rsin\beta}{sin(\beta + \gamma)},$$

які витікають із формул (1.3).

Аксіома 4 (*про сили взаємодії двох матеріальних точок*).

Ця аксіома є одним із основних законів класичної механіки, яку сформулював Ньютон: всякій дії відповідає рівна їй за величиною і протилежно направлена протидія. Інакше кажучи дії тіл одне на друге завжди рівні і направлені по одній прямій в протилежні сторони (рис. 1.5).

В механіці цю аксіому називають третім законом Ньютона, який широко застосовується в динаміці. Зауважимо, що сили взаємодії двох тіл не створюють зрівноважену систему сил, так як вони прикладені до різних тіл.

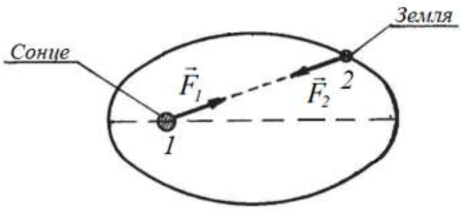


Рис. 1.5

Аксіома 5 (*про звільнення від в'язей*).

Якщо на рух точок системи не накладені наперед задані геометричні чи кінематичні обмеження, то система називається **вільною**. В протилежному випадку система називається *невільною*. Інакше кажучи **вільна** матеріальна система (тверде тіло) може в просторі займати довільне положення і її рух не обмежують ніякі інші тіла. Якщо тіло може рухатись лише в певних напрямах, або взагалі не може рухатись, то воно **невільне.**

При розв'язуванні задач статики майже завжди зустрічаються невільні тверді тіла.

Тіла, які перешкоджають вільному переміщенню даного тіла, називають **в'язями**, а *сили, з якими ці тіла діють на дане тіло* – **реакціями в'язей**. Всі сили, що діють на дане тіло, розділяють на **активні** сили і **реакції в'язей**. До активних сил відносяться сили тяжіння, сили пружності і т. п. і, як правило, ці сили відомі. Реакції в'язей виникають тільки тоді, коли дане тіло під дією активних сил тисне на ці в'язі. Як тільки дане тіло перестає тиснути на в'язі, то зникають реакції в'язей. Тому реакції в'язей називають пасивними силами. Величина реакції в'язей і напрям дії наперед невідомі. Оскільки в статиці розглядають **вільні** тіла, задачі на рівновагу невільних тіл розв'язуються на основі *аксіоми про звільнення від в'язей.*

Аксіома про в'язі стверджує, що *всяку в'язь можна відкинути і замінити її дію на тіло реакцією в'язі – силою в найпростішому випадку, або системою сил – в загальному випадку.*

Аксіома 6 (*принцип затвердіння*).

Якщо здатне до деформування тіло знаходиться в рівновазі, то рівновага його без зміни системи прикладених сил не порушиться від накладання на точки тіла додаткових в'язей, включаючи перетворення деформованого тіла в абсолютно тверде.

Згідно з цією аксіомою методи статики абсолютно твердого тіла можна застосовувати для тіл, які деформуються, вважаючи їх абсолютно твердими.

§ 3. В'язі та їх реакції

Майже всі теореми і остаточні результати теоретичної механіки формулюються для матеріальної точки, чи твердого тіла, звільнених від в'язей, тобто коли в'язі замінені на реакції в'язей. При цьому дуже важливо вміти правильно заміняти відкинуті в'язі силами реакцій в'язей. Це одна з головних задач статики, якій потрібно приділити найбільшу увагу.

Розглянемо види в'язей, що найчастіше трапляються при розв'язанні задач, і покажемо, як визначати напрям реакцій цих в'язей. Щодо величин цих реакцій, то їх можна знайти з умов рівноваги, оскільки вони залежать від активних сил.

1. Гладка поверхня

Якщо в'яззю для твердого тіла є абсолютно *гладка поверхня* другого тіла, то сила реакції такої поверхні, якщо дотик здійснюється в одній точці, направлена перпендикулярно до спільної дотичної в точці контакту незалежно від прикладених до розглядуваного тіла сил (рис. 1.6, *а*). Якщо гладке тіло дотикається з деякою точкою в'язі (як, наприклад, в точці *A* на рис.1.6, *б*) або дотикається своєю точкою з гладкою поверхнею в'язі (як в точках *B* і *C* на рис. 1.6, *б*), то реакція направлена по нормалі до відповідної гладкої поверхні.

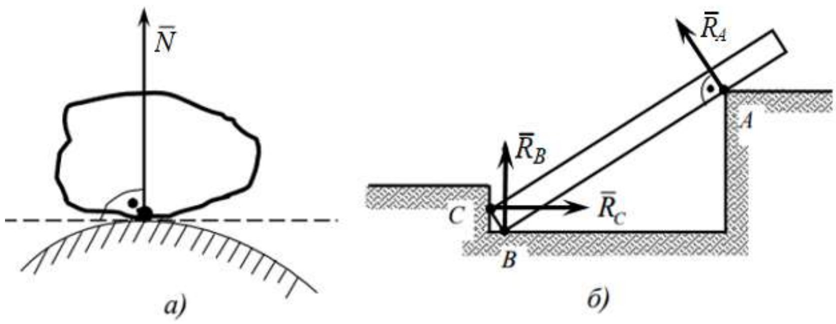


Рис. 1.6

2. Шорстка поверхня

В'язь у вигляді шорсткої поверхні обмежує переміщення тіла як у напрямку нормалі до поверхі обпирання, так і в дотичному напрямку за рахунок тертя. Реакція $\vec{R}$ шорсткої поверхні (рис. 1.7) має на дві складові: нормальну $\vec{R}_n$ та дотичну $\vec{R}_\tau$, які напрямлені відповідно по нормалі $\vec{n}$ і по дотичній $\vec{\tau}$ до поверхні, причому дотична складова завжди направлена в протилежному напрямку до напрямку можливого переміщення тіла.

Дотична складова реакції $\vec{R}_\tau$ називається *силою тертя*. Властивості цієї сили розглянемо пізніше.

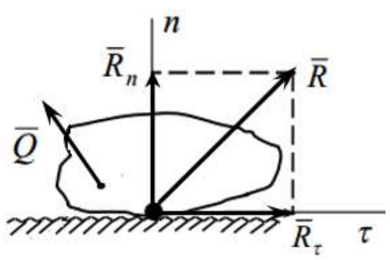


Рис. 1.7

3. Гнучкі в'язі

Дуже часто в'язі здійснюється за допомогою нерозтяжної гнучкої нитки (трос, канат, ланцюг) (рис. 1.8). Така в'язь не може тиснути на тіло, рівновага якого вивчається. Реакції $\vec{T}_A$ і $\vec{T}_B$ таких в'язей направлені вздовж в'язі від тіла, рівновагу якого розглядаємо.

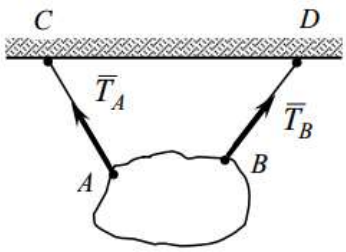


Рис. 1.8

4. Циліндричний шарнір

Циліндричним шарніром називають пристрій, який дозволяє тілу повертатися в площині навколо перпендикулярної до цієї площини осі (рис.1.9, *а*). Виконується такий пристрій за допомогою зв'язаного з нерухомою опорою циліндричного болта (вісь), на який надіта циліндрична втулка, жорстко з'єднана з тілом *М*, рівновагу якого розглядають. Тіло *М* може вільно повертатися навколо нерухомого болта (осі) і рухатися вздовж цієї осі. На рисунках 1.9, *б, в, г* показано, як схематично зображають нерухомий циліндричний шарнір.

Циліндричний шарніра часто використовують для з'єднання окремих тіл складеної конструкції, наприклад для з'єднання двох частин трьох шарнірної арки (рис. 1.9, *д*).

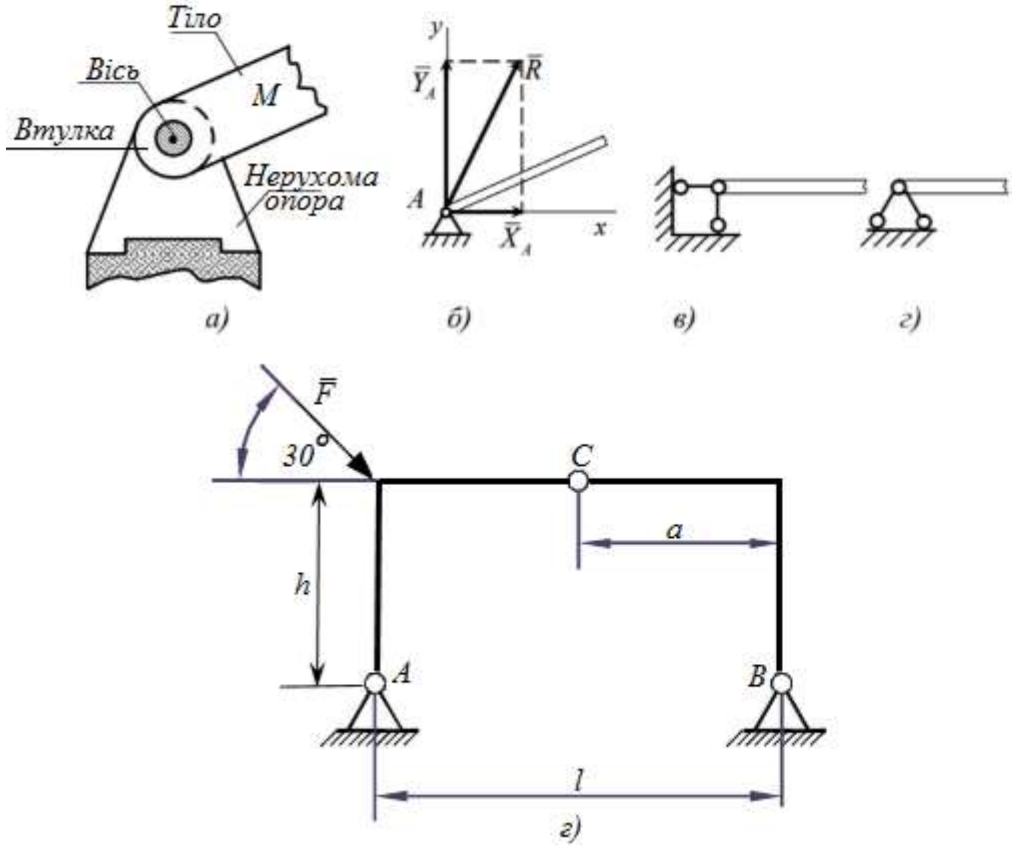


Рис. 1.9

На рисунку 1.10 показані в'язі, які теж є циліндричними шарнірами: підшипник A та завіса B. І циліндричний шарнір A і завіса B дозволяють тілу обертатися навколо нерухомої осі AB та вільно ковзати вздовж неї. Ці в'язі обмежують переміщення тіла в будь-якому перпендикулярному до осі шарніра напрямку. Реакція циліндричного шарніра ($\vec{R}$ на рис. 1.9, *б*, $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$ на рис. 1.10) лежить в площині, перпендикулярній осі шарніра, і її напрямок наперед не відомий. Тому реакцію циліндричного шарніра заміняють двома взаємно перпендикулярними складовими ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ на рис. 1.9, *б*, та $\vec{X}_A, \vec{Z}_A$ і $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$ на рис. 1.10).

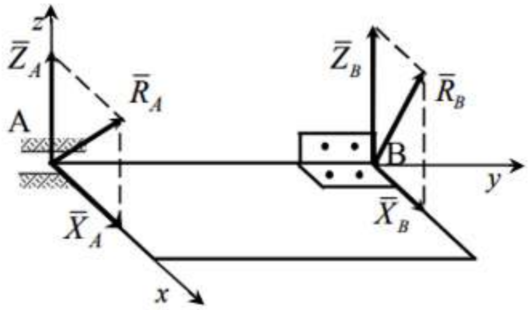


Рис. 1.10

5. ***Рухомий циліндричний шарнір*** (опора на котках)

Рухомий циліндричний шарнір не дозволяє тілу переміщатися вздовж нормалі до опорної поверхні (рис. 1.11, а). Реакція такої опори направлена перпендикулярно до опорної поверхні і проходить через центр шарніра, тобто така опора еквівалентна абсолютно гладкому обпиранню.

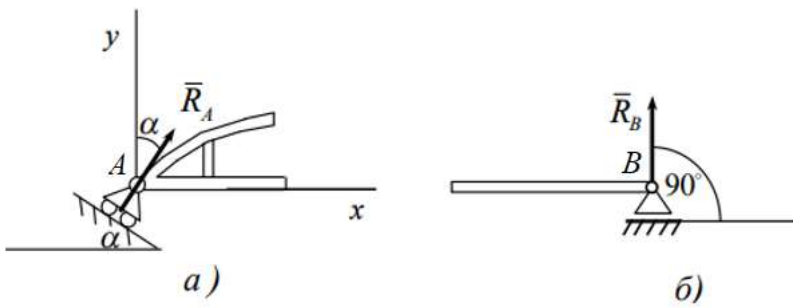


Рис. 1.11

Часто рухомий циліндричний шарнір зображають без котків між опорою та опорною поверхнею, так як показано на рис. 1.11, *б*.

6. ***Ідеальний стрижень***

Часто в'язь здійснюється за допомогою тонкого невагомого стрижня, який кріпиться до нерухомого тіла і до тіла, яке розглядається, ідеальними шарнірами. Ідеальний шарнір – це шарнір, в якому не виникає тертя. Ідеальний стрижень передає зусилля, яке направлене вздовж прямої, котра з'єднує обидва кінцеві шарніри. Це пов'язано з тим, що якщо розглядати окремо рівновагу такого стрижня, то він знаходиться в рівновазі під дією двох сил, прикладених в шарнірах. Такий стрижень може бути в рівновазі лише тоді, коли ці сили рівні за величиною і направлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках. Тому реакція $\vec{S}$ ідеального стрижня (рис. 1.12) направлена завжди вздовж осі стрижня в той чи інший бік. Якщо стрижень не є прямолінійним, то його реакція направлена вздовж лінії, що проходить через точки шарнірного закріплення стрижня (рис. 1.12, *б*).

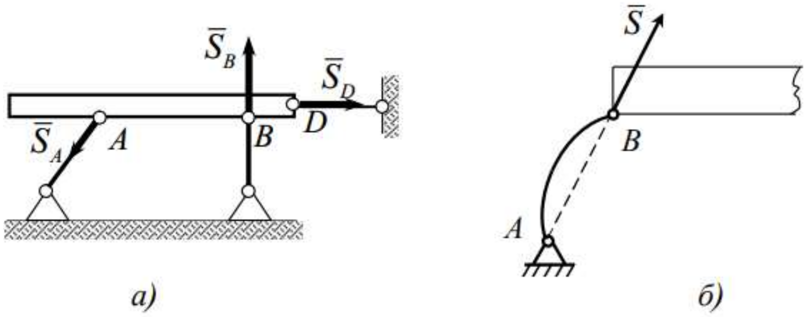


Рис.1.12

Напрямок реакції стрижня залежить від виду навантаження тіла і якщо зусилля в стрижні розтягуюче, то реакція стрижня спрямована від тіла, рівновага якого розглядається. При розв'язуванні задач реакції ідеальних стрижнів, як правило, направляють від тіла, рівновага якого розглядається, тобто припускається, що стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розв'язування задачі виявиться, що деякі зусилля від'ємні, то це служить ознакою того, що такі стрижні стиснуті.

7. Сферичний шарнір і підп'ятник

Такі в'язі показані на рисунку 1.13. Сферичний шарнір (рис. 1.13, *а*) дозволяє тілу обертатися навколо точки A центра закріплення шарніра, але обмежує його переміщення в будь-якому напрямку в просторі. Напрям реакції сферичного шарніра наперед не відомий, тому її розкладають за напрямками трьох взаємно перпендикулярних осей. Реакція підп'ятника також розкладається на три взаємно перпендикулярні складові (рис. 1.13, *б*):

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A; \;\; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}. \qquad (1.4)$$

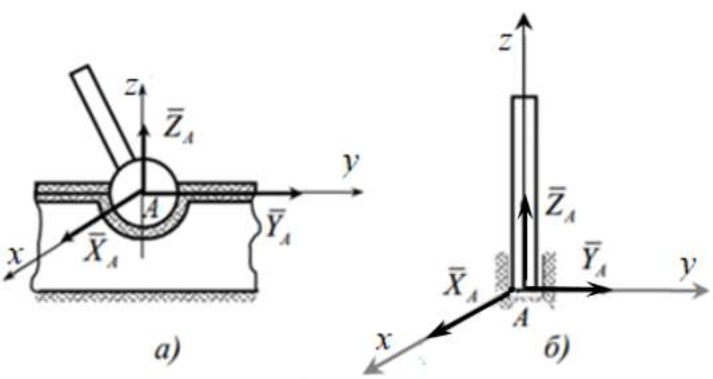


Рис. 1.13

8. Жорстке защемлення

На практиці така в'язь здійснюється шляхом замуровування тіла в деяку нерухому поверхню (рис. 1.14,*а*). Вона перешкоджає поступальному лінійному переміщенню за будь-яким напрямком в просторі і повороту тіла відносно будь-якої осі у загальному випадку.

Реакція жорсткого защемлення складається з реактивної сили $\vec{R}_A$ та реактивного моменту $\vec{M}_A$, величина і напрямок яких наперед невідомі і залежать від прикладених до тіла сил.

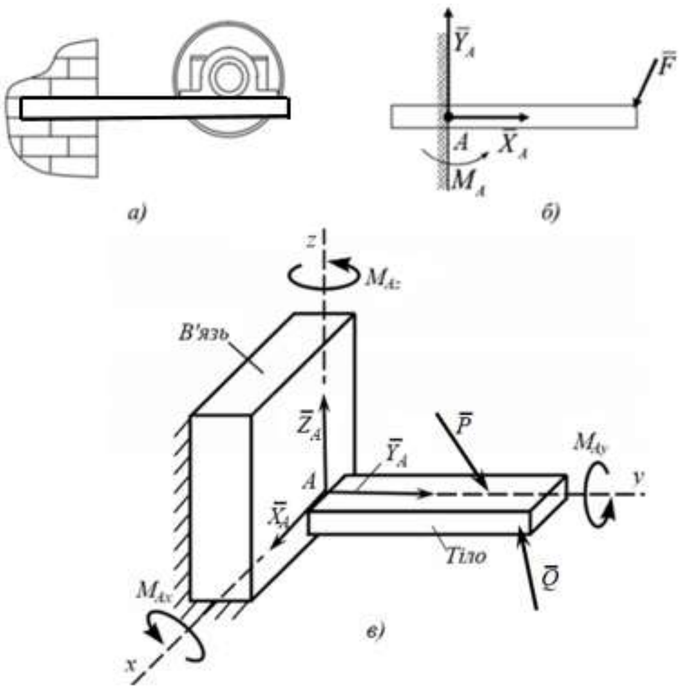


Рис. 1.14

Якщо діючі на тіло активні сили лежать в одній площині, то реактивна сила $\vec{R}_A$ і пара сил з моментом M_A теж лежать в цій площині. Тоді реакція жорсткого защемлення визначається трьома складовими: двома складовими $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ сили реакції ($\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$) та пари сил з моментом M_A (рис. 1.14,*б*). У просторовій задачі реакцію $\vec{R}_A$ розкладають на три складові $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, а реактивний момент $\vec{M}_A$ зображають у вигляді трьох пар з моментами M_x, M_y, M_z (рис. 1.14, *в*).

§ 4. Аналітичний спосіб задавання сили

Якщо задана сила $\vec{F}$, то її проекції на прямокутні осі координат обчислюються за формулами:

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{\imath} = F cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{\imath}}\right);\ F_y = \vec{F} \cdot \vec{\jmath} = F cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{\jmath}}\right);\ F_z = \vec{F} \cdot \vec{k} = F cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{k}}\right),$$

де $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ −одиничні вектори, направлені по осях координат, $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{\imath}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{\jmath}}\right)$ і $\left(\widehat{\vec{F}, \vec{k}}\right)$ − кути між додатними напрямками осей відповідно x, y, z і напрямком вектора $\vec{F}$.

На практиці вигідніше користуватися таким правилом: *проекція вектора на вісь дорівнює взятому із знаком «+» або «-» добутку модуля вектора на косинус гострого кута між цим вектором і віссю. Знак «+» беремо тоді, коли переміщення від проекції початку цього вектора на вісь до проекції його кінця співпадає з напрямком осі і знак «-» − якщо не співпадає.* Отже для зображених на рис. 1.15 сил, одержимо:

$$F_x = F cos\alpha; \quad Q_x = -Q cos\beta.$$

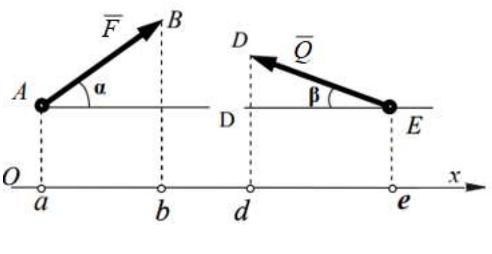


Рис. 1.15

У випадку, коли вектор сили перпендикулярний до осі, то проекція цієї сили на вісь дорівнює нулю. Якщо сила паралельна осі або лежить на ній, то вона проектується на цю вісь на всю свою довжину із знаком «+» чи «-» в залежності від того, чи вона направлена в цю ж сторону що й вісь, чи в протилежну сторону.

Якщо сила і вісь лежать в різних площинах, то проекцію сили на вісь знаходять шляхом подвійного проектування: спочатку силу проектують на площину, в якій лежить вісь, а потім знайдену проекцію на площину проектують на дану вісь.

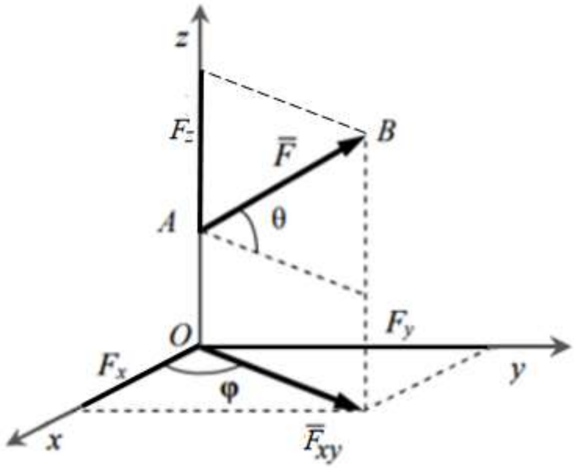


Рис. 1.16

Проекцією сили $\vec{F}$ на площину Oxy називається вектор $\vec{F}_{xy}$ (рис. 1.16), модуль якого $F_{xy} = Fcos\theta$, θ– кут між напрямком сили та площиною. Отже, для показаного на рис.1.16 випадку, знайдемо

$$F_x = F_{xy}cos\varphi = Fcos\theta cos\varphi;\ \ F_y = F_{xy}sin\varphi = Fcos\theta sin\varphi.$$

Проекція сили $\vec{F}$ на вісь $0z$: $F_z = Fsin\theta$.

Для того, щоб задати аналітично вектор сили у вибраній системі координат потрібно знати модуль та орієнтацію цієї сили, тобто кути її нахилу до координатних осей. Показана на рис.1.17 сила $\vec{F}$ має складові $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{F}_3$, причому направлені ці складові паралельно осям координат. Якщо F_x, F_y, F_z – проекції вектора сили на відповідні осі координат, то $\vec{F}_1 = F_x \cdot \vec{\imath}$, $\vec{F}_2 = F_y \cdot \vec{\jmath}$, $\vec{F}_3 = F_z \cdot \vec{k}$. Якщо величини проекцій сили на осі координат F_x, F_y та F_z задані, то вектор сили визначається залежністю

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F_x \cdot \vec{\imath} + F_y \cdot \vec{\jmath} + F_z \cdot \vec{k}, \tag{1.5}$$

модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \tag{1.6}$$

Напрямок сили визначається направляючими косинусами кутів, які вектор утворює з додатними напрямками координатних осей:

$$cos\alpha = cos\left(\widehat{\vec{\imath},\vec{F}}\right) = \frac{F_x}{F};\ cos\beta = cos\left(\widehat{\vec{\jmath},\vec{F}}\right) = \frac{F_y}{F};\ cos\gamma = cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{F}}\right) = \frac{F_z}{F}, \tag{1.7}$$

причому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

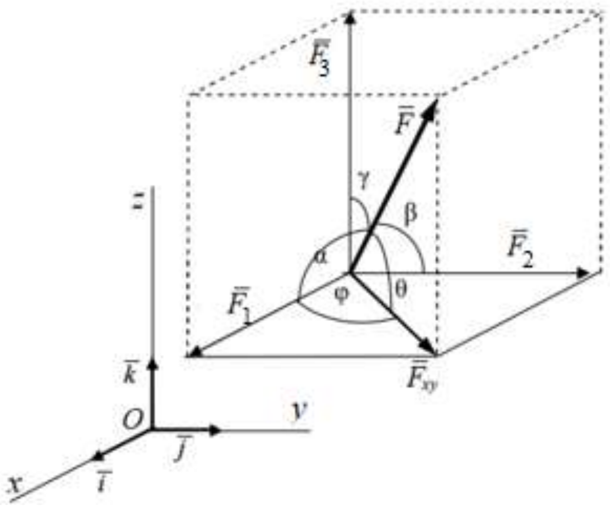


Рис. 1.17

Отже слід пам'ятати, що якщо ми вектор $\vec{F}$ розклали на складові, які паралельні осям координат і, наприклад, складова $\vec{F}_1$ паралельна осі Ox, то модуль цієї складової в загальному випадку не дорівнює величині проекції цієї сили на вісь Ox.

§ 5. Збіжна система сил

*Якщо лінії дії деякої системи сил перетинаються в одній точці, то таку систему сил називають **збіжною системою сил** (або пучком сил)* Така система сил є найпростішою з існуючих систем сил.

Збіжні системи сил можуть бути просторовими (просторова збіжна система сил) і плоскими, тобто розміщеними в одній площині (плоска збіжна система сил).

Для того, щоб отримати умови рівноваги будь-якої систем сил необхідно спочатку спростити її, використовуючи еквівалентні перетворення. Збіжну систему сил можна привести до найпростішого виду, використовуючи таку теорему.

Збіжна система сил має рівнодійну, яка дорівнює векторній сумі всіх сил системи і прикладена в точці перетину їх ліній дії.

Доведення:

- на основі наслідку з перших двох аксіом про те, що сила є ковзним вектором, перенесемо кожну із сил системи вздовж її лінії дії в центр пучка *O* (рис. 1.18, *б*);
- на основі аксіоми про паралелограм сил послідовно складемо всі прикладені в точці *O* сили (рис. 1.18, *в*):

$$\begin{gathered}\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;\\ \vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vec{R} = \vec{R}_n = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.\end{gathered} \tag{1.8}$$

В результаті приходимо до висновку, що система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$, зображена на рис.1.18, *а*, і сила $\vec{R}$, зображена на рис.1.18, *г*, еквівалентні. Теорема доведена.

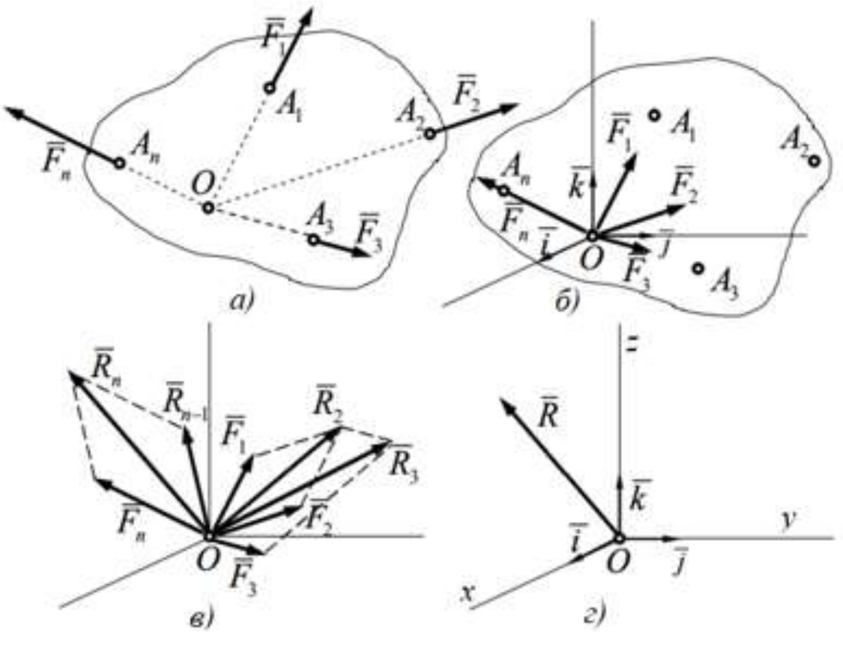


Рис. 1.18

Процес послідовного застосування геометричного додавання сил системи можна провести також шляхом побудови так званого силового многокутника із заданих сил. Цей процес продемонстрований для чотирьох сил на рисунку 1.19, б, в. В силовому многокутнику кінець однієї сили служить початком наступної. Рівнодійна сила $\vec{R}$ в силовому многокутнику з'єднує початок першої сили з кінцем останньої, тобто є замикаючим вектором цього многокутника. Очевидно, що це правило справедливе для довільної кількості сил (рис. 1.19, г).

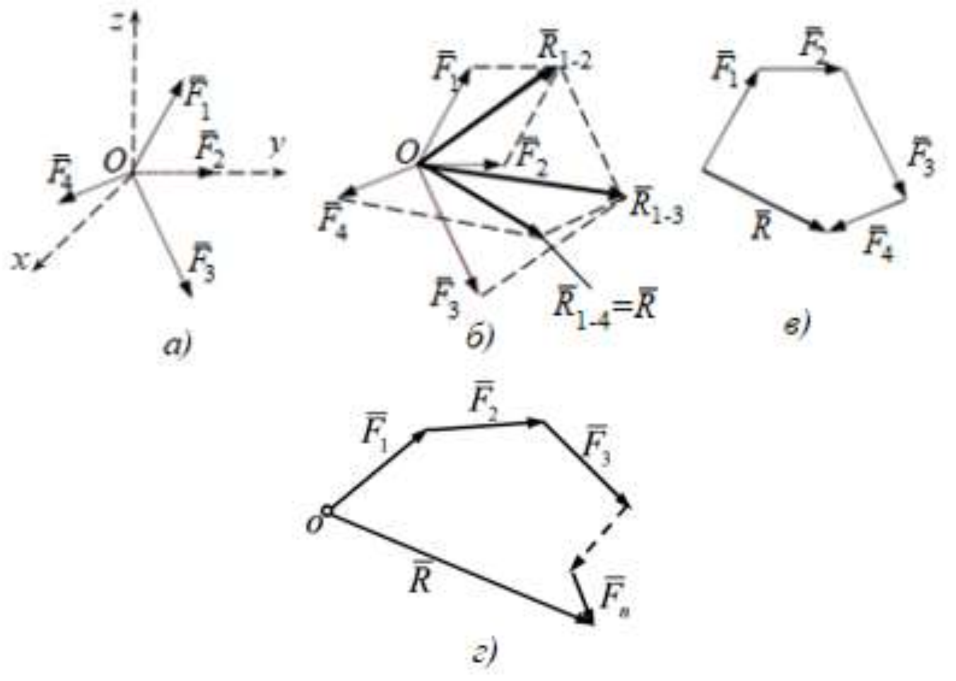


Рис. 1.19

Для можливості здійснення аналітичного додавання сил використаємо відому теорему: *проекція на вісь рівнодійної сили деякої системи сил дорівнює сумі проекцій всіх складових сил на цю ж вісь.*

Нехай маємо систему сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$, яка приведена до рівнодійної $\vec{R}$ за допомогою силового многокутника (рис. 1.20).

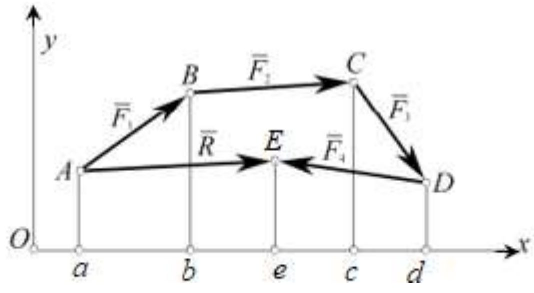


Рис. 1.20

Виберемо систему прямокутних осей координат і спроектуємо на вісь Ox всі сили системи. Спрямовані відрізки на осі x є проекціями відповідних сил на цю вісь, а саме

$$F_{1x} = ab, F_{2x} = bc, F_{3x} = cd, F_{4x} = -de.$$

Алгебраїчна сума всіх проекцій дорівнює

$$ab + bc + cd - de = ae.$$

Але ae є проекцією вектора $\vec{R}$ на вісь x. Отже

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}.$$

Це справедливо для будь-якої кількості сил і не тільки плоскої системи, а й просторової.

Проектуючи векторну рівність

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

на осі x, y, z, згідно з теоремою про проекції замикаючої, одержимо:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \tag{1.9}$$

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \tag{1.10}$$

її направляючі косинуси:

$$cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{R}}\right) = \frac{R_x}{R};\ cos\left(\widehat{\vec{j}, \vec{R}}\right) = \frac{R_y}{R};\ cos\left(\widehat{\vec{k}, \vec{R}}\right) = \frac{R_z}{R}. \tag{1.11}$$

§ 6. Умови рівноваги системи збіжних сил.

Доведемо таку **теорему**: для того, щоб збіжна система сил була в рівновазі, необхідно і достатньо, щоби рівнодійна сила цієї системи сил дорівнювала нулю.

$$\vec{R} = 0. \tag{1.12}$$

Необхідність цієї умови випливає з того, що збіжна система сил еквівалентна одній силі, яка є рівнодійною $\vec{R}$. Тіло може бути в рівновазі під дією однієї сили тоді, коли ця сила дорівнює нулю. Це випливає з аксіоми про дві сили.

Для доведення достатності умови (1.12) потрібно показати, що якщо рівнодійна дорівнює нулю (виконується рівняння (1.12)), то збіжна система сил знаходиться в рівновазі.

Нехай рівнодійна збіжної системи сил $\vec{R} = 0$. Так як задана система сил еквівалентна одній рівнодійній силі, яка дорівнює нулю, то згідно з другою аксіомою статики цю еквівалентну нулю систему сил можна відкинути, не порушуючи стану тіла. Тоді на тіло не діють ніякі сили і воно знаходиться в рівновазі за першим законом Ньютона.

Умова $\vec{R} = 0$ означає, що при побудові силового многокутника кінець вектора останньої сили системи співпаде з початком вектора першої сили. Отже *система збіжних сил буде знаходитись у стані рівноваги тільки тоді, коли силовий многокутник даної системи сил замкнутий.* Цю умову називають *геометричною умовою рівноваги збіжної системи сил.*

При виконанні умови (1.12) модуль вектора $\vec{R}$ дорівнює нулю. Тоді з формули (1.10) одержимо, що повинні бути рівними нулю проекції рівнодійної на осі координат, тобто,

$$R_x = 0;\ R_y = 0;\ R_z = 0,$$

звідки з урахуванням (1.9) випливають рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \qquad (1.13)$$

Рівняння (1.13) виражають аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил: *для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил системи на кожну вісь дорівнювала нулю*.

Якщо розглядається рівновага плоскої системи збіжних сил, то використовуються тільки два з трьох рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad (1.14)$$

(при умові, що в площині вибрана система координат Oxy).

§ 7. Теорема про три сили

Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії двох з них перетинаються в одній точці, то всі ці сили лежать в одній площині, а лінії їхньої дії перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай на тіло, яке знаходиться в рівновазі, діють три непаралельні сили $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$. Лінії двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ перетинаються в точці *O* (рис. 1.21, *а*). Перенесемо ці дві сили в точку перетину їх ліній дії і замінимо їх рівнодійною $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 1.21, *б*). Одержана при цьому система двох сил $(\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0$ буде зрівноваженою. Це можливо тільки тоді, коли сили $\vec{R}$ та $\vec{F}_3$ направлені вдовж однієї прямої. Отже лінії дії всіх трьох сил повинні перетинатися в точці *O*, і всі сили повинні лежати в одній площині.

Використовуючи цю теорему часто вдається визначити напрямок реакції в'язі (наприклад нерухомого циліндричного шарніра), не застосовуючи розкладання її на дві неколінеарні складові. Наприклад, для однорідної балки *AB* вагою $\vec{P}$, яка закріплена в точці *A* нерухомим циліндричним шарніром і в точці D обпирається на виступ (рис. 1.22), лінія дії реакції нерухомого шарніра $\vec{R}_A$ проходитиме через центр шарніра та точку перетину сили ваги балки $\vec{P}$ та реакції $\vec{N}_D$ виступу D на гладеньку поверхню балки.

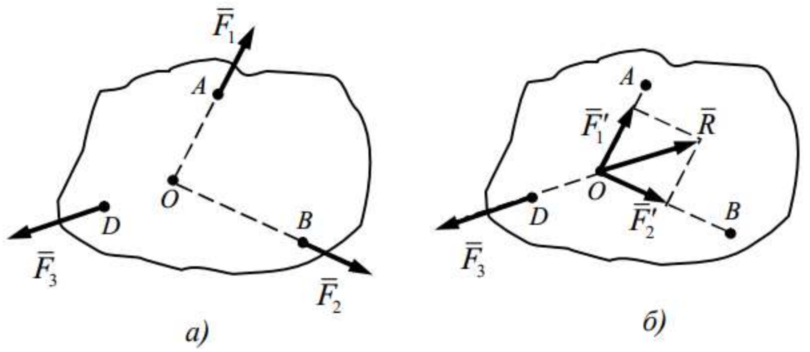


Рис. 1.21

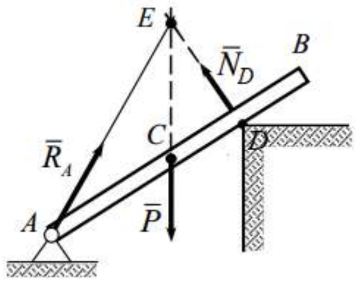


Рис. 1.22

§ 8. Розв'язування задач на рівновагу системи збіжних сил

При розв'язуванні задач на дослідження рівноваги матеріального об'єкта слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) виходячи з того, що задано і що потрібно знайти, вибрати об'єкт (матеріальну точку, тверде тіло, чи систему тіл), рівновагу якого слід розглянути;
2) прикласти до цього тіла всі активні сили, які діють на нього;
3) якщо тіло не вільне, звільнити його від в'язей і дію в'язей на тіло змінити реакціями;
4) вияснити, під дією якої системи сил (активних і реактивних) тіло знаходиться в рівновазі і для одержаної зрівноваженої системи сил скласти рівняння рівноваги;
5) розв'язавши отриману систему рівнянь рівноваги знайти всі невідомі величини.

Якщо в задачі статики кількість невідомих величин перевищує кількість рівнянь рівноваги, то задача є статично невизначеною. Такі задачі не можна розв'язати методами статики.

Приклад 1.1

Вантаж G вагою $20H$ підвішений за допомогою трьох шнурів OB, OC і OA до стіни і до нерухомого тіла (рис. 1.23). Визначити реакції шнурів $\vec{T}_A, \vec{T}_B$ і $\vec{T}_C$, якщо $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$, шнур OA горизонтальний. Вагою шнурів знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вузла O. На цей вузол діє активна сила ваги підвішеного тіла $\vec{G}$. Вузол O не вільний, так як його рух під дією сили $\vec{G}$ обмежений шнурами OB, OC і OA. Згідно з аксіомою про звільнення від в'язей відкинемо ці в'язі, а їхню дію на вузол O замінимо реакціями $\vec{T}_A, \vec{T}_B$ і $\vec{T}_C$ (рис. 1.23,*а*), які направляємо вздовж шнурів від вузла O до точок закріплення B, C *і* A. Для того, щоб дія сил $\vec{T}_A, \vec{T}_B$ і $\vec{T}_C$ на вузол O була еквівалентною дії шнурів, вузол O під дією системи сил $\vec{G}, \vec{T}_A, \vec{T}_B$ і $\vec{T}_C$ повинен знаходитися в рівновазі. Отже ми отримали задачу на рівновагу просторової системи збіжних сил. Виберемо систему координат з початком в точці O і напишемо умови рівноваги (1.13) отриманої системи сил.

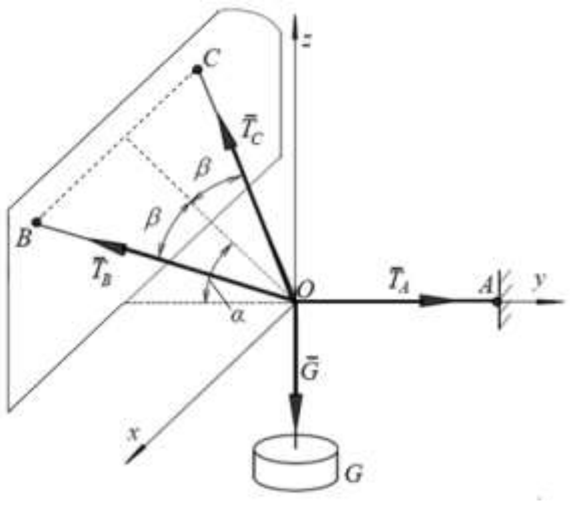


Рис. 1.23

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \ \ (T_B - T_C)sin\beta = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \ \ T_A - (T_B + T_C)cos\beta cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \ \ (T_B + T_C)cos\beta sin\alpha - G = 0.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо:

$$T_B = T_C = \frac{2G}{cos\beta sin\alpha} = 13{,}33\text{Н}; \ \ T_A = (T_B + T_C)cos\beta cos\alpha = 11{,}55\text{Н}.$$

Приклад 1.2

Циліндричний котел радіусом R =1 м та вагою P = 40 кН, яка рівномірно розподілена по його довжині, лежить на виступах A і B кам'яної кладки (рис. 1.24, a). Відстань між стінками кладки l =1,6 м. Знайти тиск котла на кладку в точках A і B, якщо тертям знехтувати.

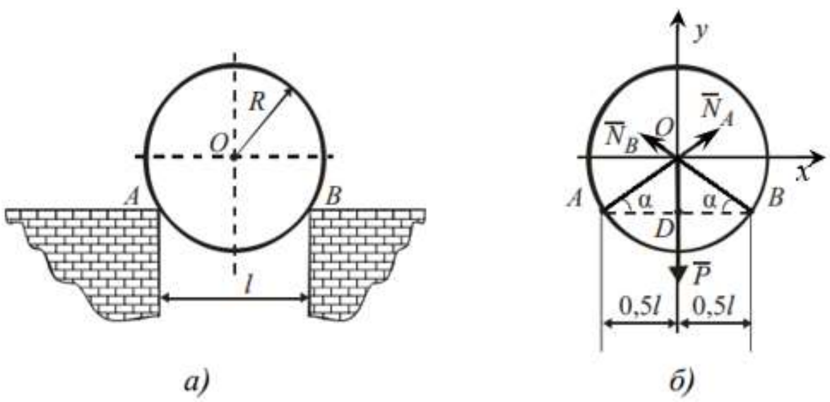


Рис. 1.24

Розв'язання. Котел знаходиться в рівновазі під дією сил: сили $\vec{P}$ ваги котла (активна сила), та реакцій $\vec{N}_A$ і $\vec{N}_B$ виступів кам'яної кладки в точках A і B. Так як поверхня котла ідеально гладка, реакції $\vec{N}_A$ і $\vec{N}_B$ в точках A і B направляємо по нормалі до цієї поверхні (рис. 1.24, *б*). Ці реакції проходять через центр O кола котла і нахилені до горизонталі під кутами α. Отже котел повинен знаходитися в рівновазі під дією збіжної системи трьох сил $\vec{P}, \vec{N}_A$ і $\vec{N}_B$. Виберемо систему координат і напишемо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\;\; N_A cos\alpha - N_B cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\;\; N_A sin\alpha + N_B sin\alpha - P = 0.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь знайдемо

$$N_A = N_B = \frac{P \cdot R}{2OD} = \frac{P \cdot R}{\sqrt{4R^2 - l^2}} = 33{,}3\text{кН}.$$

Приклад 1.3

До балки AB у точці C прикладена сила $F = 1200$Н; опорами балки є циліндричний нерухомий шарнір A і коток B (рис. 1.25). Довжина балки $AB = 10$м, $AC = 4$м. Визначити напрям реакції шарніра A $(\vec{R}_A)$ і величини реакцій R_A і R_B.

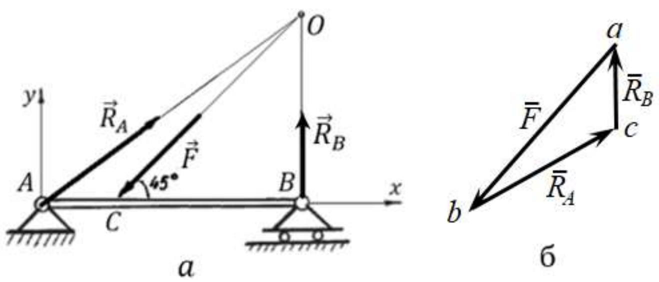


Рис. 1.25

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки AB.

Згідно з аксіомою *5* замінимо в'язі (шарнір A і опора B) їхніми реакціями. Реакція опори B напрямлена перпендикулярно до площини обпирання. Напрям реакції шарніра A заздалегідь невідомий. Проте балка перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії двох з яких перетинаються в точці O (рис. 1.25 *а*). Отже, за теоремою про три сили реакція шарніра A повинна бути напрямлена по прямій OA. Побудувавши замкнений силовий трикутник (рис. 1.25, *б*), знайдемо напрям реакції шарніра $\vec{R}_A$. Побудову починаємо з відомого вектора, що дорівнює силі $\vec{F}$. Потім з кінця цього вектора проводимо пряму bc, паралельну OA, а з початку вектора $\vec{F}$ проводимо пряму ac, паралельну $\vec{R}_B$. Отже, визначимо напрям реакції шарніра $\vec{R}_A$. Нарешті, з трикутника abc знайдемо його сторони, тобто величини R_A і R_B. Ці обчислення пропонуємо провести самостійно.

Відповідь: $R_A = 989{,}5$Н, $R_B = 339{,}4$Н, $\alpha = arctg 0{,}6$.

Приклад 1.4

Брусок AB довжиною l на кінці якого прикріплений вантаж M вагою P, опирається в точці A на гладку вертикальну стінку, а в точці C на виступ (рис. 1.26). Нехтуючи вагою бруска і тертям, визначити реакції опор і відстань AC при рівновазі, якщо брусок утворює з горизонтом кут α.

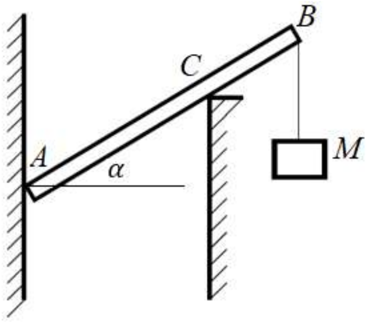


Рис. 1.26

Розв'язання. Розглянемо рівновагу бруска *AB*. На брусок діє активна сила $\vec{P}$ ваги вантажу *M*. Брусок не вільний, так як на нього накладені в'язі у вигляді гладкої вертикальної стінки і виступу. Відкинувши в'язі покажемо їхню дію на брусок відповідними реакціями. Реакція гладкої стінки направлена перпендикулярно до стіни. Реакція виступу в точці C направлена перпендикулярно до гладкої поверхні бруска (рис. 1.27). Так як брусок невагомий, то він повинен знаходитися в рівновазі під дією трьох сил $\vec{P}, \vec{N}_A$ і $\vec{N}_C$. Лінії дії сил $\vec{N}_A$ і $\vec{P}$ перетинаються в точці *O*. На основі теореми про три сили лінія дії третьої сили $\vec{N}_C$ теж повинна проходити через точку *O*, тобто виступ *C* повинен займати таке положення, щоб лінія дії реакції $\vec{N}_C$ проходила через точку *C* (рис. 1.27).

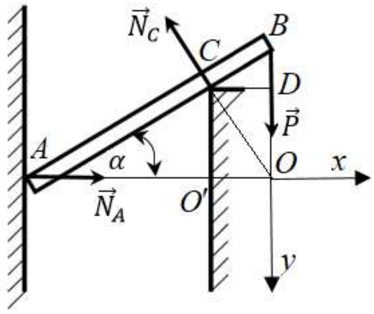


Рис. 1.27

Виберемо систему координат як показано на рисунку і напишемо рівняння рівноваги.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\;\; N_A - N_C sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\;\; P - N_C cos\alpha = 0.$$

$$N_C = \frac{P}{cos\alpha};\;\; N_A = Ptg\alpha.$$

$$AO = lcos\alpha;\;\; CO = AOsin\alpha = lcos\alpha sin\alpha.$$

$$AC = \sqrt{(AO)^2 - (CO)^2} = lcos^2\alpha.$$

Приклад 1.5

Вантаж вагою Q = 1 кН підвішений в точці D (рис. 1.28). Стрижні в точках A, B, C і D кріпляться з допомогою ідеальних шарнірів. Вважаючи стержні невагомими визначити зусилля, які виникають в них.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вузла D, в якому сходяться три стрижні, що утримують вантаж. На цей вузол діє активна сили $\vec{Q}$. Вузол D невільний так як на нього накладені в'язі у вигляді трьох ідеальних стрижнів. Згідно з аксіомою про в'язі відкинемо в'язі а їхню дію на вузол D замінимо відповідними реакціями. Реакції ідеальних стрижнів направлені вздовж стрижнів. Направимо ці реакції від вузла D тобто припустимо, що стрижні розтягнуті. В результаті ми отримали, що вузол D знаходиться в рівновазі під дією просторової збіжної системи сил: активної сили $\vec{Q}$ та реакцій стрижнів $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C$ (рис. 1.28).

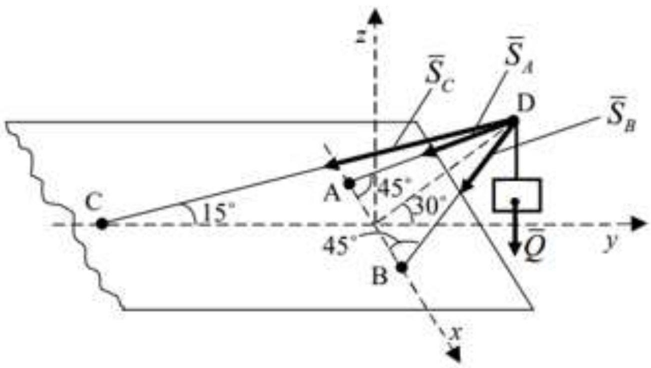


Рис. 1.28

Виберемо систему координат, як показано на рисунку і складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \;\; -S_A cos45° + S_B cos45° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \;\; -(S_A + S_B) sin45° cos30° - S_C cos15° = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \;\; -(S_A + S_B) sin45° sin30° - S_C sin15° - Q = 0.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь знайдемо

$$S_A = S_B = -2{,}64 \text{ кН}, \qquad S_C = 3{,}35 \text{ кН}.$$

Так як зусилля в стрижнях AD і BD від'ємні, то ці стрижні стиснуті, а стрижень DC розтягнутий.

Приклад 1.6

Між двома взаємно перпендикулярними гладенькими площинами OA і OB (рис. 1.29) лежать два гладеньких однорідних циліндри, які дотикаються. Визначити кут φ, який утворює пряма, що проходить через центри циліндрів, із горизонталлю, а також сили взаємного тиску циліндрів та кожного з них на відповідні площини, якщо площина OB нахилена до горизонту під кутом 30°, а вага циліндрів P_1= 10 Н, P_2 = 30 Н.

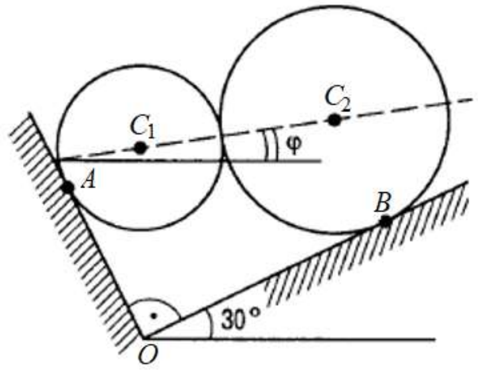


Рис. 1.29

Розв'язання. Розглянемо рівновагу лівого циліндра. На нього діють активна сила ваги $\vec{P}_1$, реакція гладкої площини $OA - \vec{N}_1$ і реакція зі сторони правого циліндра $\vec{N}_{21}$ (рис. 1.30)

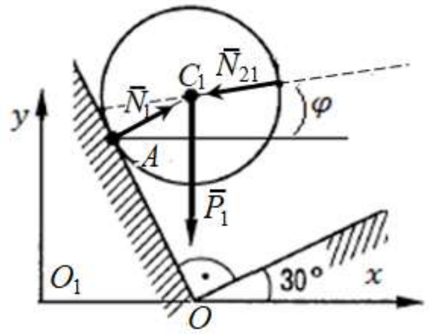


Рис. 1.30

Циліндр знаходиться в рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил. Виберемо осі координат, як показано на рисунку і напишемо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^{3} F_{kx} = 0;\ \ N_1 cos30^{\circ} - N_{21} cos\varphi = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} F_{ky} = 0;\ \ N_1 sin30^{\circ} - N_{21} sin\varphi - P_1 = 0.$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь відносно N_1 і N_{21}.

$$N_1 = \frac{2P_1}{1 - \sqrt{3}tg\varphi}, \qquad N_{21} = \frac{P_1\sqrt{3}}{cos\varphi\left(1 - \sqrt{3}tg\varphi\right)}.$$

Розглянемо тепер рівновагу правого циліндра. На нього діють активна сила ваги $\vec{P}_2$, реакція гладкої площини $OB - \vec{N}_2$ і реакція зі сторони лівого циліндра $\vec{N}_{12}$ (рис. 1.31).

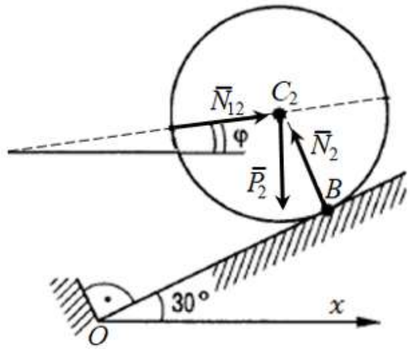


Рис. 1.31

Умови рівноваги

$$N_{12}cos\varphi - N_2 sin30^{\circ} = 0,$$

$$N_{12}sin\varphi + N_2 sin60^{\circ} - P_2 = 0.$$

Розв'язок отриманої системи

$$N_2 = \frac{2P_2}{\sqrt{3} + tg\varphi}, \qquad N_{12} = \frac{P_2}{cos\varphi\left(\sqrt{3} + tg\varphi\right)}.$$

Нагадаємо, що $N_{12} = N_{21}$, як сили дії і протидії. Цю умову використаємо для визначення φ.

$$\frac{P_1\sqrt{3}}{cos\varphi\left(1 - \sqrt{3}tg\varphi\right)} = \frac{P_2}{cos\varphi\left(\sqrt{3} + tg\varphi\right)} \;\Rightarrow\; tg\varphi = \frac{P_2 - 3P_1}{\sqrt{3}(P_1 + P_2)}.$$

$$N_1 = \frac{P_1 + P_2}{2}, \qquad N_2 = \sqrt{3}\frac{P_1 + P_2}{2}, \qquad N_{12} = N_{21} = \frac{\sqrt{3P_1^2 + P_2^2}}{2}.$$

Враховуючи числові значення P_1 і P_2, знайдемо

$$tg\varphi = 0, \;\; \varphi = 0;$$

$$N_1 = 20 \text{ кН}, \qquad N_2 = 34{,}64 \text{ кН}, \qquad N_{12} = N_{21} = 17{,}32 \text{ кН}.$$

Питання для самоконтролю

1. Які питання розглядаються в теоретичній механіці? Основні поняття та означення статики.
2. Яка міра механічної взаємодії матеріальних тіл? В яких одиницях вимірюється ця величина?
3. Під дією яких двох сил вільне тіло перебуватиме в спокої?
4. Чи можна перенести силу по лінії її дії в іншу точку тіла і при цьому дія сили на тіло не зміниться? Обґрунтуйте свою відповідь.
5. Що називають системою сил? За яких умов дві системи сил можна вважати еквівалентними?
6. Яку силу називають рівнодійною системи сил? Що таке рівнодійна системи сил, прикладених до матеріальної точки?
7. Що називають в'яззю? Сформулюйте принцип звільнення від в'язей?
8. Які найбільш поширені типи в'язей ви знаєте. Як спрямовані їхні реакції?
9. Яка система сил називається системою збіжних сил? Чому дорівнює рівнодійна такої системи сил?
10. Вкажіть умови та рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил?

ГЛАВА II
МОМЕНТИ СИЛ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ОСІ. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

§ 1. Момент сили відносно точки

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O – це вектор векторного добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, точки прикладання сили відносно точки O, та вектора сили $\vec{F}$ (рис. 2.1):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.1)$$

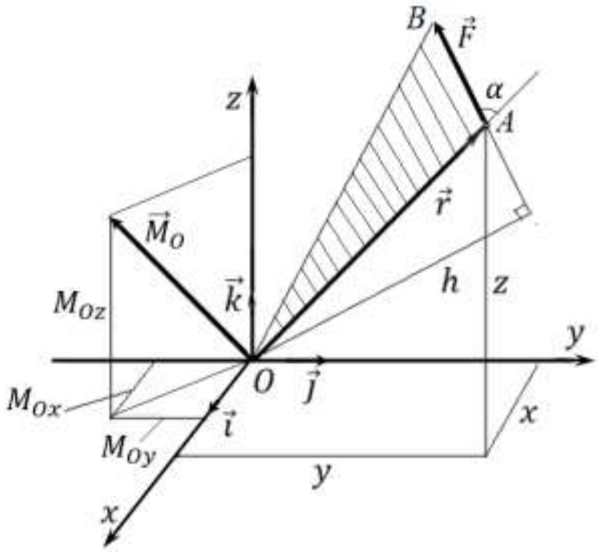


Рис. 2.1

Напрямок і величина цього вектора визначається правилами векторної алгебри щодо напрямку і модуля вектора векторного добутку. Нагадаємо, що вектор $\vec{c}$, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (тобто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ і до вектора $\vec{b}$ (тобто до площини в якій розміщені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$), і направлений в ту часину простору, дивлячись звідки ми побачимо, що для того щоб сумістити перший вектор $\vec{a}$ з другим вектором $\vec{b}$, потрібно перший вектор повертати на менший кут в напрямку проти ходу стрілки годинника (рис. 2.2). Модуль вектора векторного добутку дорівнює добутку модулів векторів співмножників на синус кута між ними, тобто

$$c = a \cdot b \cdot sin\alpha.$$

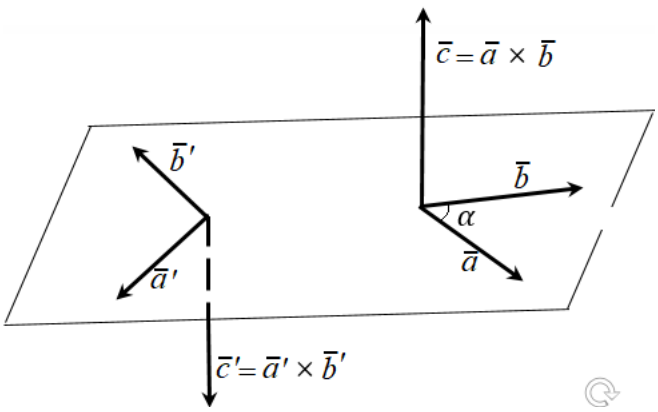


Рис. 2.2

Таким чином вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$, і направлений в тому напрямку, звідки будемо бачити, що тіло під дією сили $\vec{F}$ хоче обертатися в напрямку проти ходу стрілки годинника (рис. 2.1). Домовимося прикладати вектор моменту сили відносно центра O в цьому центрі.

Модуль вектора моменту сили відносно точки дорівнює

$$M_O(\vec{F}) = r \cdot F \cdot sin\alpha = F \cdot h, \tag{2.2}$$

де $h = r \cdot sin\alpha$ – довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили $\vec{F}$ (рис 2.1). Цю довжину називають ***плечем*** *сили* $\vec{F}$ *відносно моментної точки* O.

При розгляді плоскої системи сил лінії дії всіх сил лежать в одній площині. Точка, відносно якої обчислюються моменти, також розміщена в цій площині. Тоді використовується поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки. *Алгебраїчний момент сили* відносно точки дорівнює взятому із знаком «+» або «-» добутку модуля сили на плече сили відносно цієї точки (рис. 2.3):

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \tag{2.3}$$

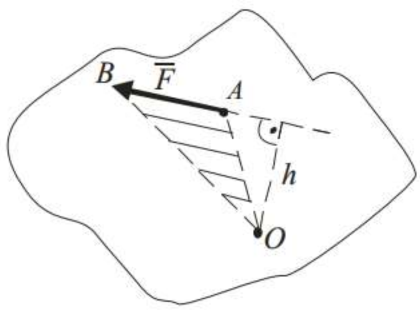


Рис. 2.3

Знак «+» вибирають тоді, коли сила хоче повернути тіло навколо точки моментів проти ходу стрілки годинника і «-» – при намаганні повернути тіло за стрілкою годинника. Так на рис. 2.1 маємо, що $M_O(\vec{F}) = F \cdot h > 0$.

Враховуючи означення моменту сили відносно точки, можемо зробити такі висновки:

1) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника *OAB*, побудованого на силі і моментній точці (рис. 2.1, 2.3);

2) момент сили відносно точки не зміниться, якщо силу перенести вздовж її лінії дії;

3) момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через моментну точку (тоді $h = 0$), або коли сила дорівнює нулю.

Позначимо проекції радіуса вектора $\vec{r}$ на осі координат через x, y, z. Проекції сили $\vec{F}$ на осі координат позначимо $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$. Тоді вектор моменту сили можна подати так:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ = \vec{\imath} \cdot (yF_z - zF_y) + \vec{\jmath} \cdot (zF_x - xF_z) + \vec{k} \cdot (xF_y - yF_z), \end{aligned} \tag{2.4}$$

звідки бачимо, що проекції вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на осі координат обчислюються за формулами:

$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y,\ M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z,\ M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_z. \tag{2.5}$$

Зауважимо, що точка моментів O є початком системи координат, тому x, y, z є координатами точки прикладання сили $\vec{F}$.

Модуль вектора моменту і його напрямок визначаються так:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \tag{2.6}$$

$$cos\left(\widehat{\vec{M}_O, \vec{\imath}}\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \qquad cos\left(\widehat{\vec{M}_O, \vec{\jmath}}\right) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \qquad cos\left(\widehat{\vec{M}_O, \vec{k}}\right) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \tag{2.7}$$

§ 2. Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту цієї сили відносно любої точки на цій осі. Можна також показати, що *момент сили відносно осі дорівнює алгебраїчному моменту проекції сили на будь-яку перпендикулярну до осі площину відносно точки, в якій ця вісь перетинається з площиною.* Покажемо, що ці два твердження ідентичні.

Розглянемо дію на тіло сили $\vec{F}$, яка прикладена в точці A (рис. 2.4).

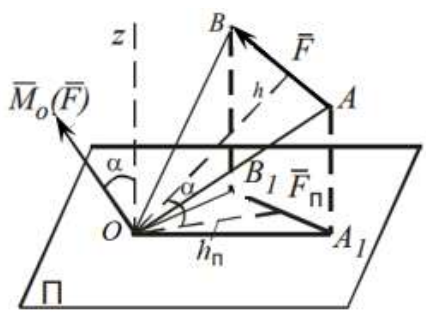


Рис. 2.4

Векторний момент сили $\vec{F}$ відносно центра O зображується перпендикулярним до площини трикутника OAB вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль якого

$$M_O(\vec{F}) = 2\text{пл.}\Delta OAB. \tag{2.8}$$

Згідно з першим означенням

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F})cos\alpha = 2\text{пл.}\Delta OAB \cdot cos\alpha. \tag{2.9}$$

Згідно з другим означенням

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{\Pi}) = \pm F_{\Pi} \cdot h_{п} = \pm 2\text{пл.}\Delta OA_1B_1. \tag{2.10}$$

Трикутник OA_1B_1 являє собою проекцію на площину П трикутника OAB. Кут між площинами цих трикутників дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. За відомою формулою маємо

$$\text{пл.}\Delta OA_1B_1 = \text{пл.}\Delta OAB \cdot cos\alpha,$$

де α – кут між вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$та віссю Oz. Звідси за формулами (2.9) і (2.10)

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cdot cos\alpha = M_{Oz}(\vec{F}). \tag{2.11}$$

Таким чином, відповідно до визначення для знаходження моменту сили відносно осі потрібно (рис.2.4, 2.5):

- провести перпендикулярну до осі z площину *П*;
- знайти точку *О* перетину осі z з площиною *П*;
- спроектувати силу $\vec{F}$ на площину *П*;
- обчислити момент проекції $\vec{F}_{\Pi}$ відносно точки O.

Тоді

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{\Pi}) = \pm F_{\Pi} \cdot h_{\text{п}},$$

де

$\vec{F}_{\Pi}$ – вектор проекції сили $\vec{F}$ на перпендикулярну до осі Oz площину *П*;

$h_{\text{п}}$ – плече проекції $\vec{F}_{\Pi}$ відносно точки *О* перетину осі Oz із площиною *П*.

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо дивлячись з додатного напрямку осі z видно, що сила хоче повернути тіло відносно цієї осі проти ходу стрілки годинника. При намаганні повернути тіло за ходом стрілки годинника, момент сили відносно осі треба брати із від'ємним знаком. Так, на рис. 2.5 маємо, що $M_{Oz}(\vec{F}) = F_{\Pi} \cdot h > 0$.

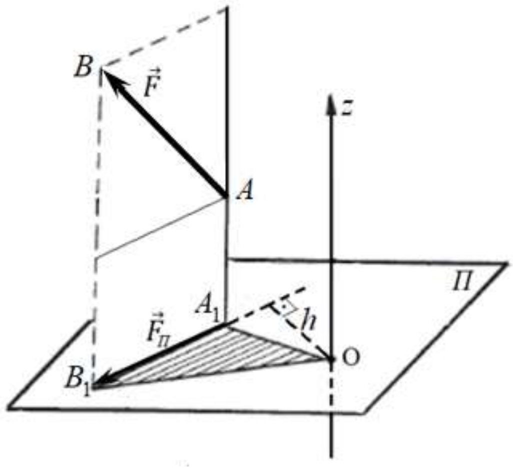


Рис. 2.5

Із формули (2.10) можна встановити, що момент сили відносно осі дорівнює нулю тоді, коли:

1) сила паралельна осі (тоді проекція сили на перпендикулярну до осі площину дорівнює нулю);

2) лінія дії сили перетинає цю вісь (тоді дорівнює нулю плече проекції сили).

Отже момент сили відносно осі дорівнює нулю тоді, коли сила лежить в одній площині з віссю.

Проекції вектора моменту сили відносно точи O на осі координат Ox, Oy і Oz визначаються за формулами (2.5). Так як точка O є початком системи координат, тобто вона належить одночасно кожній осі, то формули (2.5) є одночасно аналітичними формулами для обчислення моментів сили відносно координатних осей:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y,\ M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z,\ M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_z, \tag{2.12}$$

де x, y, z – координати точки прикладання сили, F_x, $F_y, F_z -$ проекції сили на координатні осі.

§ 3. Пара сил та її момент.
Теорема про суму моментів сил пари відносно довільної точки

Систему двох рівних за модулем сил, направлених вздовж паралельних прямих у протилежних напрямках називають *парою сил* (рис. 2.6). Площина розміщення сил пари називається площиною дії пари сил, а *найкоротша відстань* d *між лініями дії сил називається плечем пари.*

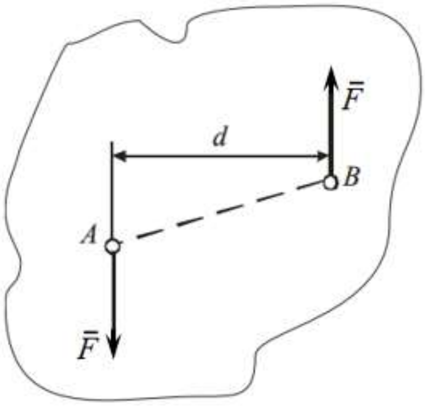


Рис. 2.6

Незважаючи на те, що геометрична сума сил пари дорівнює нулю, вони не утворюють зрівноважену систему сил, так як вони не мають спільної лінії дії і не зводяться до рівнодійної. Пара сил, діючи на вільне тіло, призводить до обертового руху тіла навколо деякої осі. Якщо пара сил діє на невільне тіло, то вона призводить до виникнення реакцій в'язей, які теж будуть парою реактивних сил. Ефект дії пари сил на тіло повністю характеризується моментом пари.

Момент пари сил – це є векторна величина, яка дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили, тобто (рис. 2.7)

$$\vec{M}(\vec{F},\vec{F}') = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F}) \text{ або } \vec{M}(\vec{F},\vec{F}') = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}' = \vec{M}_B(\vec{F}'). \qquad (2.13)$$

Векторний момент пари сил $(\vec{F},\vec{F}')$ позначаємо $\vec{M}$ або $\vec{M}(\vec{F},\vec{F}')$. Модуль вектора $\vec{M}$ дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече. Напрямлений вектор $\vec{M}$ перпендикулярно до площини дії пари в той бік, звідки напрямок можливого повороту тіла під дією пари видно проти ходу стрілки годинника (рис.2.7). Надалі покажемо, що вектор $\vec{M}$ можна прикладати в довільній точці тіла, до якого прикладена пара.

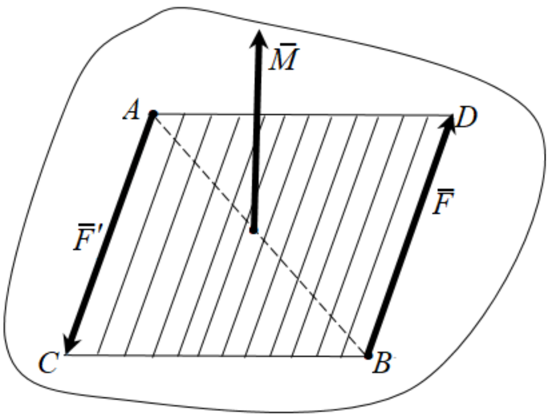


Рис. 2.7

Алгебраїчний момент пари дорівнює взятому із знаком «+» або «-» добуток модуля однієї із сил пари на плече пари:

$$M = M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot d. \tag{2.14}$$

Алгебраїчний момент пари сил додатний, якщо пара сил хоче обертати тіло в напрямку проти ходу стрілки годинника. Легко бачити, що алгебраїчний момент пари сил чисельно дорівнює площі побудованого на силах пари паралелограма, (рис. 2.7):

$$M = M\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = \text{пл.}ACBD = 2\text{пл.}\Delta ABC = 2\text{пл.}\Delta ABD.$$

Теорема про суму моментів сил пари відносно довільної точки

Сума моментів сил пари відносно будь-якої точки не залежить від положення цієї точки і завжди дорівнює моменту цієї пари.

Обчислимо суму моментів сил пари $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ відносно деякої точки O (рис. 2.8), враховуючи, що $\vec{F} = -\vec{F}'$:

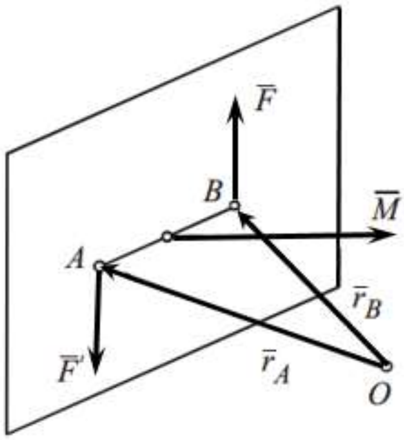


Рис. 2.8

$$\begin{gathered}\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}'\right) = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \vec{F}' = \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}'\right) + \vec{r}_A \times \vec{F}' = \\ = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}' = \overline{BA} \times \vec{F}' = \vec{M} = \\ = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \left(-\vec{F}\right) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \overline{AB} \times \vec{F} = \vec{M}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Отже дія пари сил на тверде тіло повністю визначається моментом цієї пари сил. Так як положення точки O вибране довільно, то вектор $\vec{M}$ моменту пари можна прикладати в будь-якій точці тіла, до якого прикладена пара, тобто цей вектор є **вільний** вектор. Цей висновок також випливає з теорем про еквівалентність пар, які розглянемо дальше.

§ 4. Теореми про еквівалентність пар сил

Теорема про еквівалентність розташованих в одній площині пар

Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її довільно переносити в площині дії, повертати в цій площині, а також змінювати одночасно величину сили і плече так, щоби величина моменту пари залишалася незмінною.

Нехай на тверде тіло діє пара сил $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ і її алгебраїчний момент $M = F \cdot d$ (рис. 2.9, а). Виберемо довільно в цьому тілі точки A_1 і B_1 на відстані $A_1B_1 = d_1$ (рис. 2.9, а) і проведемо через ці точки дві перпендикулярні до відрізка A_1B_1 лінії. Прикладемо в точках A_1 і B_1 зрівноважені системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ та $(\vec{F}_1', \vec{F}_2') \sim 0$, направивши їх вздовж цих ліній. Величини цих сил виберемо рівними $F_1 = F_2 = F_1' = F_2' = {}^{(F \cdot d)}/_{d_1}$ (рис 2.9, а). Тоді $(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{F}, \vec{F}'; \vec{F}_1, \vec{F}_2; \vec{F}_1', \vec{F}_2')$, оскільки $(\vec{F}_1, \vec{F}_2; \vec{F}_1', \vec{F}_2') \sim 0$.

Перенесемо сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$ в точку *C*, в якій перетинаються їхні лінії дії, і аналогічно сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}_2'$ в точку *D*. Рівнодіючі цих сил $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_2$ та $\vec{R}' = \vec{F}' + \vec{F}_2'$ рівні за модулем і направлені в протилежних напрямках вздовж діагоналі *CD* паралелограма *CLDK* (рис. 2.9, б), тому вони створюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути.

Внаслідок таких еквівалентних перетворень пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ з моментом $M_1 = F_1 \cdot d_1$, замінила задану пару сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ з моментом $M = F \cdot d$, причому

$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = \frac{F \cdot d}{d_1} \cdot d_1 = M.$$

Отже алгебраїчні моменти обох пар і напрямок обертання однакові. Теорем доведена.

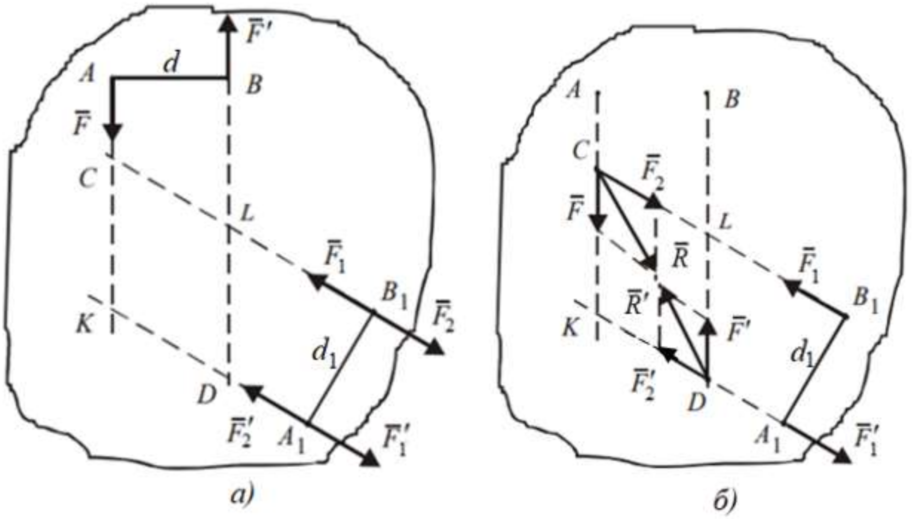


Рис. 2.9

Теорема про перенесення пари сил у паралельну площину

Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яку іншу площину в межах цього тіла, паралельну площині дії пари.

Нехай діюча на тверде тіло пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ прикладена в площині Π_1 (рис. 2.10). Проведемо в межах цього тіла площину Π_2, паралельну площині Π_1.

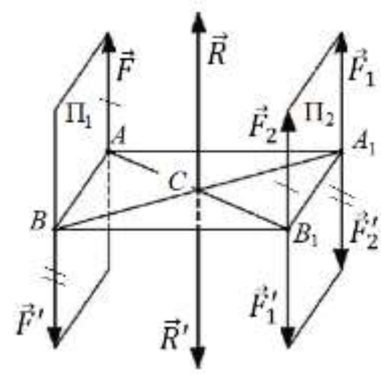


Рис. 2.10

У площині Π_2 відкладемо відрізок A_1B_1 так, що $AB \parallel A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$. В точках A_1 та B_1 прикладемо зрівноважені системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2')\sim 0$ та $(\vec{F}_2, \vec{F}_1')\sim 0$, при цьому виберемо ці сили такими, щоб $\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2$; $\vec{F}' = \vec{F}_1' = \vec{F}_2'$ (рис. 2.10). Складемо рівні і паралельні сили $\left(\vec{F}, \vec{F}_2\right)$ та $\left(\vec{F}', \vec{F}_2'\right)$, замінивши їх рівнодійними

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_2, \quad \vec{R}' = \vec{F}' + \vec{F}_2'.$$

Так як сили, котрі додавалися, рівні за величиною, то рівнодійні будуть проходити через точку C, яка ділить відрізок AB_1 чи A_1B пополам. Модулі цих двох рівнодійних рівні і направлені вони в протилежні сторони вздовж однієї прямої, тобто вони складають зрівноважену систему сил $(\vec{R}, \vec{R}') \sim 0$, яку можна відкинути. Отже залишаться сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_1'$, які утворюють пару сил, яка діє на тіло в площині Π_2 (рис. 2.10). Ця пара еквівалентна початково діючій парі сил $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$, так як

$$\overrightarrow{B_1A_1} \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}\ ,$$

тобто векторні моменти пар сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ та $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ рівні.

Таким чином, якщо пари сил мають однакові векторні моменти, то вони еквівалентні.

Теорема про додавання пар сил

Розглянемо випадок, коли пари сил не лежать в одній чи паралельних площинах, а розміщені в площинах, що перетинаються.

Доведемо, що якщо на тіло діють *дві пари сил, які лежать в площинах що перетинаються, то такі пари можна замінити однією еквівалентною парою, векторний момент якої дорівнює векторній сумі векторних моментів заданих пар сил.*

Розглянемо дві пари сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ та $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$, які лежать в площинах Π_1 і Π_2, котрі перетинаються під деяким кутом (рис. 2.11). Векторні моменти $\overrightarrow{M}_1$ і $\overrightarrow{M}_2$ цих пар сил перпендикулярні до відповідних площин.

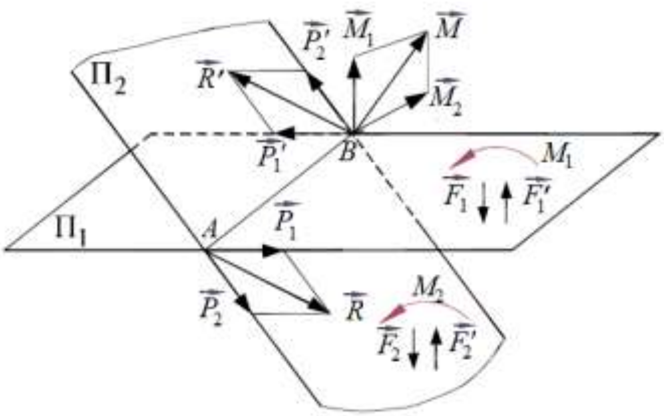


Рис. 2.11

На основі доведених вище теорем про еквівалентність пар сил перенесемо розглядувані пари сил в своїх площинах до лінії перетину цих площин і приведемо їх до одного плеча AB, так, щоб моменти перетворених пар сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_1'\right)$ та $\left(\vec{P}_2, \vec{P}_2'\right)$, були рівними моментам пар сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ та $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ (рис. 2.11):

$$\overrightarrow{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_1'\right) = \overrightarrow{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{P}_1 = \overrightarrow{M}_1\ ;\ \overrightarrow{M}\left(\vec{P}_2, \vec{P}_2'\right) = \overrightarrow{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{P}_2 = \overrightarrow{M}_2.$$

Додаємо прикладені в точці A сили, і аналогічно в точці B:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2; \quad \vec{R}' = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'.$$

В результаті ми отримали результуючу пара сил $(\vec{R}, \vec{R}')$ з моментом

$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{R} = \overrightarrow{BA} \times (\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{BA} \times \vec{P}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (2.16)$$

Отже, дві пари сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ і $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ з моментами $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$, які лежать в площинах, що перетинаються, можна замінити парою сил $(\vec{R}, \vec{R}')$ з моментом $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. Якщо пари сил розміщені в одній чи в паралельних площинах, то векторні моменти цих пар сил паралельні між собою і векторне додавання моментів пар переходить в алгебраїчне додавання. Якщо на тіло діє система пар сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$, то послідовно додаючи моменти цих пар, знайдемо, що дана система пар еквівалентна одній парі сил з моментом

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k. \quad (2.17)$$

§ 5. Умови рівноваги системи пар сил

Так як будь-яку систему діючих на тверде тіло пар сил можна замінити однією еквівалентною парою, то для рівноваги тіла під дією системи пар, необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари сил був рівний нулю. Тоді, відповідно до формули (2.17) умова рівноваги системи пар наступна:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = 0. \quad (2.18)$$

Проектуючи векторне рівняння (2.18) на координатні осі, отримаємо такі рівняння рівноваги системи пари сил:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0, \quad \sum_{k}^{n} M_{ky} = 0, \quad \sum_{k}^{n} M_{kz} = 0. \quad (2.19)$$

Таким чином для рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення моменту сили відносно точки. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
2. Чому дорівнює момент сили відносно осі. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
3. Який зв’язок між моментом сили відносно осі та векторним моментом сили відносно точки на осі?
4. Що таке пара сил. Чому дорівнює момент пари сил?
5. Які еквівалентні перетворення пар сил ви знаєте?
6. Коли використовується алгебраїчне значення моменту пари сил?
7. Назвіть умови рівноваги системи пар сил?

ГЛАВА III
ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ І УМОВИ ЇЇ РІВНОВАГИ

Однією з основних задач статики є приведення до найпростішого виду довільної прикладеної до твердого тіла системи сил. Здійснюють таке еквівалентне перетворення застосовуючи так звану лему (інколи її трактують як теорему) про паралельне перенесення сили.

§ 1. Приведення сили до заданого центра

Лема. *Статичний стан твердого тіла не зміниться, якщо прикладену до нього силу перенести паралельно самій собі в будь-яку іншу його точку (точку приведення), і при цьому додати пару сил (приєднану пару), момент якої дорівнює моменту сили, яка переноситься, відносно точки приведення.*

Нехай в точці A тіла прикладена силу $\vec{F}$ (рис. 3.1, а). Виберемо в тілі довільно точку B і прикладемо в ній зрівноважену систему сил $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$, де $\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$. Тоді $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$. Систему цих трьох сил можна розглядати як одну силу $\vec{F}'$, яка дорівнює силі $\vec{F}$, та пару сил $(\vec{F}, \vec{F}'')$ (рис. 3.1, *б*), момент якої

$$\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B\left(\vec{F}\right) = \vec{M},$$

тобто момент цієї пари дорівнює моменту сили $\vec{F}$ відносно точки приведення B.

Лема доведена.

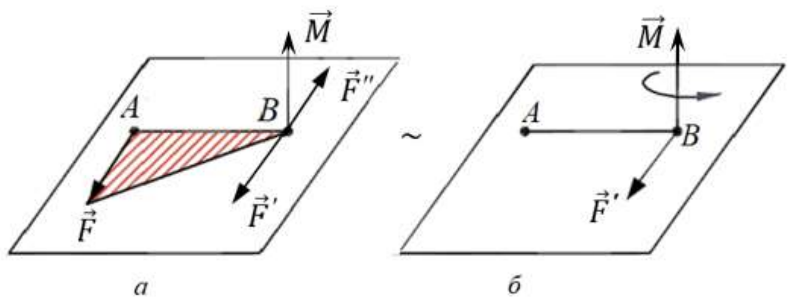


Рис. 3.1

§ 2. Теорема про приведення довільної системи сил до заданого центра (основна теорема статики)

Перш ніж приступити до основної теореми статики введемо поняття про головний вектор і головний момент довільної системи сил.

Нехай задана довільна система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$), яка діє на тверде тіло.

Головним вектором системи сил називається вектор, який дорівнює геометричній сумі всіх сил, що входять у систему. Тобто для цієї системи n сил маємо

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{3.1}$$

Головним моментом системи сил відносно точки O (центра зведення) називають геометричну суму моментів всіх сил системи відносно даного центра. Тобто

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k). \tag{3.2}$$

Доведемо основну теорему статики використовуючи лему про паралельне перенесення сили.

Ця теорема складається з двох частин:

1) *будь-яку систему сил можна замінити однією силою, яка дорівнює головному вектору системи і прикладена в деякій точці (центрі приведення) та парою сил, момент якої дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення;*
2) *будь-яка система сил може бути замінена в загальному випадку двома мимобіжними силами, одна з яких дорівнює головному вектору системи і прикладена в центрі приведення, а інша – в певній точці.*

Перша частина сформульованої теореми називається теоремою Пуансо. Доведемо її.

Нехай система сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right)$, які прикладені в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 3.2, а), діє на тверде тіло. Перенесемо кожну із сил системи в деяку точку O, яку приймаємо за центр приведення, і згідно з лемою про паралельне перенесення сили добавимо відповідні приєднані пари сил. Внаслідок цього одержимо (рис. 3.2, б):

- систему збіжних сил $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots, \vec{F}'_n)$, прикладених в точці O, де
$$\vec{F}'_k = \vec{F}_k$$
- систему приєднаних пар сил, моменти яких $\left(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_n\right)$, де
$$\vec{M}_k = \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right).$$

Замінимо (рис. 3.2,) систему збіжних сил рівнодіючою

$$\vec{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k,$$

яка дорівнює головному вектору системи. Систему приєднаних пар сил замінимо однією парою з моментом

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right),$$

який дорівнює головному моменту заданої системи сил відносно центра приведення O.

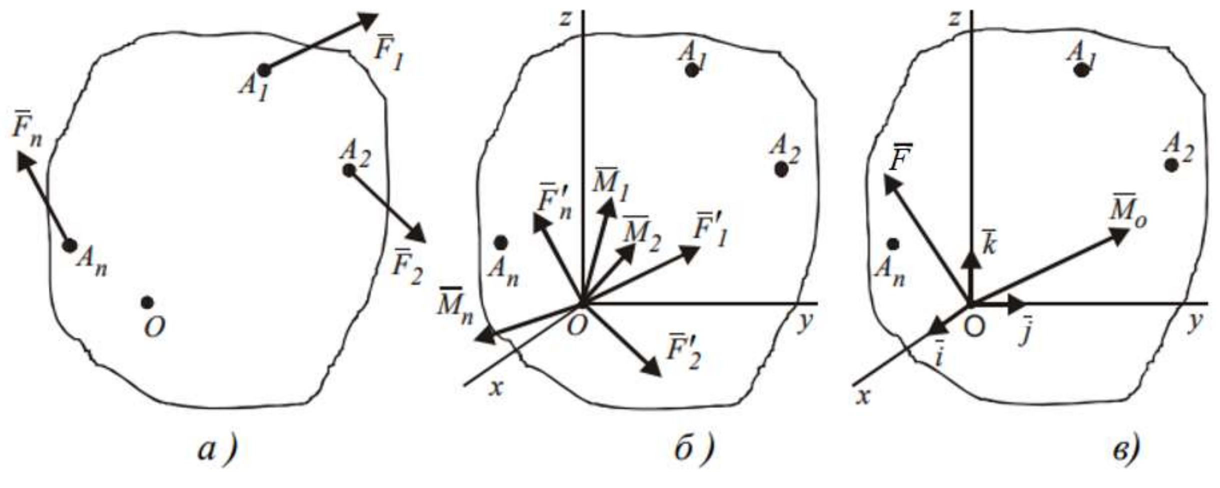


Рис. 3.2

Таким чином ми одержали, що $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right) \sim \left(\vec{F}_O, \vec{M}_O\right)$. Отже, теорема доведена.

Для того, щоб довести другу частину теореми, припустимо, що задана система сил еквівалентно перетворена відповідно до першого формулювання теореми. Нехай $\vec{F}_O$ − головний вектор цієї системи сил і $\vec{M}_O$ − її головний момент, які прикладені в точці O і в загальному випадку направлені під деяким кутом одне до другого (рис. 3.3). Замінимо момент $\vec{M}_O$ відповідною парою сил $(\vec{P}, \vec{P}')$, вибираючи величину кожної з сил пари і плече h так, щоб момент цієї пари був рівний величині головного моменту M_O. Складаючи сили $\vec{F}_O$ і $\vec{P}$, прикладені в точці O, за правилом паралелограма, дістанемо нову систему сил $(\vec{Q}, \vec{P}')$, яка еквівалентна системі $(\vec{F}_O, \vec{M}_O)$. Так як сила $\vec{F}_O$ в загальному випадку не належить площині N, то і сила $\vec{Q}$ теж їй не належить, тобто сили $\vec{Q}$ і $\vec{P}'$ є мимобіжними.

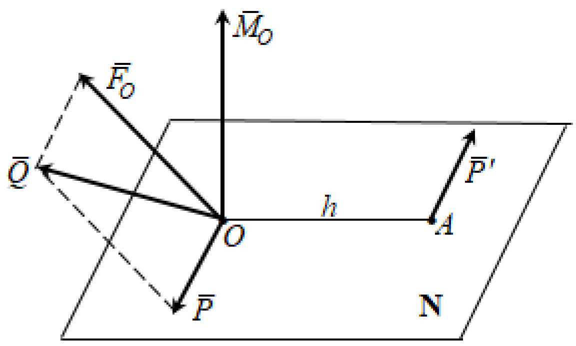


Рис. 3.3

§ 3. Аналітичні формули для обчислення головного вектора і головного моменту

Нагадаємо векторні формули для головного вектора та головного моменту системи сил

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \;\; \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k).$$

Аналітично значення $\vec{F}$ та $\vec{M}_O$ розраховують за їх проекціями на координатні осі:

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}; \;\; \vec{M} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k}, \tag{3.3}$$

де проекції на осі координат головного вектора і головного моменту системи відносно центра O визначаються за відомими формулами (розд.1.5):

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},\; F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky},\; F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \tag{3.4}$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k),\; M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k),\; M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k). \tag{3.5}$$

За відомими проекціями визначають модуль головного вектора і його напрямок:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$
$$cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{\imath}}\right) = \frac{F_x}{F}, cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{\jmath}}\right) = \frac{F_y}{F}, cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{k}}\right) = \frac{F_z}{F}, \tag{3.6}$$

та модуль головного моменту і його напрямок:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$
$$cos\left(\widehat{\vec{M},\vec{\imath}}\right) = \frac{M_x}{M}, cos\left(\widehat{\vec{M},\vec{\jmath}}\right) = \frac{M_y}{M}, cos\left(\widehat{\vec{M},\vec{k}}\right) = \frac{M_z}{M}. \quad (3.7)$$

Порівнюючи формули (3.4, 3.6) з раніше одержаними формулами (1.9, 1.10, 1.11), бачимо, що головний вектор будь-якої системи сил і рівнодійна збіжної системи сил обчислюються за однаковими формулами. Однак ці величини не ідентичні, так як головний вектор системи не завжди еквівалентний цій системи сил.

§ 4. Випадки приведення просторової системи сил до заданого центра

Розглянемо, які випадки можуть виявитися в результаті приведення довільної системи сил до заданого центра O.

1) Нехай в результаті приведення ми отримали $\vec{F}_O = 0$, а $\vec{M}_O \neq 0$. Тоді система зводиться лише до пари сил, момент $\vec{M}_O$ якої дорівнює головному моменту системи. У цьому випадку значення головного моменту системи не залежить від вибору центра O.

2) Якщо в результаті зведення виявиться що $\vec{F}_O \neq 0$, а $\vec{M}_O = 0$, то система сил зводиться лише до рівнодійної, яка дорівнює головному вектору системи і лінія дії її проходить через центр приведення O.

3) Якщо в результаті приведення знайдемо, що $\vec{F} \neq 0$ та $\vec{M}_O \neq 0$, то в залежності від взаємного положення цих векторів можуть бути такі випадки:

а) головний вектор і головний момент перпендикулярні один до одного ($\vec{F} \perp \vec{M}_O$)– така система зводиться лише до рівнодійної, яка дорівнює головному вектору $\vec{F}$, причому лінія дії її не проходить через центр приведення O (рис. 3.4). Дійсно в цьому випадку (рис. 3.4, а) пару сил, зображену вектором $\vec{M}_O$, можна представити силами $(\vec{F}', \vec{F}'')$, які лежать у площині головного вектора $\vec{F}$ та по модулю дорівнюють йому (рис.3.4, б). Очевидно плече пари $(\vec{F}', \vec{F}'')$ повинно дорівнювати $d = OO_1 = {M_O}/_{F}$. Якщо розмістити сили пари так, щоб вони були паралельні головному вектору $\vec{F}$, і щоб одна з сил цієї пари $\vec{F}''$ була направлена по цій же лінії, що і сила $\vec{F}$, то система $(\vec{F}, \vec{F}'')$ буде зрівноваженою і ми можемо відкинути цю систему сил $(\vec{F}, \vec{F}'')\sim 0$. Тоді дана система сил заміниться однією рівнодійною силою $\vec{F}' = \vec{F}$ (рис. 3.4, в), яка проходить через точку O_1, зміщену від центра приведення O на відстань d.

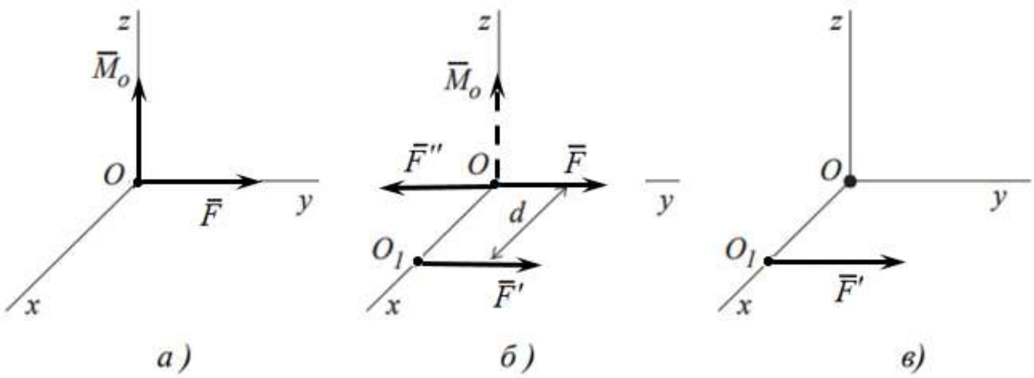


Рис. 3.4

б) якщо головний вектор і головний момент паралельні, то така система сил зводиться до сили $\vec{F}$ та пари сил $(\vec{P}, \vec{P}')$, яка лежить в перпендикулярній площині до головного вектора $\vec{F}$ (рис. 3.5, б). Так як вектор моменту пари вільний вектор, то його можна направити вздовж цієї лінії, вздовж якої направлений головний вектор (рис. 3.5, а). Така сукупність сили і пари сил називається *динамічним гвинтом* (*динамою)*, а лінія, вздовж якої напрямлений головний вектор та головний момент системи (рис. 3.5, а) – називається *віссю динами*, яка проходить через центр приведення O.

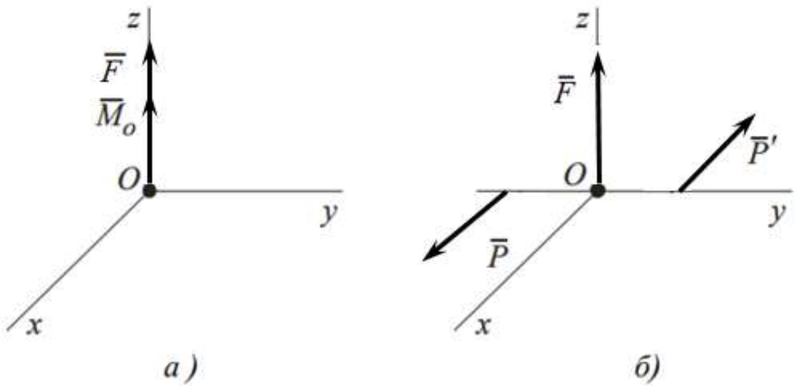


Рис. 3.5

в) головний вектор і головний момент системи довільно направлені в просторі (не перпендикулярні і не паралельні) (рис. 3.6) – система сил зводиться до динами, вісь якої не проходить через центр *O*.

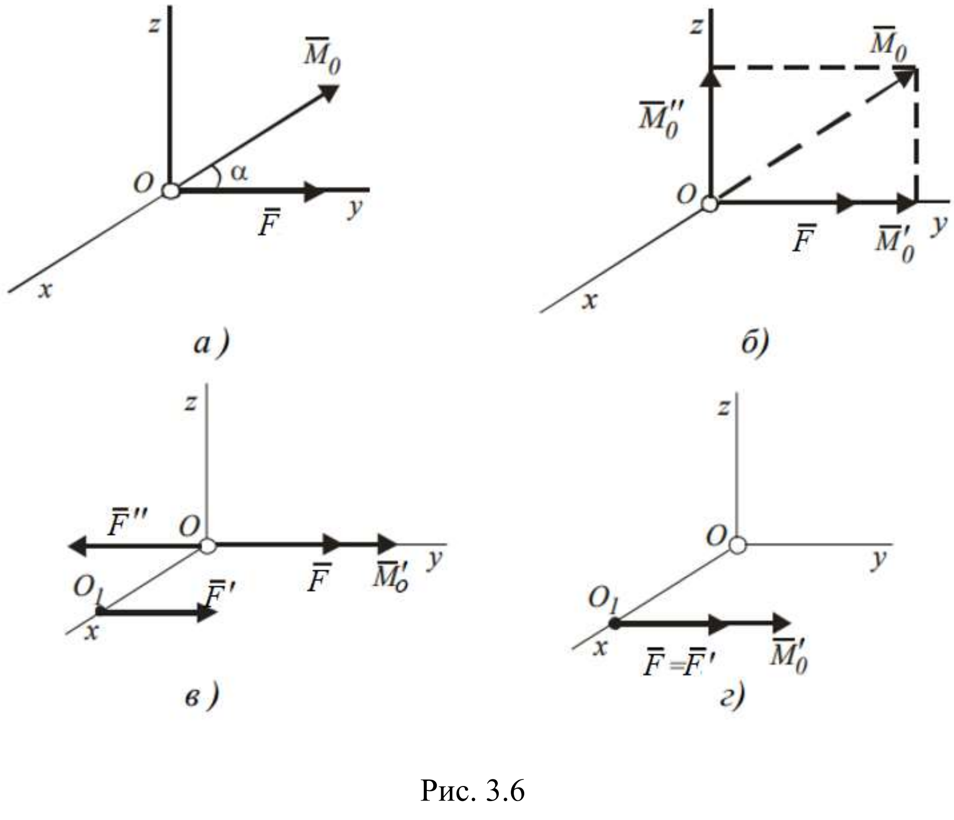


Рис. 3.6

Перехід від випадку (рис. 3.6, а) до динамічного гвинта зі зміщеною віссю (рис. 3.6, г) здійснюється розкладом вектора $\vec{M}_O$ на $\vec{M}_O'$ і $\vec{M}_O''$ (рис. 3.6, б), і подальшою заміною вектора $\vec{M}_O''$ парою сил $(\vec{F}', \vec{F}'')$, плече якої

$$OO_1 = \frac{M_O''}{F},$$

а сили пари за величиною рівні головному вектору (рис. 3.6, в). Дальше відкидаємо зрівноважену системи сил $(\vec{F}, F'')\sim 0$, і переносимо вектор $\vec{M}_O'$ в точку O_1 як вільний вектор (рис. 3.6, г).

4) Якщо головний вектор і головний момент системи дорівнюють нулю $\vec{F} = 0$ і $\vec{M}_O = 0$, то така система сил знаходиться у рівновазі.

§ 5. Рівновага довільної просторової системи сил та просторової системи паралельних сил

В попередньому розділі ми встановили, що *для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор цієї системи сил та її головний момент відносно довільного центра приведення дорівнювали нулю*

$$\vec{F} = 0; \ \vec{M}_O = 0. \tag{3.8}$$

Вектори $\vec{F}$ та $\vec{M}_O$ дорівнюють нулю тільки тоді, якщо їхні проекції на кожну з осей координат дорівнюють нулю, тобто коли $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$; $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = 0$. Враховуючи формули (3.4), (3.5) ці шість рівнянь справедливі тоді, коли діючі сили задовольняють умовам:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Отже, *для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил системи на кожну з осей координат та суми моментів всіх сил системи відносно кожної з осей дорівнювали нулю*. З умов рівноваги (3.9) отримують умови рівноваги більш простих систем сил. Якщо всі сили просторової системи паралельні між собою, то можна вибрати осі координат таким чином, щоб одна вісь, наприклад Oz, була паралельна напрямкам сил (рис. 3.7). Тоді проекції всіх сил на осі Ox та Oy і їх моменти всіх сил відносно осі Oz дорівнюють тотожно нулю. Якщо у формулах (3.9) відкинути ці рівняння, які виконуються тотожно, одержимо рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0; \ \ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0. \tag{3.10}$$

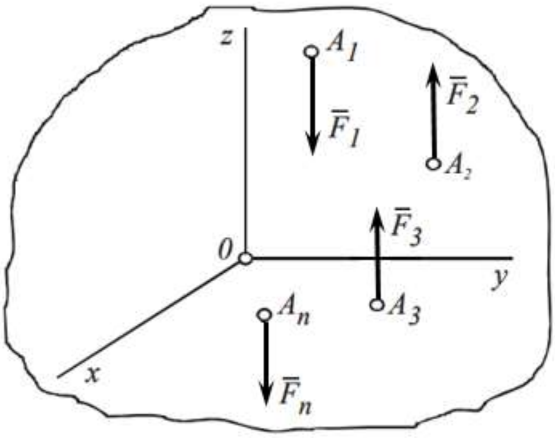


Рис. 3.7

Таким чином, *просторова система паралельних сил знаходиться в рівновазі тоді і тільки тоді, коли сума проекцій всіх сил на паралельну до них вісь, та сума моментів всіх сил відносно двох інших координатних осей дорівнюють нулю.*

§ 6. Теорема Варіньона про момент рівнодійної

Якщо деяка система сил приводиться до рівнодійної, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів всіх сил цієї системи відносно цієї ж точки.

Нехай маємо систему сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right)$, рівнодійна якої $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ прикладена в точці A (рис. 3.8). Додаємо до цієї системи зрівноважуючу силу $\vec{R}' = -\vec{R}$, яку прикладаємо в тій же точці A, і одержимо еквівалентну нулю систему сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{R}'\right) \sim 0$. Головний момент зрівноваженої системи сил відносно довільної точки O дорівнює нулю

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) + \vec{M}_O\left(\vec{R}'\right) = 0 \tag{3.11}$$

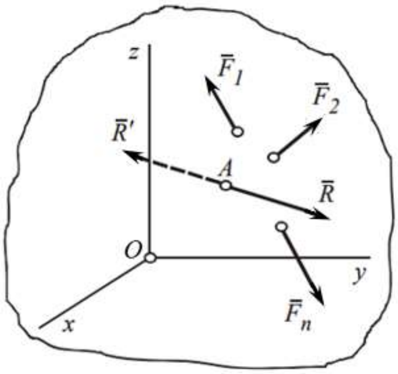


Рис. 3.8

Так як $\vec{R}'$ і $\vec{R}$ дві рівні і протилежно направлені вздовж однієї прямої сили, то $\vec{M}_O\left(\vec{R}'\right) = -\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)$. Враховуючи це із виразу (3.11), одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) - \vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = 0,$$

звідки випливає

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right). \tag{3.12}$$

Теорема доведена.

Легко показати, щ теорема Варіньона справедлива також для моментів сил відносно осей координат. Дійсно, проектуючи векторний вираз (3.12) на координатні осі, одержимо:

$$M_x\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right),\ \ M_y\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right),\ \ M_z\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right), \tag{3.13}$$

тобто *момент рівнодійної деякої системи сил відносно будь-якої осі дорівнює сумі моментів сил цієї системи відносно цієї осі.*

На практиці теорему Варіньона використовують для обчислення моменту сили відносно точки чи осі таким чином. Розкладають силу на складові, і момент цієї сили відносно точки чи осі заміняють сумою моментів складових цієї сили відносно точки чи осі.

§ 7. Розв’язування задач на рівновагу тіл під дією просторової системи сил

Розв’язуючи задачі на рівновагу твердого тіла, яке знаходиться під дією просторової системи сил, потрібно дотримуватись алгоритму, наведеного в *§* 8 глави 1. При цьому задача статично визначена тоді, коли кількість невідомих величин становить не більше шести у випадку довільної просторової системи сил, і не більше трьох – у випадку просторової системи паралельних сил.

Приклад 3.1. На горизонтальний вал (рис. 3.9), що лежить у підшипниках A і B, діє вантаж вагою $Q = 25H$, прив’язаний тросом до шківа C радіусом $r = 0.2$м. Вантаж вагою $P = 100H$, насаджений на стрижень ED, незмінно зв’язаний з валом AB. Дано розміри: $AC = 0.2$м, $CD = 0.7$м, $BD = 0.1$м. У стані рівноваги стрижень ED відхилений від вертикалі на кут 30°. Визначити відстань l центра ваги вантажу вагою P від осі вала AB, та реакції підшипників A і B.

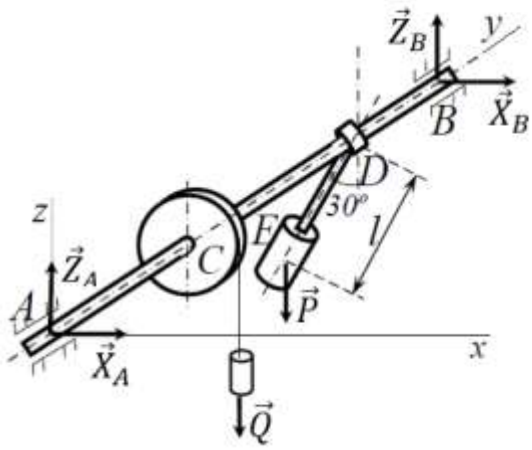


Рис. 3.9

Розв’язання. Розглянемо рівновагу валу, на який діють активні сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$. В’язями для валу є підшипники A і B. За аксіомою про в’язі, звільняємо вал від в’язей і замінюємо їхню дію реакціями $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$, що лежать у площинах, перпендикулярних до осі підшипників A і B. Виберемо систему координат, як показано на рис. 3.9. Невідомі реакції $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ розкладаєм о на складові $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$ (рис. 3.9), які треба визначити. Для розв’язання задачі скористаємось умовами рівноваги (3.9). Так як всі сили активні і реактивні лежать в перпендикулярних до осі валу площинах, друга умова рівноваги виконується тотожно (проекції всіх сил на вісь Ay дорівнюють нулю). З п’яти решти умов рівноваги потрібно визначити п’ять невідомих величин: $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, l -$ задача статично визначена.

Щодо заданої задачі умови рівноваги (3.9) мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + X_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = Z_A + Z_B - P - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F_i}) = -Q \cdot AC - P \cdot (AC + CD\ ) + Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F_i}) = Q \cdot r - Plsin30^{\circ} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F_i}) = -X_B \cdot AB = 0.$$

Звідси

$$X_A = X_B = 0; l = \frac{Qr}{Psin30^{\circ}} = \frac{25 \cdot 0.2}{100 \cdot 0.5} = 0.1\text{м};$$
$$Z_B = \frac{1}{AB}[Q \cdot AC + P(AC + CD)] = 25 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.9 = 95H;$$
$$Z_A = P + Q - Z_B = 100 + 25 - 95 = 30H.$$

Приклад 3.2

За допомогою ворота, схематично зображеного на рис. 3.10, утримується вантаж $Q = 1000H$. Радіус барабана $R = 0{,}05$м, довжина рукоятки KD = 0,4м, відстані AD = 0,3м, AC = 0,4м, CB = 0,6м. Шнурок сходить з барабана за дотичною, нахиленою до горизонту під кутом 60°. Визначити тиск P на рукоятку і реакції опор A і B в тому положенні ворота, коли рукоятка KD горизонтальна.

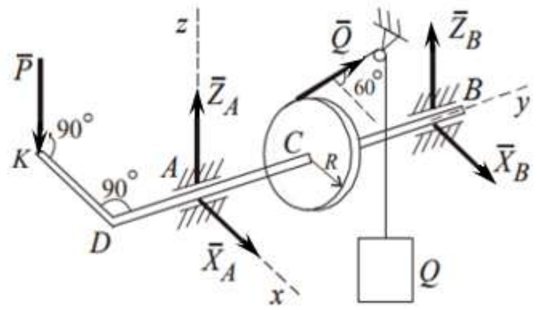


Рис. 3.10

Розв'язання. Розглянемо рівновагу ворота, на який діють активні сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$. Силу $\vec{Q}$ прикладаємо до ворота в точці, де вірьовки збігає з ворота і направляємо її вздовж вірьовки. Зауважимо, що сила $\vec{Q}$ за величиною дорівнює вазі підвішеного вантажу Q, якщо блок, через який перекинутий шнурок, ідеальний, тобто на ньому відсутнє тертя. Підшипники A і B є в'язями для ворота. Реакції цих в'язей $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ представимо складовими X_A і Z_A та X_B і Z_B, розміщеними в перпендикулярних до осі підшипників площинах. Складаємо рівняння рівноваги (3.9) для цієї системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \ X_A + X_B + Qcos60° = 0;\ \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \ 0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\ \ Z_A + Z_B + Qsin60° - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ P \cdot DA + Qsin60° \cdot AC + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\ -P \cdot KD + Q \cdot R = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0;\ -Qcos60° \cdot AC - X_B \cdot AB = 0;$$

При обчисленні моментів сили $\vec{Q}$ відносно осей *Ax* та *Az* застосована теорема Варіньона, згідно з якою момент сили $\vec{Q}$ замінили сумою моментів складових $\vec{Q}_x$ та $\vec{Q}_z$. Чисельні значення цих складових такі: $Q_x = Qcos60°$, $Q_z = Qsin\,60°$. Момент відносно осі Ax дає тільки складова $\vec{Q}_z$, оскільки складова $\vec{Q}_x$ паралельна осі *Ax*, а відносно осі *Az* дає момент тільки складова $\vec{Q}_x$. Розв'язуючи отримані рівняння, знайдемо:

$$P = \frac{Q \cdot R}{KD} = 125H;$$

$$X_B = \frac{-Qcos60° \cdot AC}{AB} = -200H;$$

$$Z_B = -\frac{P \cdot DA + Qsin60° \cdot AC}{AB} = -384H;$$

$$X_A = -X_B - Qcos60° = -300H;$$
$$Z_A = -Z_B - Qsin60° + P = -357H.$$

Приклад 3.3

Однорідна прямокутна рама вагою $G = 200H$ кріпиться до стіни за допомогою шарового шарніра A і циліндричного шарніра (петлі) B, і утримується в горизонтальному положенні вірьовкою DH, яка прив'язана в точці D до рами, та до вбитого в стіну на одній вертикалі з петлею B гвіздка H (рис. 3.11). В точці E на раму діє сила $Q = 400H$, направлена вздовж *CE*. Обчислити натяг вірьовки DH і опорні реакції в точках A і B, якщо розміри рами a = 0,8м; b = 0,4м; c = 0,8м, а вірьовка утворює з площиною рами кут $\alpha\ =\ 30°$.

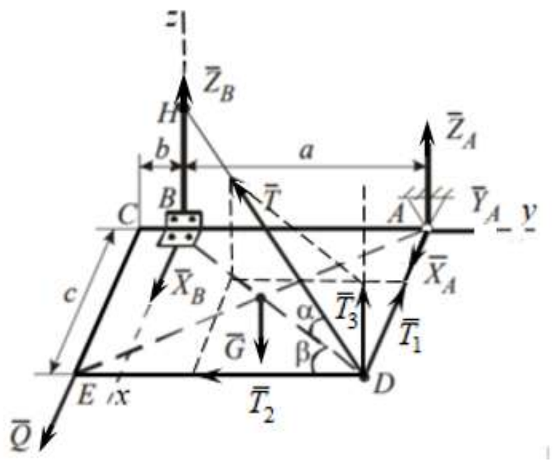


Рис. 3.11

Розв'язання. На раму діють активні сил $\vec{G}, \vec{Q}$ та реакцій $\vec{X}_A,\ \vec{Y}_A,\ \vec{Z}_A$ шарового шарніра, $\vec{X}_B,\ \vec{Z}_B$ петлі та реакція $\vec{T}$ вірьовки *DH*. Рама повинна знаходитися в рівновазі під дією всіх цих сил. Ця система сил – довільна просторова система, рівняння рівноваги якої (3.9). Задача статично визначена, так як кількість невідомих співпадає з кількістю рівнянь рівноваги Напишемо рівняння рівноваги задачі:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \ X_A + X_B + Q - Tcos\alpha \cdot sin\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \ Y_A - Tcos\alpha \cdot cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\ \ Z_A + Z_B - G + Tsin\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ Z_A \cdot a + Tsin\alpha \cdot a - G \cdot \frac{a-b}{2} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\ G \cdot \frac{c}{2} - Tsin\alpha \cdot c = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0;\ Q \cdot b - X_A \cdot a = 0.$$

З метою спрощення складання рівнянь сила $\vec{T}$ розкладалась на три складові $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ (рис. 3.11), величини яких дорівнюють $T_1 = Tcos\alpha \cdot sin\beta,\ T_2 = Tcos\alpha \cdot cos\beta,\ T_3 = Tsin\alpha$. Зауважимо, що величини цих складових не дорівнюють проекціям сила $\vec{T}$ на координатні осі.

Згідно з теоремою Варіньона момент сили $\vec{T}$ відносно будь-якої з осей дорівнює сумі моментів складових цієї сили відносно цих осей. Складові $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ лежать в одній площині з осями *Bx* і *By* і тому в рівняння моментів відносно цих осей вони не входять. Момент сили $\vec{T}$ відносно осі *Bz* дорівнює нулю, так як лінія дії цієї сили перетинає вісь *Bz*. В результаті розв'язування отриманої системи рівнянь, знайдемо:

$$T = \frac{G}{2sin\alpha} = 200H;$$

$$X_A = \frac{Q \cdot b}{a} = 100H;$$

$$X_B = -X_A - Q + Tcos\alpha \cdot sin\beta = -377{,}55H;$$

$$Z_A = -Tsin\alpha + G \cdot \frac{a-b}{2a} = 75H;$$

$$Y_A = Tcos\alpha \cdot cos\beta = 122{,}45H;$$

$$Z_B = -Z_A + G - Tsin\alpha = 25H.$$

Приклад 3.4

Замурований в стіну в точці A криволінійний стержень ABD знаходиться під дією сили $\vec{F}$, прикладеною в точці D під кутом α до горизонту. Довжина ділянки AB дорівнює l і кут DAB дорівнює φ (рис. 3.12). Знайти реакції защемлення в точці A.

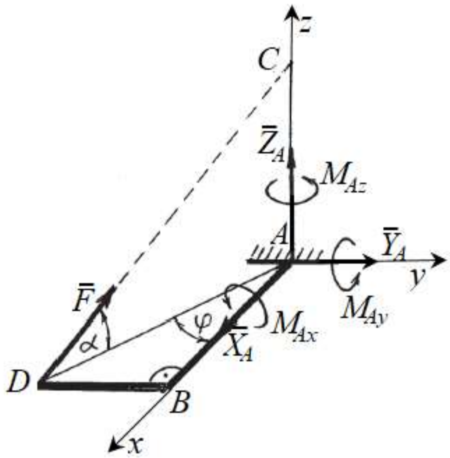


Рис. 3.12

Розв'язання. Розглянемо рівновагу стержня ABD. Стержень знаходиться під дією однієї активної сили $\vec{F}$. Стержень не вільний так як він замурований в стіну. Звільнившись від защемлення ми повинні прикласти до частини стержня, яка була замурована, деяку складну систему сил реакцій. В результаті приведення цієї системи сил до точки A дістанемо одну реактивну силу і реактивну пару сил. Напрямок реактивної сили невідомий і тому розкладаємо її на три складові $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$. Напрямок реактивного моменту невідомий і його також розкладаємо на складові M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} (рис. 3.12). Рівняння рівноваги отриманої просторової системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; X_A - Fcos\alpha \cdot cos\varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; Y_A + Fcos\alpha \cdot sin\varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\; Z_A + Fsin\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\; M_{Ax} - Fsin\alpha \cdot l \cdot tg\varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\; M_{Ay} - Fsin\alpha \cdot l = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0;\; M_{Az} = 0.$$

В результаті розв'язування цієї системи рівнянь дістанемо

$$X_A = Fcos\alpha \cdot cos\varphi;\ Y_A = -Fcos\alpha \cdot sin\varphi;\ Z_A = -Fsin\alpha.$$

$$M_{Ax} = Fsin\alpha \cdot lsin\varphi;\ M_{Ay} = Fsin\alpha \cdot l;\ M_{Az} = 0.$$

$$R_A = \sqrt{(X_A)^2 + (Y_A)^2 + (Z)^2} = F;\ M_A = Fl\frac{sin\alpha}{cos\varphi}.$$

Приклад 3.5

Дві однорідні прямокутні плити, зварені під прямим кутом одна з другою, закріплені в точках A і B циліндричними шарнірами (підшипниками), в точках C і E невагомими стержнями 1 і 2 (рис. 3.13). Стержні прикріпленні до плит і до нерухомих опор шарнірами.

Розмір плит в напрямках, паралельних координатним осям x, y, z рівні $2a, 3a$ і a; вага меншої плити $P_1 = 2$ кН, вага більшої плити $P_2 = 3$ кН. Кожна з плит розташована паралельно одній з координатних площин (площина xy горизонтальна).

На плити діють пара сил з моментом M = 4 кН·м, що розташована в одній з плит, та три сили, величини яких $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН, $F_3 = 30$ кН, їхні напрямки і точки прикладання вказані на рисунку. Сила $\vec{F}_1$ лежать в площині, паралельній площині yz, сила $\vec{F}_2$ – в площині, паралельній xz, і сила $\vec{F}_3$ – в площині, паралельній xy. Точки прикладання сил знаходяться в серединах сторін плит.

Визначити реакції в'язей в точках A і B та реакцію стержнів. При підрахунках прийняти a = 0,6 м.

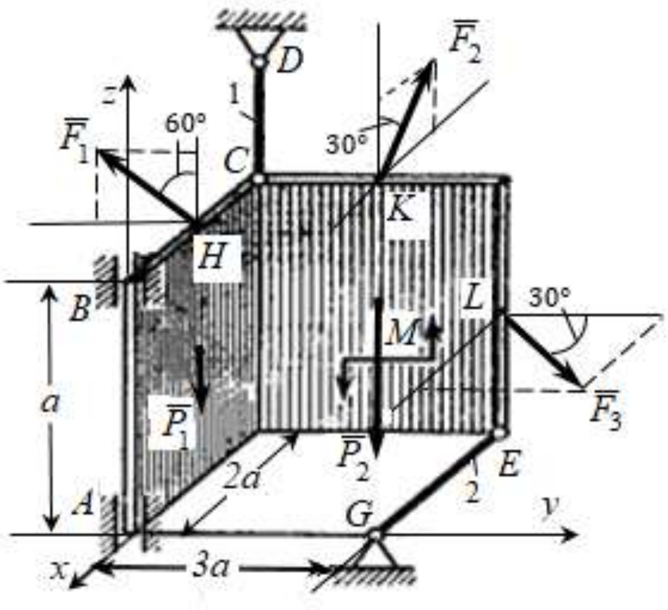


Рис. 3.13

Розв'язання. Розглянемо рівновагу плит. На плити діють задані сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, пара сил з моментом M, сили ваги плит $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ та реакції в'язей. Реакції ідеальних стержнів $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ направляємо вздовж стержнів в напрямку від тіл, рівновагу яких розглядаємо (рис. 3.14). Реакції циліндричних шарнірів в точках A і B розкладаємо кожну на дві складові $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ та $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ (у площині, перпендикулярній осі підшипників).

Для визначення шести невідомих реакцій складаємо шість рівнянь рівноваги діючої на плити просторової системи активних і реактивних сил:

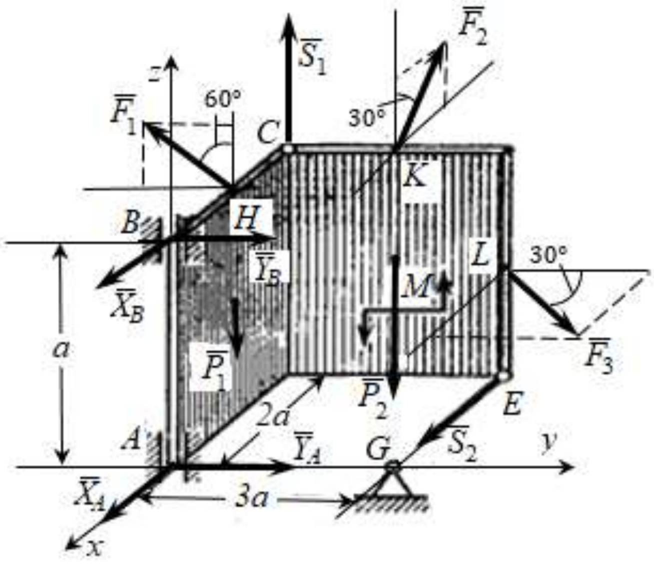


Рис. 3.14

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ X_A + X_B + S_2 + (F_3 - F_2) sin30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ Y_A + Y_B + (F_3 - F_1)\cos 30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\ S_1 + F_1 cos60° + F_2 cos30° - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ -Y_B \cdot a + F_1\cos 30° \cdot a + (F_2\cos 30° - P_2) \cdot 1{,}5a - F_3\cos 30° \cdot 0{,}5a + M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\ (X_B + F_1 cos60° - P_1) \cdot a + (S_1 - P_2 + F_2 cos30°) \cdot 2a - F_2 sin30° \cdot a + \\ + F_3\cos 60° \cdot 0{,}5a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0;\ F_1\cos 30° \cdot a + F_2\cos 60° \cdot 1{,}5a - (F_3\cos 60° + S_2) \cdot 3a - F_3\cos 30° \cdot 2a = 0.$$

При визначенні моментів сил відносно осей користуємось теоремою Варіньйона, згідно з якою момент сили відносно осі дорівнює сумі моментів складових цієї сили відносно цієї осі. Момент пари сил входить тільки в рівняння суми моментів відносно осі x. Нагадаємо, що вектор моменту пари сил перпендикулярний до площини, в якій розміщена пара і направлений в ту сторону простору, звідки видно обертання парою в напрямку проти стрілки годинника. В нашому випадку вектор $\vec{M}$ паралельний до осі x і направлений в додатному напрямку цієї осі. Отже він проектується тільки на вісь Ax із знаком плюс.

Підставивши в рівняння рівноваги числові значення всіх заданих величин і розв'язавши ці рівняння, знайдемо шукані реакції:

$$X_A = 13{,}9 \text{ кН}, X_B = 5{,}5 \text{ кН}, Y_A = -41{,}1 \text{ кН}, Y_B = 23{,}8 \text{ кН}, S_1 = -17{,}32 \text{ кН}, S_1 = -24{,}4\text{кН}.$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Як звести довільну систему сил до заданого центра? Сформулюйте теорему Пуансо (основну теорему статики).
3. Як обчислити головний вектор і головний момент системи сил? Яка відмінність між головним вектором і рівнодійною системи сил, які діють на тверде тіло?
4. Назвіть випадки, коли просторова система сил зводиться до рівнодійної?
5. Назвіть випадки, коли просторова система сил зводиться до однієї пари сил?
6. Що таке динамічний гвинт ? Назвіть випадки, коли просторова система сил зводиться до динами?
7. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил та просторової системи паралельних сил.

ГЛАВА IV
ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

§ 1. Приведення плоскої системи сил до найпростішого виду

Якщо лінії дії всіх сил системи лежать в одній площині, то така система називається плоскою.

Плоску систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ згідно з основною теоремою статики можна привести в загальному випадку до однієї сили $\vec{R}$, яка дорівнює головному вектору системи сил і прикладена в довільно вибраному центрі приведення O, та до однієї пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту $\vec{M}_O$ системи. Головний вектор цієї системи лежить у цій же площині, що й сили. Приєднані пари сил також розміщені у цій площині і тому моменти їх складаються алгебраїчно. Отже для плоскої системи сил замість вектора головного моменту системи, направленого перпендикулярно площині розташування сил (рис. 4.1, а), використовують алгебраїчний головний момент M_O системи (рис. 4.1, б), який дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно центра приведення: $M_O = \sum M_O(\vec{F}_k)$.

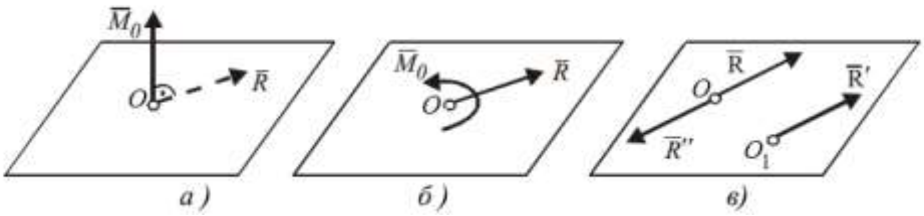


Рис. 4.1

У залежності від значень $\vec{R}$ та M_O можливі такі окремі випадки подальшого спрощення плоскої системи сил.

1) Коли $\vec{R} \neq 0$ і $M_O \neq 0$, то пару сил з моментом M_O можна замінити двома силами $\vec{R}'$ та $\vec{R}''$, вибравши їх так, щоб $\vec{R} = \vec{R}' = -\vec{R}''$ (рис. 4.1, в). Силу $\vec{R}''$ прикладемо у центрі приведення O і спрямуємо її протилежно силі $\vec{R}$. Тоді сила $\vec{R}'$ направлена так, як і сила $\vec{R}$ і буде прикладена в точці O_1, на відстані $OO_1 = d$. Відстань d знаходимо з умови $M_O = Rd$, звідки

$$d = \frac{M_O}{R}.$$

Зрівноважену систему сил $(\vec{R}, \vec{R}'')\sim 0$ можна відкинути, і в результаті приходимо до висновку: *у випадку, коли головний вектор і головний момент плоскої системи сил не дорівнюють нулю* $(\vec{R} \neq 0;\ M_O \neq 0)$*, то така система сил зводиться до рівнодійної* $\vec{R}$*, яка дорівнює головному вектору системи, і її лінія дії зміщена від попереднього центра зведення на відстань*

$$OO_1 = d = \frac{M_O}{R}. \tag{4.1}$$

2) Якщо головний вектор $\vec{R} \neq 0$, а головний момент $M_O = 0$, то система зводиться до рівнодійної, яка дорівнює головному вектору системи $\left(\vec{R} = \sum \vec{F}_k\right)$, і лінія дії рівнодійної проходить через центр приведення O.

3) Коли головний вектор системи $\vec{R} = 0$, а головний момент $M_O \neq 0$, то система сил зводиться тільки до пари сил з моментом $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$. Тоді значення $\vec{M}_O$ не залежить від положення центра приведення.

4) Якщо головний вектор $\vec{R} = 0$ і головний момент $\vec{M}_O = 0$, то система знаходиться в рівновазі.

§ 2. Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил та плоскої системи паралельних сил

Для рівноваги довільної плоскої системи сил (як і взагалі для довільної системи сил) необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи були рівними нулю:

$$\vec{R} = 0;\ \vec{M}_O = 0. \tag{4.2}$$

Величина головного вектора плоскої системи сил визначається залежностями:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};\quad R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}.$$

Отже головний вектор $\vec{R}$ дорівнює нулю тільки тоді, коли одночасно $R_x = 0$ і $R_y = 0$. Таким чином, умови рівноваги (4.2) виконуються тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_k\right) = 0. \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) є основною (або часто кажуть **першою**) формою аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил, які формулюються так: довільна плоска система сил врівноважується, якщо *суми проекцій всіх сил системи на координатні осі та алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно довільної точки на площині дії сил дорівнювали нулю* [2].

Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил можуть бути записані ще в двох інших формах.

Друга форма аналітичних умов рівноваги записується так:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \tag{4.4}$$

Вісь Ox при цьому не повинна бути перпендикулярною до AB.

Необхідність цих умов випливає з того, що при невиконанні будь-якої із рівностей (4.4) або головний вектор $\vec{R} \neq 0$, або головний момент $M_O \neq 0$, і рівноваги не буде.

Достатність умов (4.4) доводиться від протилежного. Допустимо, що перші два рівняння виконуються, але система сил не знаходиться в рівновазі s має рівнодійну $\vec{R} \neq 0$, лінія дії якої проходить через точки A і B. При такому допущенні третє рівняння не виконується, оскільки вісь *Ox* не перпендикулярна до *AB*. Отже останнє рівняння виконується тільки тоді, коли рівнодійна $\vec{R} = 0$, тобто має місце рівновага.

Третя форма умов рівноваги така:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad (A, B, C \to \Delta). \tag{4.5}$$

Точки A, B, C не повинні лежати на одній прямій.

Необхідність цих умов очевидна. Виходячи з того, що при виконанні всіх умов (4.5) привести систему до рівнодійної неможливо, так як лінія дії цієї рівнодійної повинна проходити через три точки *A*, *B* і *C*, які не розміщені на одній прямій. Звідси випливає достатність умов (4.5). Отже, при виконанні умов (4.5) має місце рівновага.

Якщо маємо плоску системи паралельних сил, то, спрямувавши вісь *Oy* паралельно силам системи, дістанемо, що проекції кожної з сил системи на вісь *Ox* будуть дорівнювати нулю. Тоді для плоскої системи паралельних сил залишаться дві форми умов рівноваги.

З першої форми умов рівноваги (4.3) отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k) = 0. \tag{4.6}$$

Другу форму умов рівноваги плоскої системи паралельних сил одержимо з рівнянь (4.4). *Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума моментів всіх сил системи відносно двох точок, які не лежать на паралельній до сил прямій, дорівнювали нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad AB \nparallel \vec{F}_k. \tag{4.7}$$

§ 3. Розподілене навантаження

Поряд з зосередженими силами, які прикладені до твердого тіла в деякій точці, в інженерних розрахунках зустрічаються сили, дія яких розподілена по певній ділянці об'єму тіла, або його поверхні чи лінії. Так як аксіоми і теореми статики формулюються для зосереджених сил, то ми повинні вміти замінити розподілене навантаження на зосереджені сили. Розглянемо найпростіші випадки, коли навантаження розподілене паралельними силами вздовж відрізка деякої прямої. Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю q, тобто величиною сили, що припадає на одиницю довжини навантаженого відрізка. Одиницею виміру інтенсивності є (Н/м). Інтенсивність може бути постійною (рівномірно розподілене навантаження) або змінюватись за лінійним або довільним законами.

У випадку рівномірно розподіленого навантаження (рис. 4.2, а) інтенсивність q постійна величина. Тоді розподілене навантаження замінюється зосередженою силою $\vec{Q}$, модуль якої

$$Q = q \cdot l, \tag{4.8}$$

l – довжина навантаженого відрізка.

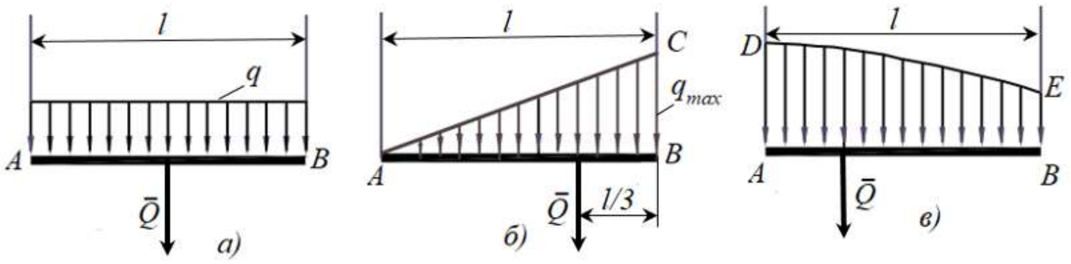


Рис. 4.2

Рівнодійна сила $\vec{Q}$ в цьому випадку направлена в цьому ж напрямку, що й сили розподіленого навантаження, і прикладена посередині навантаженого відрізка AB.

На практиці дуже часто використовується розподілене навантаження, інтенсивність якого змінюється за лінійним законом (рис. 4.2, б). Величина q інтенсивності зростає від нульового до найбільшого значення q_{max}. Рівнодійна $\vec{Q}$ такого навантаження визначається як вага трикутної однорідної пластинки *ABC*, яка пропорційна її площі, тобто за модулем:

$$Q = \frac{l \cdot q_{max}}{2}. \qquad (4.9)$$

Лінія дії сили $\vec{Q}$ проходить через центр площі трикутника *ABC* на відстані $2l/_3$ від його вершини A.

Прикладом дії сил, розподілених вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 4.2, в), є навантаження плоского перекриття купою піску. Рівнодійна $\vec{Q}$ таких сил за аналогією з силою ваги буде чисельно дорівнювати площі фігури *ABDE*, виміряної у відповідному масштабі, а лінія дії цієї рівнодійної проходитиме через центр площі цієї фігури.

В інженерній практиці часто зустрічається рівномірно розподілене навантаження вздовж дуги кола радіусом R (рис. 4.3, а). Знайдемо горизонтальну і вертикальну складові сумарної сили, яка діє на дугу. Для цього під кутом φ виберемо елемент дуги кола довжиною $Rd\varphi$ (рис. 4.3, б). На цей елемент діє сила $d\vec{Q}$, величина якої $dQ = qRd\varphi$. Горизонтальна складова цієї сили $qRd\varphi cos\varphi$. Горизонтальна складова сумарної сили буде

$$Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} qRcos\varphi \, d\varphi = 2qRsin\alpha.$$

Легко перевірити, що вертикальна складова сумарної сили дорівнює нулю. Таким чином сумарна сила, яка діє на дугу, направлена вздовж осі x і дорівнює (рис. 4.3, в).

$$Q = 2qRsin\alpha = hq.$$

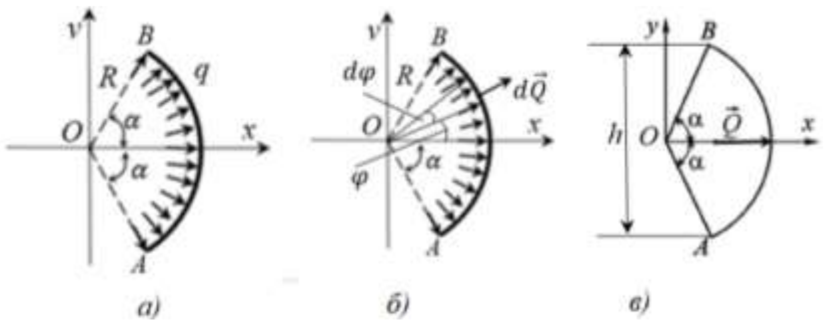


Рис. 4.3

§ 4. Розв'язування задач на рівновагу тіл під дією плоскої системи сил

Приклад 4.1

Однорідна балка AB (рис. 4.4, а) вагою $G = 1$ кH, до якої в точці D на відстані $AD = 0{,}75AB$ підвішений вантаж P вагою 2 кН, закріплена в точці A за допомогою нерухомого шарніра і утримується в стані рівноваги під кутом $\alpha = 45°$ до вертикалі закріпленою в точці B ниткою, перекинутою через нерухомий ідеальний блок E з підвішеним на її кінці вантажем Q. Визначити опорні реакції шарніра A та вагу вантажу Q, якщо нахил нитки до вертикалі складає кут $\beta = 30°$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки AB, на яку діють активні сили $\vec{G}$ і $\vec{P}$ та прикладена в точці B сила $\vec{Q}$, яка направлена вздовж нитки (див. рис. 4.4, б) [2].

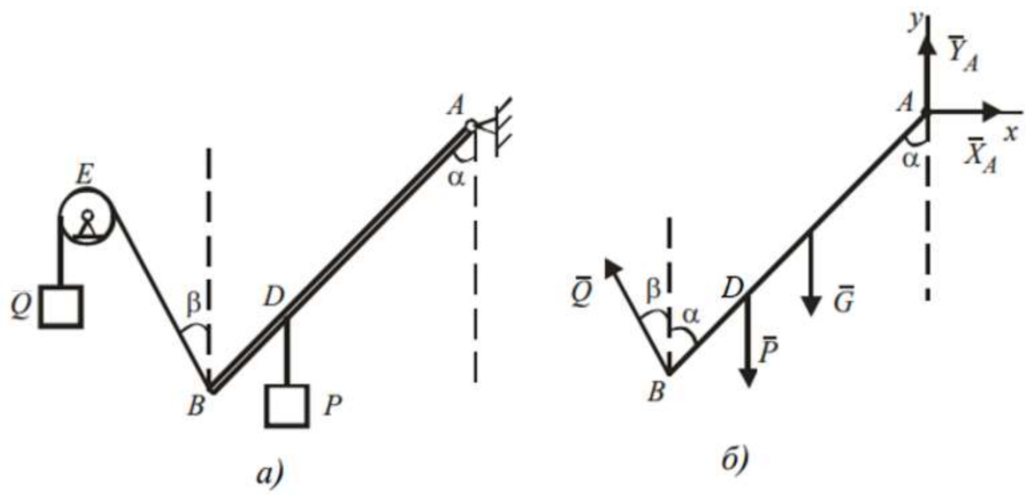


Рис. 4.4

Реакцію нерухомого циліндричного шарніра в точці A замінимо двома складовими $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$. Для зрівноваженої довільної плоскої системи сил $\left(\vec{G}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A\right) \sim 0$ складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A - Q\sin\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A - G - P + Q\cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \quad \left(G \cdot \frac{AB}{2} + P \cdot AD\right)\sin\alpha - Q\sin(\alpha + \beta) \cdot AB = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо

$$Q = \frac{(G \cdot 0{,}5AB + P \cdot AD)\sin\alpha}{AB\sin(\alpha + \beta)} = 1{,}46(\text{к}H);$$

$$X_A = Q\sin\beta = 0{,}73(\text{к}H);$$
$$Y_A = G + P - Q\cos\beta = 1{,}73(\text{к}H).$$

Приклад 4.2

Балка AB вагою $P = 5$кН, шарнірно закріплена в точці A і опирається в точці B за допомогою катка на горизонтальну направляючу (рис.4.5, *а*). На балку діє зосереджена сила $F = 8$кН під кутом $30°$ до осі балки, та рівномірно розподілене на ділянці CB навантаження інтенсивністю $q = 2\ ^{\text{кН}}/_{\text{м}}$. Знайти реакції опор в точках A і B, якщо $a = 1.5$м.

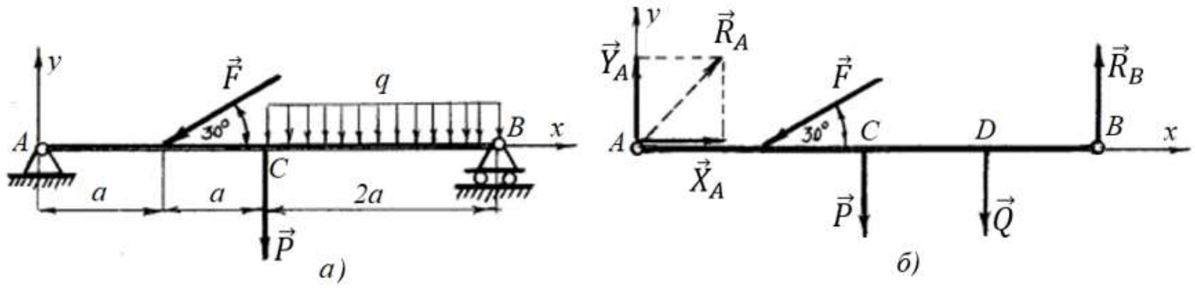


Рис. 4.5

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки AB. Прикладаємо до балки активні сили $\vec{F}$ і $\vec{P}$. Розподілене навантаження заміняємо зосередженою силою $\vec{Q}$, прикладеною в центрі його ваги і рівною $Q = q \cdot 2a = 6$кН (рис 4.5, *б*). Балка не вільна, так як на неї накладені в'язі в точках A і B. Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей відкинемо в'язі, а їхню дію на балку замінимо реакціями. В точці B ідеально гладке обпирання, реакція якого $\vec{R}_B$ направлена по нормалі до поверхні обпирання. В точці A нерухомий циліндричний шарнір. Реакція такої опори проходить через точку A перпендикулярно до осі шарніра. Так як напрямок реакції $\vec{R}_A$ не відомий, розкладаємо її на горизонтальну $\vec{X}_A$ і вертикальну $\vec{Y}_A$ складові (рис.4.5 *б*). Балка повинна знаходитись в рівновазі під дією активних і реактивних сил. Отримана система сил – довільна плоска система сил. Напишемо її умови рівноваги. Вибираємо систему координат, як показано на рисунку. Використаємо умови рівноваги у формі (3.18).

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A - F\cos 30° = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - F\sin 30° - P - Q + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = -F\sin 30° \cdot a - P \cdot 2a - Q \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0.$$

В якості точки моментів в останньому рівнянні вибрали точку *A,* так як в ній перетинаються дві невідомі сили і вони в це рівняння не ввійдуть. Розв'язуємо отриману систему рівнянь.

$$X_A = F\cos 30° = 6.93\text{кН}.$$

$$R_B = \frac{1}{4}(F\sin 30° + 2P + 3Q) = 8\text{кН}.$$

$$Y_A = F\sin 30° + P + Q - R_B = 7\text{кН}.$$

Маючи складові X_A і Y_A можемо знайти реакцію R_A та її напрямок.

Приклад 4.3

Визначити реакції Т-подібної жорстко закріпленої балки, зображеної на рис. 4.6, а, яка знаходиться в стані рівноваги під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності $q = 5$ кH/м, зосередженої сили $F = 10$ кH, прикладеної в точці E і нахиленої під кутом $\alpha = 60°$ до вертикалі, та пари сил з моментом $M = 8$ к$H \cdot$ м.

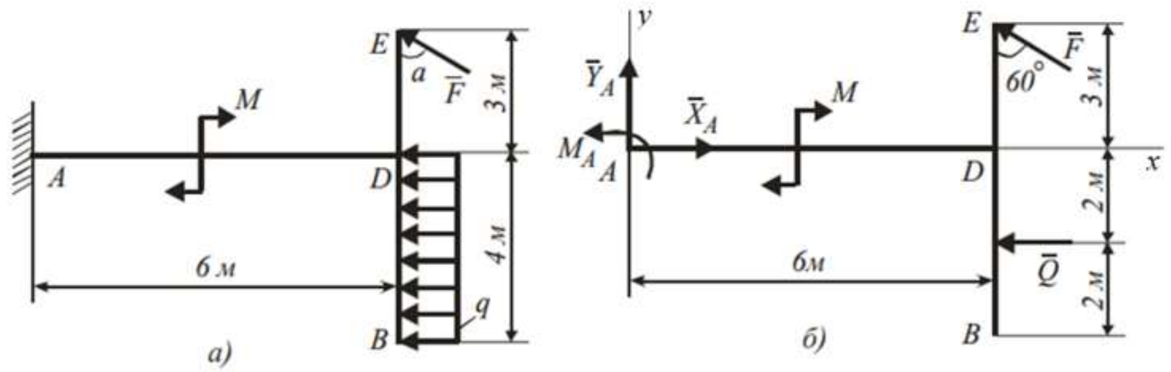


Рис. 4.6

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки *ADBE*. Рівномірно розподілене навантаження замінимо зосередженою силою $\vec{Q}$, яку прикладемо посередині ділянки *BD*, спрямувавши її паралельно силам розподіленого навантаження в тому ж напрямку. Обчислимо $Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ кH. Дію жорсткого кріплення на балку замінимо двома складовими $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ реактивної сили та реактивною парою сил з моментом M_A (рис. 4.6, б). Виберемо систему координат, як показано на рисунку і складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, які діють на балку [2]:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A - Q - F sin 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A + F cos 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \ \ M_A - M - Q \cdot 2 + F sin 60° \cdot 3 + F cos 60° \cdot 6 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо:

$$X_A = Q + F sin 60° = 28{,}66(\text{к}H);$$

$$Y_A = -F cos 60° = -5(\text{к}H);$$

$$M_A = M + Q \cdot 2 - F \cdot (3 \cdot sin 60° + 6 \cdot cos 60°) = -7{,}98(\text{к}H \cdot \text{м}).$$

Приклад 4.4

Невагомий жорсткий кутник ADB закріплений в точці A за допомогою нерухомого циліндричного шарніра, а в точці B кріпиться до нерухомої опори ідеальним стрижнем BC. Навантажений кутник зосередженими силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, парою сил з моментом M та рівномірно розподіленим на ділянці DE навантаженням інтенсивності q (рис. 4.7).

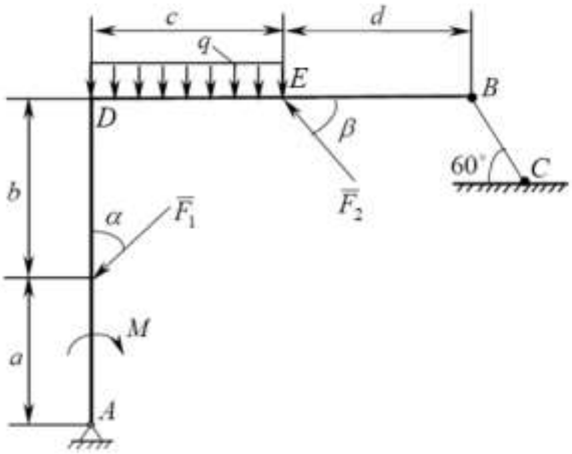


Рис. 4.7

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кутника ADB. Прикладаємо всі активні сили. Розподілене навантаження заміняємо зосередженою силою $\vec{Q}$, прикладеною посередині ділянки DE, величина якої $Q = q \cdot c$. Звільняємось від в'язей і їхню дію замінюємо реакціями. Реакцію ідеального стрижня направляємо вздовж стрижня від тіла, рівновагу якого розглядаємо. Реакцію нерухомого циліндричного шарніра замінюємо двома складовими $\vec{X}_A$ та $\vec{Y}_A$ (рис. 4.8). Вибираємо систему координат, як показано на рисунку і складемо рівняння рівноваги.

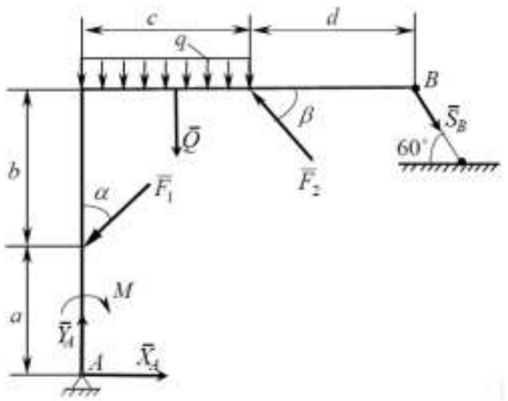


Рис.4.8

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A - F_1 sin\alpha - F_2 cos\beta + S_B cos60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A - F_1 cos\alpha + F_2 sin\beta - Q - S_B sin60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \; F_1 sin\alpha \cdot a \; - M - Q \cdot \frac{c}{2} + F_2 cos\beta \cdot (a+b) + F_2 sin\beta \cdot c -$$

$$-S_B cos60° \cdot (a+b) - S_B sin60° \cdot (c+d) = 0.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь знаходимо всі невідомі задачі.

$$S_B = \frac{F_1 sin\alpha \cdot a\ - M - Q \cdot \frac{c}{2} + F_2 cos\beta \cdot (a+b) + F_2 sin\beta \cdot c}{(a+b)cos60° + (c+d)sin60°};$$

$$X_A = F_1 sin\alpha + F_2 cos\beta - S_B cos60°;$$
$$Y_A = F_1 cos\alpha - F_2 sin\beta + Q + S_B sin60.$$

§ 5. Рівновага системи тіл

Для довільної плоскої системи сил існує три незалежних рівняння рівноваги, з яких можна визначити не більше трьох невідомих величин. Задачі, в яких кількість невідомих величин не перевищує кількості рівнянь рівноваги, є *статично визначеними*. При розрахунку інженерних конструкцій зустрічаються статично невизначені задачі, тобто задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь рівноваги. Такі конструкції називають *статично невизначеними*. Наприклад, статично невизначеними є закріплена нерухомими циліндричними шарнірами балка *AB* (рис. 4.9,а) і *Г*-подібна рама, яка жорстко закріплена точці *A* та вільно обпирається на нахилену під кутом α до горизонту площадку (опора на котках) в точці *B* (рис. 4.9,б). Статично невизначені задачі розв’язують в опорі матеріалів вводячи додаткові рівняння, які враховують деформації елементів конструкції. Інколи задачу роблять статично визначеною, замінивши деякі в’язі на інші. Так, наприклад, для балки один з нерухомих шарнірів замінити опорою на котках, а *Г*-подібну раму звільнити від опори в точці *B*, або замінити жорстке защемлення а точці *A* на нерухомий циліндричний шарнір.

Статично невизначеними на перший погляд є задачі рівноваги складеної конструкції (системи тіл), в яких декілька тіл з’єднані між собою внутрішніми в’язями; зовнішніми будуть в’язі, які утримують від переміщення всю складену конструкцію. Сили, що діють на складену конструкцію (систему тіл), також розділяють на зовнішні та внутрішні. Зовнішні сили (як активні так і реакції в’язей) – це сили, з якими на дану систему тіл діють тіла, які не належать до конструкції. До внутрішніх сил (внутрішніх реакцій) відносяться сили взаємодії між тілами даної конструкції.

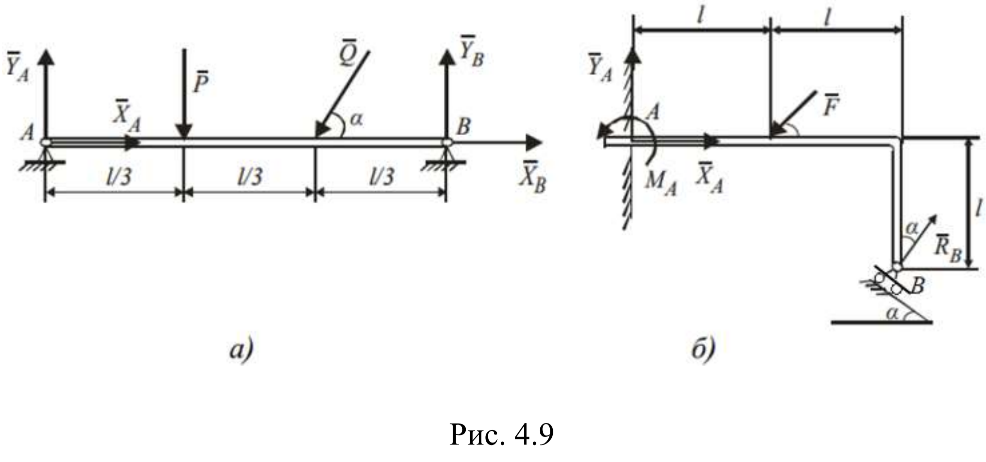


Рис. 4.9

Для усунення статичної невизначеності при розв’язанні задач рівноваги системи тіл треба збільшити кількість незалежних рівнянь рівноваги до кількості невідомих. Це можна зробити двома способами. За одним із них розглядається окремо рівновага кожного з тіл системи під дією прикладених до них активних сил і реакцій в’язей з боку зовнішніх опор та з боку відкинутих тіл. При цьому реакції внутрішніх в’язей, як сили взаємодії між тілами, прикладають до кожного з тіл системи в точках їх з’єднання і направляють їх в протилежних напрямках, враховуючи їх чисельну рівність між собою. Інший спосіб передбачає складання рівнянь рівноваги всієї складеної конструкції замість рівнянь рівноваги одного з тіл системи. При цьому складену конструкції вважають абсолютно твердим тілом, на яке діють зовнішні активні сили і реакції зовнішніх в’язей. Внутрішні реакції в рівняннях рівноваги всієї системи тіл не враховуються, так як вони становлять зрівноважену систему сил. Застосовуючи ці способи, треба в першу чергу складати рівняння рівноваги тих тіл, для яких задача розрахунку невідомих є статично визначеною. Це полегшить розв'язання системи $3n$ алгебраїчних рівнянь рівноваги (тут n – кількість тіл системи). Розглянемо приклади розв'язування таких задач застосовуючи ці способи [2].

Приклад 4.5

Конструкція складається з жорсткого невагомого кутника *ADH* і стержня *BC*, який в точці *C* вільно опирається на кутник. В точці *A* кутник жорстко закріплений, а в точці *B* стержень кріпиться ідеальним циліндричним шарніром. Визначити реакції в'язей в точках *A*, *B*, *C*, якщо $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН, $q = 15$ $^{\text{кН}}/_{\text{м}}$, $M = 50$ кН · м. Розміри в метрах показані на рисунку (рис. 4.10, а).

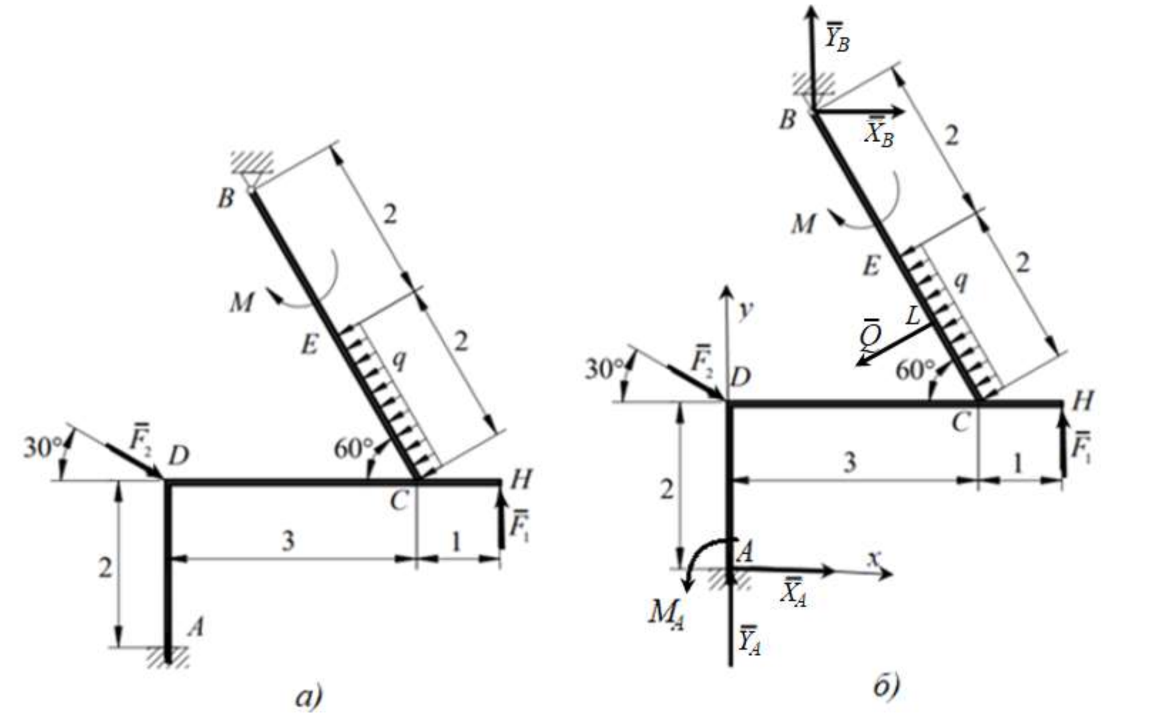


Рис. 4.10

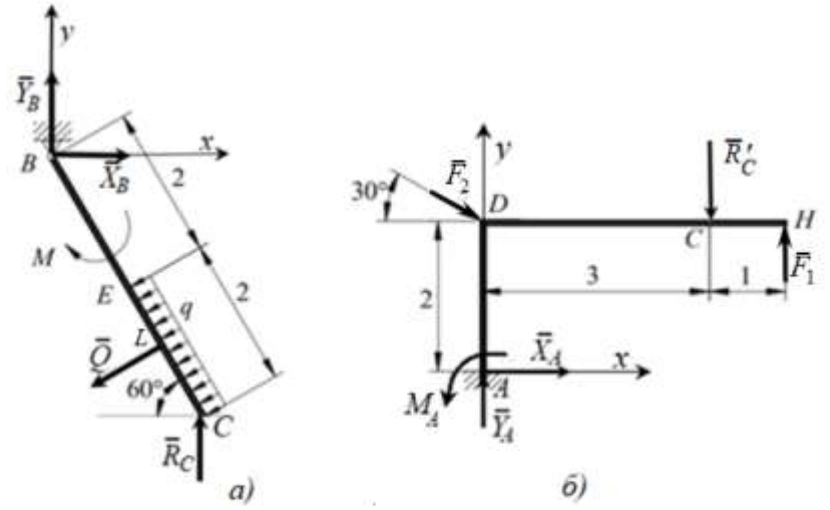


Рис.4.11

Розв'язання. Розв'яжемо задачу двома способами. В першому випадку розглянемо рівновагу конструкції як єдиного твердого тіла і рівновагу одного із тіл, що входять в конструкцію.

Якщо розглядати рівновагу конструкції як єдиного цілого, зовнішніми в'язями будуть защемлення в точці A і закріплення з допомогою ідеального циліндричного шарніра в точці B. Звільняємось від цих в'язей і їхню дію заміняємо реакціями – в точці A реактивна сила, складові якої $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, та реактивний момент M_A і в точці В – реактивна сила зі складовими $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$ (рис. 4.10, б). Сили взаємодії між стержнем і кутником в точці C є внутрішніми силами і при розгляді рівноваги конструкції в цілому не враховуються. Розподілене навантаження на ділянці EC заміняємо зосередженою силою $\vec{Q}$, величина якої $Q = q \cdot EC = 30$ кН. Виберемо систему координат, як показано на рисунку і напишемо рівняння рівноваги.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A + F_2 cos30° - Qcos30° + X_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A - F_2 sin30° + F_1 - Qsin30° + Y_B = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \; M_A - M - F_2 cos30° \cdot DA + F_1 \cdot DH + Qcos30°(AD + LCsin60°) -$$
$$-Qsin30° \cdot (DC - LCcos60°) - X_B(AD + BCcos30°) + Y_B(DC - BCcos60°) = 0.$$

Ми отримали три рівняння рівноваги з п'ятьма невідомими. Для того, щоб отримати додаткові рівняння розглянемо рівновагу стержня BC. Тепер в число зовнішніх в'язей входить кутник ADH, на який обпирається стержень BC в точці C. Звільняємось від цієї в'язі, а її дію на стержень замінюємо реакцією $\vec{R}_C$, яку направляємо перпендикулярно до ділянки кутника, на яку здійснюється обпирання (рис. 4.11, а). Напишемо рівняння рівноваги всіх сил (активних і реактивних), що діють на стержень.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_B - Qcos30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_B - Qsin30° + R_C = 0; \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0. \; -M - Q \cdot BL + R_C \cdot BCcos60° = 0.$$

Отримана система трьох рівнянь містить три невідомих, які можна знайти.

$$R_C = \frac{M + Q \cdot BL}{BCcos60°} = \frac{50 + 30 \cdot 3}{2} = 70\text{кН}.$$

$$X_B = Qcos30° = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

$$Y_B = Qsin30° - R_C = 15 - 70 = -55\text{кн}.$$

Так як складові реакції в точці B вже відомі можемо розв'язати тепер систему рівнянь (1) рівноваги конструкції в цілому відносно решти невідомих

$$X_A = -F_2cos30° + Qcos30° - X_B = (-20+30)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 15\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\text{кн.}$$

$$Y_A = F_2sin30° - F_1 + Qsin30° - Y_B = (20+30)\cdot\frac{1}{2} - 10 + 55 = 70\text{кн.}$$

$$M_A = M + F_2cos30°\cdot DA - F_1\cdot DH - Q(LC + ADcos30° - DCsin30°) +$$
$$+ X_B(AD + BCcos30°) - Y_B(DC - BCcos60°) = \left(170 + 20\sqrt{3}\right)\text{кн.}$$

Застосуємо тепер другий спосіб, згідно з яким розглянемо рівновагу кожної частини окремо. Почнемо з рівноваги стержня BC (рис. 4.11, а). Відповідні рівняння рівноваги ми вже маємо, а саме це рівняння (2). Як ми бачили вище, ці рівняння можна розв'язати відносно всіх невідомих, що входять в ці рівняння. Переходимо до розгляду рівноваги кутника ADH. Тепер в число зовнішніх в'язей входить стержень BC. Відкинувши цю в'язь дію її на кутник замінюємо реакцією $\vec{R}'_C$ (рис. 4.11, б), яка за величиною дорівнює реакції $\vec{R}_C$, але направлена в протилежному до $\vec{R}_C$ напрямку (як сила взаємодії між двома тілами). Напишемо рівняння рівноваги цієї частини конструкції

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\quad X_A + F_2cos30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\quad Y_A - F_2sin30° - R'_C + F_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0.\ M_A - F_2cos30°\cdot AD - R'_C\cdot DC + F_1\cdot DH = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь з врахуванням того, що $R'_C = R_C$, знайдемо

$$M_A = F_2cos30°\cdot AD + R'_C\cdot DC - F_1\cdot DH = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 70\cdot 3 - 10\cdot 4 = \left(170 + 20\sqrt{3}\right)\text{кН.}$$

$$X_A = -F_2cos30° = -10\sqrt{3}\text{кН};\ Y_A = F_2sin30° + R'_C - F_1 = 10 + 70 - 10 = 70\text{кН.}$$

Як бачимо, ми отримали такий самий розв'язок, як і першим способом, але другим способом розв'язок знаходиться набагато простіше.

Приклад 4.6

Знайти реакції опор і тиск в проміжному шарнірі C заданої на рис. 4.12 конструкції, яка складається з невагомих кутника AC і стрижня CB. В точці A кутник жорстко защемлений, а в точці B стрижень CB опирається на гладку вертикальну стінку. На конструкцію діють пара сил з моментом $M = 50$ к$H\cdot$м, розподілене навантаження з інтенсивністю $q = 10$ кH /м, сили $F = 20$ кH та $P = 30$ кH. Відомі розміри a = 4 м, b = 2м, c =1м, d = 3м.

Розв'язання. Розглядаючи рівновагу всієї конструкції, як абсолютно твердого тіла, три рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, що діють на систему тіл, будуть містити чотири невідомі реакції: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{R}_B$ (див. рис. 4.12, *а*).

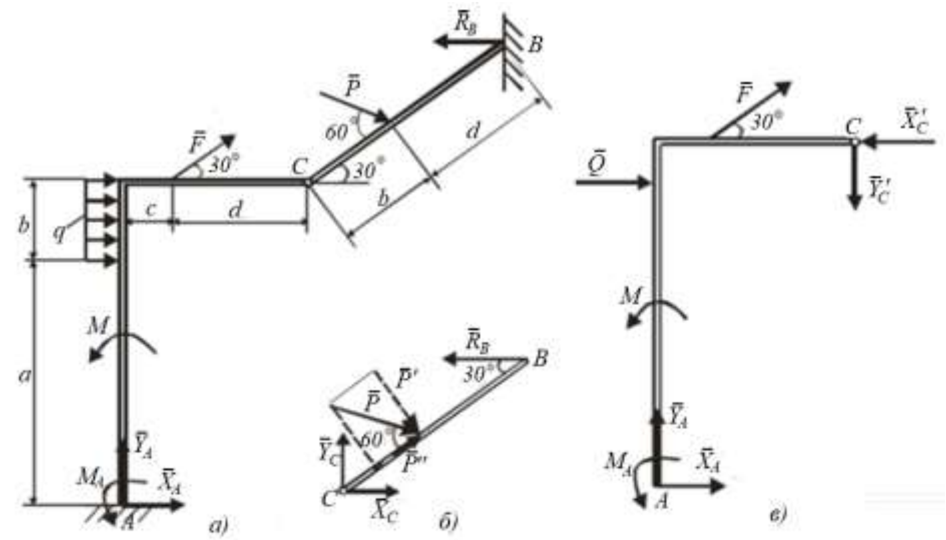


Рис. 4.12

Для того, щоб усунути статичну невизначеність, розділимо систему в точці з'єднання C і розглянемо рівновагу кожної частини конструкції окремо. Спочатку розглянемо рівновагу стрижень BC, так як на нього крім відомої активної сили $\vec{P}$, діє три невідомі реакції $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$ шарніра C та $\vec{R}_B$ гладенької поверхні в точці B (див. рис. 4.12, *б*), тобто задача рівноваги стрижня є статично визначеною. Складемо три рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, які діють на стрижень:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_C + Pcos30° - R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_C - Psin30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\vec{F}_k) = 0. \;\; R_B sin30° \cdot (b + d) - Pcos30° \cdot b = 0.$$

При знаходженні моменту сили $\vec{P}$ відносно точки C використовуємо теорему Варіньона про момент рівнодійної. Для цього розкладаємо силу $\vec{P}$ на складові, одна з яких P''=$Pcos60°$ направлена вздовж стрижня, тобто її лінія дії проходить через точку C і $M_C(\vec{P}'') = 0$, а інша $P' = Psin\,60°$ перпендикулярна до стрижня і має плече відносно точки C, що дорівнює відстані b. Отже момент $M_C(\vec{P}') = M_C(\vec{P}) \; = -\,Pcos30° \;\cdot b$.

Розв'язуємо отриману систему рівнянь

$$R_B = \frac{Pcos30° \cdot b}{(b + d)sin30°} = 20{,}8(\text{кН});$$

$$X_C = R_B - Pcos30° = -5{,}2(\text{кН});$$

$$Y_C = Psin30° = 15(\text{кН}).$$

Розглянемо тепер рівновагу кутника (рис. 4.12, *в*), до якого прикладемо активні сили, реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$ жорсткого защемлення в точці A, та реакції $\vec{X}'_C, \vec{Y}'_C$ шарніра C. Останні реакції згідно з третім законом Ньютона направляємо в протилежних напрямках до напрямку реакцій $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$, з якими шарнір C діяв на балку BC. Дію розподіленого навантаження замінюємо зосередженою силою $\vec{Q}$ ($Q = q \cdot b = 10 \cdot 2 = 20$кН), яку прикладаємо посередині ділянки дії навантаження. Для плоскої системи, що діє на кутник, складемо також три рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A + Q + Fcos30° - Pcos30° - X'_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A + Fsin30° - Y'_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

$$M_A + M - Q \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + (X'_C - Fcoc30°) \cdot (a + b) + Fsin30° \cdot c - Y'_C(d + c) = 0.$$

Враховуючи, що $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$, як сили взаємодії, встановлюємо, що отримана система трьох рівнянь містить три невідомих реакції, тобто задача статично визначена. Розв'язуючи систему цих рівнянь знайдемо

$$X_A = -42{,}5(\text{кН});$$

$$Y_A = 5(\text{кН});$$

$$M_A = 235{,}1(\text{кН}).$$

Приклад 4.7

На гладенькій горизонтальній поверхні стоїть пересувна драбина, яка складається з двох частин AB та BC, довжиною 3м та вагою $P = 120$ Н кожна, з'єднаних шарніром C і вірьовкою EF так, що відстань $BF = AE = 1$м. Центр ваги кожної з частин AC, BC знаходиться в її середині. У точці D на відстані $CD = 0{,}6$м стоїть людина вагою 720 Н. Визначити реакції підлоги і шарніра та натяг T вірьовки EF, якщо кут $BAC = ABC = 45°$.

Розв'язання. Розглядаючи драбину як одне тверде тіло (рис. 4.13, *а*), встановимо, що ця конструкція знаходиться в стані рівноваги під дією активних сил ваги кожної з частин драбини $\vec{P}$ і ваги людини $\vec{Q}$, та реакцій $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ гладенької поверхні підлоги. Ці сили складають плоску систему паралельних сил, для якої умови рівноваги містять два рівняння. Так, як до цієї системи сил входять дві невідомі реакції $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, то задача рівноваги драбини є статично визначеною [2].

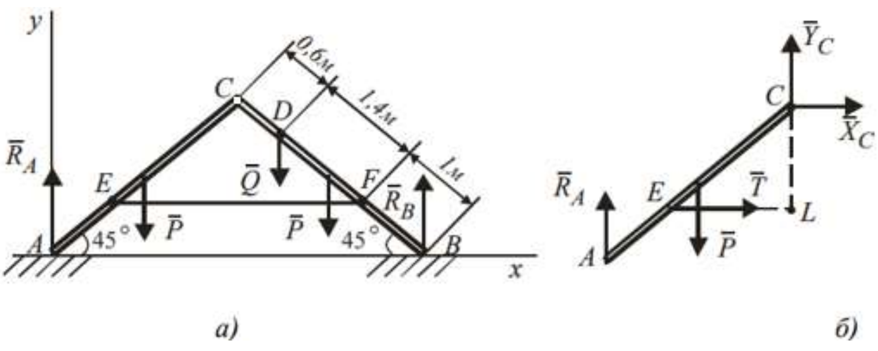


Рис. 4.13

Складемо рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \ \left(-P \cdot \frac{AC}{2} - Q \cdot (AC + CD) - P \cdot \frac{3}{2}AC + R_B \cdot 2AC\right) cos45° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0. \ \left(P \cdot \frac{AC}{2} + Q \cdot DB + P \cdot \frac{3}{2}AC - R_B \cdot 2AC\right) cos45° = 0.$$

Із цих рівнянь знаходимо: $R_B = 552H$; $R_A = 408H$.

Тепер розглянемо рівновагу частини AC драбини (рис. 4.13, б), на яку окрім активної сили $\vec{P}$ ваги діють реакції $\vec{R}_A$ гладенької поверхні, $\vec{T}$ вірьовки, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарніра. Для довільної плоскої системи сил складемо рівняння рівноваги. З метою отримати простіші рівняння використаємо другу форму рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_C - P + R_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\vec{F}_k) = 0. \ T \cdot CEsin45° + P \cdot \frac{AC}{2} cos45° - R_A \cdot ACcos45° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_L(\vec{F}_k) = 0. \ -X_C \cdot CEsin45° + P \cdot \frac{AC}{2} cos45° - R_A \cdot ACcos45° = 0.$$

Легко бачити, що в кожне з рівнянь входить лише одна невідома величина, що значно спрощує процес розв'язування.

Визначаємо невідомі реакції, враховуючи, що реакція R_A вже відома. Знайдемо

$$Y_C = -288H; \ T = X_C = 522H.$$

Приклад 4.8

Для системи тіл, яка знаходиться в рівновазі, визначити реакції шарнірів A, B і C (рис. 4.14). Задано $P = 10$ кН, $F = 2$ кН, $M = 5$ кН · м. Всі розміри вказані на рисунку. Стержні AE і BC, блоки і нитку вважати невагомими. Тертям в шарнірах знехтувати.

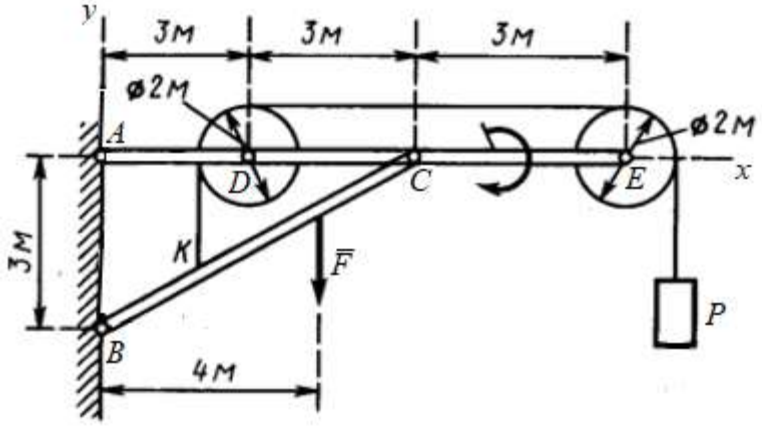


Рис. 4.14

Розв'язання. Розглянемо окремо рівновагу стержня BC (рис 4.15), звільнивши його від в'язей.

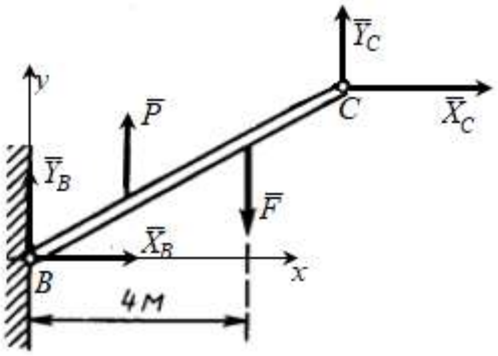


Рис. 4.15

Невідому силу реакції в шарнірі B замінимо складовими, направленими в додатному напрямку осей координат. В шарнірі C невідому силу реакції теж замінимо складовими, які направимо паралельно осям координат в додатну сторону. В точці К прикладемо силу натягу відкинутої нитки, яка за величиною дорівнює силі ваги вантажу Р і направлена по нитці.

Складемо рівняння рівноваги отриманої плоскої системи сил.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_B + X_C = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_B + P - F + Y_C = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0; \;\; P \cdot 2 - F \cdot 4 + Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 3 = 0. \tag{3}$$

Ми отримали систему трьох рівнянь з чотирма невідомими, яку не можливо розв'язати. Розглянемо тепер рівновагу стержня AE (рис. 4.16).

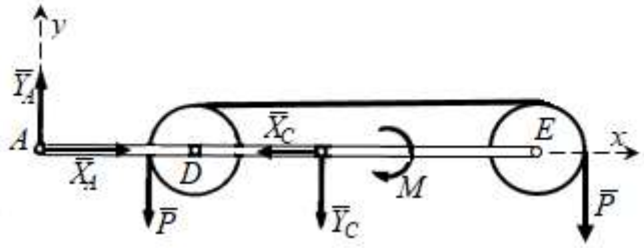


Рис. 4.16

Невідому реакцію шарніра A замінюємо складовими, які направляємо в додатному напрямку осей координат. Розглядаючи сили з якими тіла діють одне на друге, враховуємо, що згідно з аксіомою статики сили дії і протидії рівні за величиною і протилежні за напрямком.

Тому відкинувши частину нитки, яка в точці K зв'язує обидва тіла, дію її на наше тіло показуємо силою натягу нитки $\vec{P}$, яка має протилежний напрямок до тієї сили, з якою нитка діяла на стержень BC. Аналогічно реакцію в шарнірі С замінюємо складовими $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$, які направляємо в протилежному напрямку до напрямку реакцій на рис. 4.15. Зауважимо, що реакції в точці C на рис 4.15 і 4.16 позначені однаково, але це різні вектори, так як вони мають різний напрямок. Для того щоб це відзначити часто реакції на рис. 4.16 позначають додатково штрихами і наголошують, що довжина векторів з штрихами і векторів без штрихів однакова, а напрямок різний. Тому краще не вводити позначок із штрихами, а третій закон Ньютона виконати, направивши реакції на рис. 4.16 в протилежному напрямку.

Напишемо рівняння рівноваги отриманої системи сил.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad X_A - X_C = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2P - Y_C = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \; -P \cdot 2 - Y_C \cdot 6 - M - P \cdot 10 = 0. \tag{6}$$

Ми отримали три рівняння в якій лише дві нових невідомих X_A і Y_A. Отже в сумі маємо шість рівнянь і шість невідомих.

З рівняння (6) знаходимо

$$Y_C = -\frac{1}{6}(P \cdot 2 + M + P \cdot 10) = -\frac{125}{6} \approx -20{,}83 \text{ кН}.$$

З рівняння (5) маємо

$$Y_A = 2P + Y_C = -0{,}83 \text{ кН}.$$

З рівняння (3) можемо знайти X_C:

$$X_C = \frac{1}{3}(P \cdot 2 - F \cdot 4 + Y_C \cdot 6) \approx -37{,}7 \text{ кН}.$$

Рівняння (1) і (4) дають

$$X_A = -37{,}7 \text{ кН}; \;\; X_B = 37{,}7 \text{ кН}.$$

І, нарешті, з рівняння (2) знаходимо

$$Y_B = -P + F - Y_C = 12{,}83 \text{ кН}.$$

§ 6. **Розрахунок плоских ферм**

Фермою називається конструкція, складена зі стрижнів, кінці яких з'єднані між собою шарнірами так, що стрижні не можуть мати відносних переміщень, тобто вся конструкція являє собою незмінювану систему. Місця з'єднання стрижнів називаються вузлами ферми, кожний шарнір збігається з вузлом ферми.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами. Така система утворює трикутник, який є геометрично незмінюваною фігурою в тому розумінні, що, не змінюючи довжин стрижнів, неможливо змінити форму трикутника.

Геометрично змінювана система має можливість рухатись і є механізмом. Прикладами можуть бути системи чотирьох стрижнів, наведені на рис. 4.17.

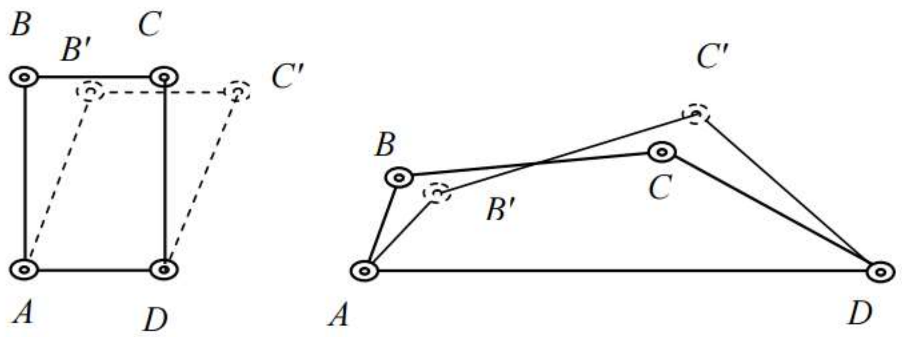


Рис. 4.17

Використання ферм приводить до значної економії матеріалу. До того ж при певних умовах ферми допускають простий, елементарний розрахунок.

Залежно від виробничого призначення ферми бувають (рис. 4.18):

мостові використовуються при побудові мостів);

кроквяні (підтримують покрівлі в різних спорудах);

кранові (які є деталями підіймальних пристроїв) [2].

Мостові та кроквяні ферми, подібно до балок, можуть опиратись на рухомі або нерухомі опори. Кранові ферми можуть опиратись на підп'ятник і підтримуватись підшипниками.

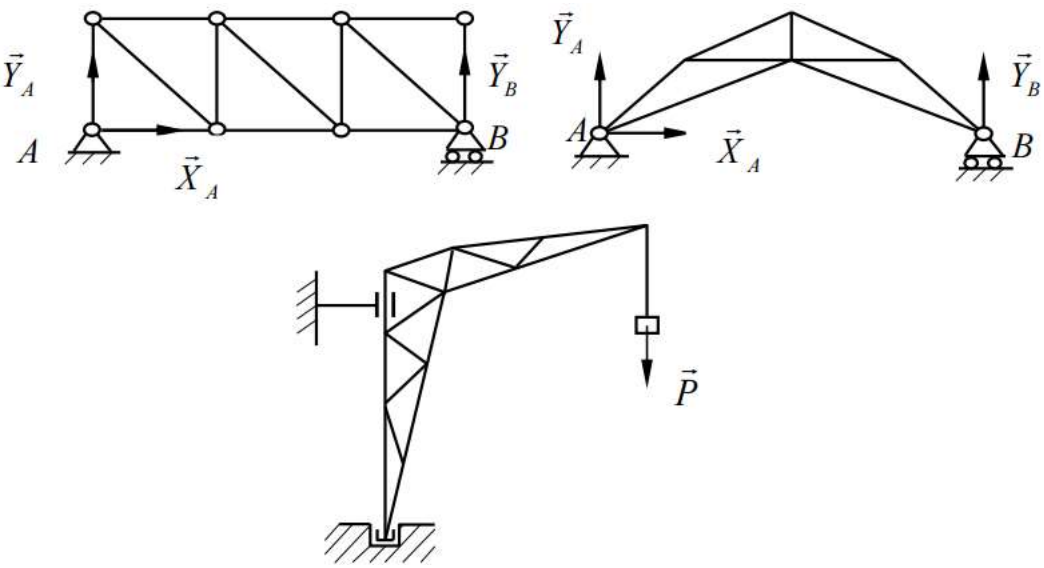


Рис. 4.18

Основна мета при розв'язуванні задач про ферми — визначення внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми внаслідок дії зовнішніх активних навантажень і зовнішніх реакцій опор. Умовно ці внутрішні сили називають зусиллями. При визначенні внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми, звичайно виходять з таких припущень.

1. Стрижні ферми прямолінійні, а їхні кінці з'єднані ідеальними точковими шарнірами без тертя (тобто сили тертя в них не виникають).

2. Всі стержні абсолютно тверді і невагомі (тобто вагою кожного з стержнів нехтують).

3. Зовнішні сили прикладені лише у вузлах ферми.

На практиці ці умови виконуються не цілком, а з деяким наближенням. Їх можна розглядати як припущення, що дають змогу одержати перше наближення до величин істинних внутрішніх зусиль у стрижнях ферми. При цих припущеннях сила, що діє зі сторони якого-небудь вузла на стрижень, що примикає до нього (зусилля в стрижні), завжди направлена вздовж прямої, яка проходить через кінці цього стрижня. Тому стрижні, в разі їх прямолінійності, або розтягуються, або стискуються під дією цих сил. У реальних фермах стрижні з'єднані між собою не шарнірно, а за допомогою зварювання чи заклепування. Тому в стрижнях ферми виникає, крім розтягу чи стиску, ще й згин. Однак напруги від згину невеликі, в першому наближенні ними можна знехтувати. Друге припущення є звичайним для статики абсолютно твердого тіла. Практичне значення похибок, пов'язаних з другим припущенням, також невелике. Третє припущення не приводить до значних помилок при визначенні внутрішніх сил у стрижнях ферми, якщо відношення довжин стрижнів до прогону ферми невелике [3].

Якщо осі всіх стержнів ферми лежать в одній площині, ферма називається плоскою; в іншому разі – просторовою.

Можна показати, що найменша кількість стрижнів, яка необхідна для побудови ферми як незмінюваної конструкції при заданій кількості n вузлів, дорівнює

$$k = 2n - 3. \tag{4.10}$$

Рівність (4.10) називається *умовою жорсткості ферми*.

Покажемо, що жорсткі ферми завжди статично визначені, тобто що кількість незалежних рівнянь статики достатня для визначення зусиль у кожному із стрижнів.

Доведення. Якщо ферма жорстка, то її можна розглядати як абсолютно тверде тіло, що перебуває під дією активних сил та реакцій в'язей. На кожний вузол ферми буде діяти плоска система збіжних сил, яка складається із зовнішніх сил, що діють на ферму, та внутрішніх сил – реакцій стрижнів, які згідно з наведеними припущеннями мають напрями стрижнів. При цьому якщо реакція $\vec{R}_{\text{ст}}$ стрижня на вузол направлена від вузла (рис. 4.19), то стрижень розтягнутий, оскільки реакція $\vec{R}_B$ вузла на стрижень задовольняє умову: $\vec{R}_B = -\vec{R}_{\text{ст}}$.

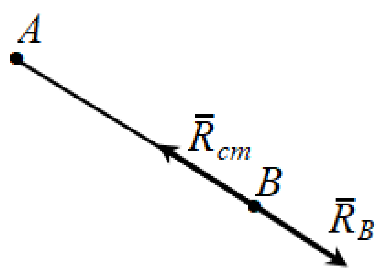


Рис. 4.19

Для кожного вузла можна скласти дві умови рівноваги (1.14), оскільки на вузол діє система збіжних сил. Якщо число вузлів дорівнює n, то умов рівноваги буде $2n$. Невідомими є реакції стрижнів (число стрижнів дорівнює k) і опорні реакції (їх число дорівнює 3, див. рис. 4.15), всього невідомих $k + 3$. З виразу (4.10 випливає $k + 3 = 2n$, тобто число невідомих дорівнює числу рівнянь: твердження доведено.

На рис. 4.20 зображена ферма, яка не є жорсткою, оскільки число стрижнів $k = 12$, число вузлів $n = 8$, тобто $k = 12 < 2n - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$. Отже, 15 невідомих мусять задовольняти 16 рівнянням.

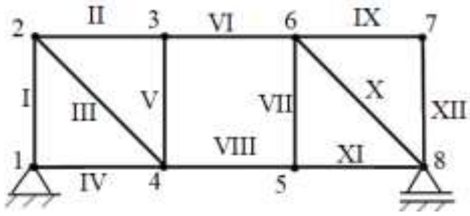


Рис. 4.20

Якщо $k > 2n - 3$, то ферма має «зайві» стрижні. У цьому випадку зусилля в стрижнях за допомогою одних тільки рівнянь статики абсолютно твердого тіла визначити неможливо: така ферма статично невизначена. Отже, умова жорсткості (4.10) є для плоскої ферми і умовою статичної визначеності. Приклад ферми із зайвими стрижнями наведено на рис. 4.21. Тут $k = 14, n = 8$, тобто $k = 14 > 2n - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$. Таким чином, рівнянь рівноваги – 16, а невідомих – 17.

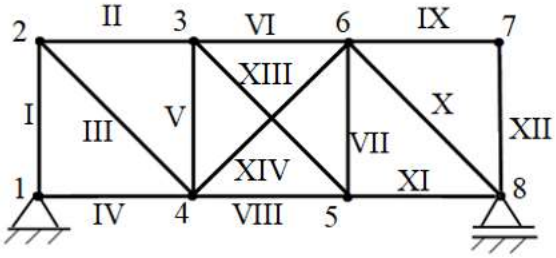


Рис. 4.21

При розрахунках ферм звичайно складають спочатку три рівняння рівноваги для всієї ферми, з яких визначають три опорні реакції, а потім уже знаходять зусилля в стрижнях. Найпростіший спосіб визначення зусиль в стержнях ферм ґрунтується на методі *вирізання вузлів*, згідно з яким потрібно почергово «вирізати вузли» і знаходити зусилля в стрижнях з умови замкнутості силових многокутників для кожного з вузлів або аналітично. Вирізаний з ферми вузол розглядається окремо як такий, що перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і реакцій розрізаних стрижнів, які направлені по стрижню в сторону, протилежну вузлу, якщо зусилля розтягу, і в сторону вузла, якщо зусилля стиску. На практиці зусилля направляють від вузла, тобто припускають, що зусилля розтягу. Якщо в результаті розрахунків виявиться зусилля в деяких стрижнях від'ємним, то це буде свідчити про те, що цей стрижень стиснутий. Кожний наступний вузол вибирається так, щоб у ньому сходилося не більше двох стрижнів, для яких зусилля ще не визначені. Оскільки при використанні цього методу зусилля в кожному наступному стрижні розраховуються за визначеними раніше зусиллями, то допущена похибка при визначенні зусилля в деякому стрижні впливає на результати визначення зусиль в усіх інших стрижнях.

Найзручнішим аналітичним способом визначення зусиль в стрижнях ферми є спосіб Ріттера (спосіб трьох моментів). Цей спосіб часто також називають *метод наскрізних перерізів.*

Згідно із способом Ріттера ферму розрізають на дві частини так, щоб переріз проходив через стрижні, зусилля в яких потрібно визначити. Переріз має проходити не більш як через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми.

Розглядають лише одну з частин ферми (зазвичай ту, на яку діє менше зовнішніх сил), а другу вважають в'яззю, яку подумки відкидають і прикладають до розрізаних стрижнів реакції відкинутої частини ферми. Реакції стрижнів, як було зазначено раніше, напрямляють у бік відкинутої частини ферми. Це означає, що ми вважаємо всі стрижні розтягнутими.

Задача повинна бути статично визначеною, тобто кількість рівнянь рівноваги (на тіло діє довільна плоска система сил) повинна дорівнювати кількості невідомих реакцій стрижнів.

Дальше переходять до складання рівнянь рівноваги. Головна особливість методу Ріттера полягає у тому, що в кожне рівняння рівноваги має ввійти лише одне невідоме. Тоді зменшується ймовірність виникнення помилок, оскільки наявність помилки у визначенні будь-якого невідомого ніяк не позначиться на інших.

Найчастіше рівняння рівноваги за цим методом складають у формі моментів сил відносно *точок Ріттера,* тобто тих точок, в яких перетинаються два з трьох перерізаних стрижнів.

Може трапитись, що два з трьох стрижнів, які перерізані, паралельні між собою. У цьому випадку одна точка Ріттера нескінченно віддаляється. Тоді замість одного рівняння моментів складають рівняння проекцій на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

Проводячи перерізи в інших місцях, можемо знайти за методом Ріттера реакції майже всіх стрижнів.

Розглянемо на прикладах застосування цих обох методів для визначення зусиль в стрижнях ферми.

Приклад 4.9

Для заданої ферми визначити реакції опор та знайти зусилля в її стержнях. $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 10$ кН.

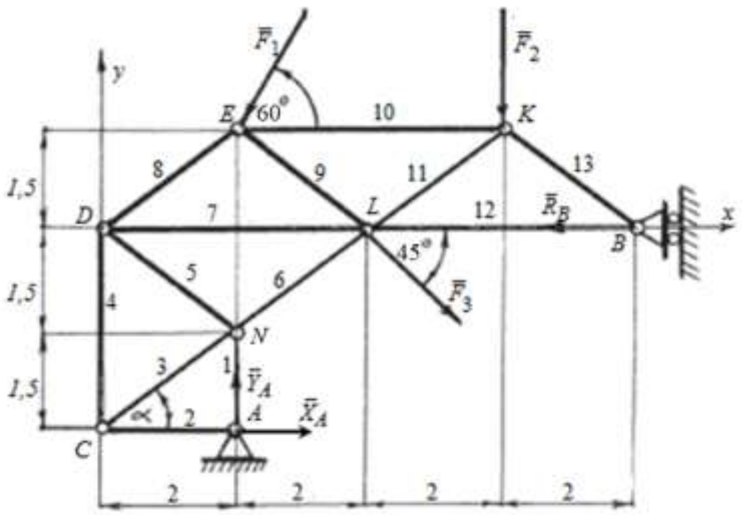


Рис. 4.22

Розв'язання. Для заданої ферми $k = 13, n = 8$, тобто ферма статично визначена.

1. Знайдемо реакції в'язей.

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї в'язями є опора в точці *A* (нерухомий шарнір) і опора в точці *B* (рухомий шарнір). Реакції в точці *A* розкладаємо на складові $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, які направляємо в напрямках осей координат, а реакцію $\vec{R}_B$ в точці В направляємо перпендикулярно до поверхні обпирання (рис. 4.22).

Напишемо рівняння рівноваги ферми:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \ X_A - F_1 coc60° + F_3 coc45° - R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; Y_A - F_1 sin60° - F_2 - F_3 sin45° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0;\; F_1 coc60° \cdot 4{,}5 - F_3 coc45° \cdot 3 - F_3 sin45° \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + R_B \cdot 3 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо

$$X_A = 8{,}55 \text{ кН};\; Y_A = 16{,}27 \text{ кН};\; R_B = 12{,}62 \text{ кН}.$$

2. Обчислення зусиль в стержнях ферми способом вирізання вузлів. Розрахунок почнемо з вузла *A*, де сходяться два стержні 1 і 2, (рис. 4.23, а).

$$\text{а)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; X_A - S_2 = 0;\; S_2 = 8{,}55 \text{ кН};$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; Y_A + S_1 = 0;\; S_1 = -\,16{,}27 \text{ кН}.$$

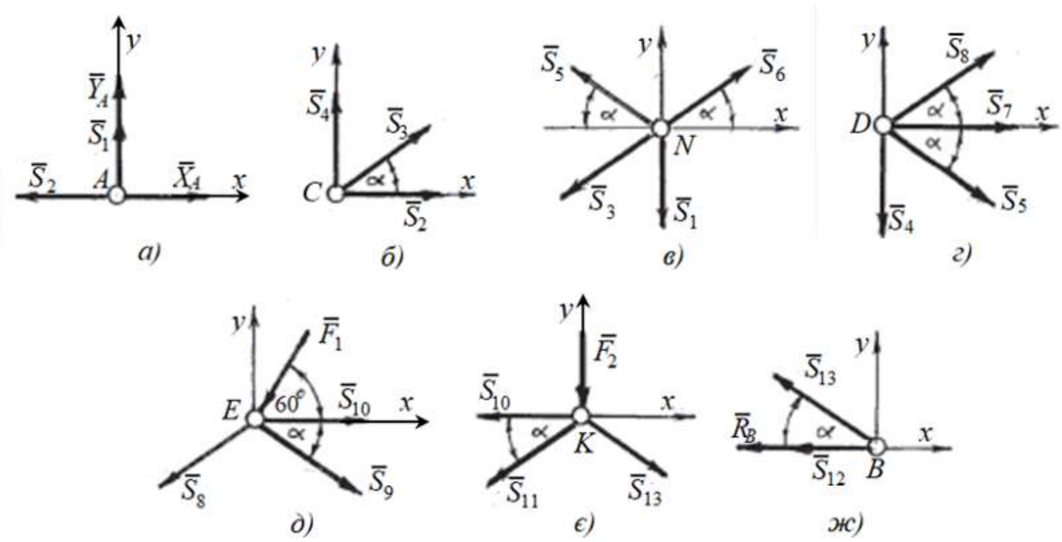


Рис. 4.23

Розглянемо рівновагу вузла *C* (рис. 4.23, б):

$$\text{б)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; S_2 + S_3 cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; S_4 + S_3 sin\alpha = 0;$$

Знайдемо $sin\alpha$ і $cos\alpha$.

$$CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = 2{,}5;\; sin\alpha = \frac{AN}{CN} = 0{,}6;\; cos\alpha = \frac{AC}{CN} = 0{,}8.$$

Тоді із системи рівнянь б) знайдемо:

$$S_3 = -10{,}69 \text{ кН}, \;\; S_4 = 6{,}41 \text{ кН}.$$

Для вузла N (рис. 4.23, в):

$$\text{в)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \;\; (S_6 - S_3 - S_5)cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \;\; (S_6 - S_3 + S_5)sin\alpha - S_1 = 0;$$

Звідки $S_5 = -13{,}56$ кН; $S_6 = -24{,}25$ кН.
Для вузла D (рис. 4.23, г)

$$\text{г)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \;\; S_7 + (S_5 + S_8)cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \; -S_4 + (S_8 - S_5)sin\alpha = 0;$$

Маємо: $S_8 = -2{,}88$ кН; $S_7 = 13{,}15$ кН.
Для вузла *E* (рис. 4.23, д)

$$\text{д)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \;\; S_{10} - F_1 cos60° + (S_9 - S_8)cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \; -F_1 sin60° - (S_9 + S_8)sin\alpha = 0;$$

Звідки $S_9 = -5{,}78$ кН; $S_{10} = 5{,}32$ кН.
Для вузла *K* (рис. 4.23, є)

$$\text{є)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \;\; (S_{13} - S_{11})cos\alpha - S_{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \; -F_2 - (S_{11} + S_{13})sin\alpha = 0.$$

Маємо: $S_{11} = -6{,}55$ кН; $S_{13} = 0$.
Для вузла *B* (рис. 4.23, ж)

$$\text{ж)} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \; -R_B - S_{12} - S_{13} cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ S_{13} sin\alpha = 0.$$

Звідки $S_{13} = 0$; $S_{12} = -12{,}62$ кН.

3. По способу Ріттера знайдемо зусилля в стержнях 6, 7, 8.

Для цього розріжемо ферму по цих стержнях і розглянемо, наприклад, ліву половину ферми. Дія правої частини ферми на ліву передається по стержнях 6, 7, 8. Реакції цих стержнів спрямуємо від вузлів по стержнях (рис. 4.24).

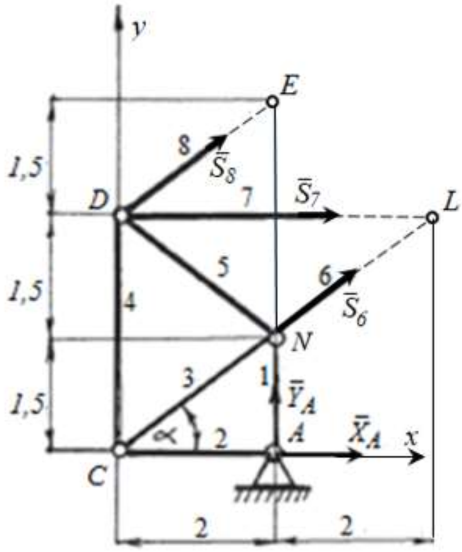


Рис. 4.24

Напишемо рівняння моментів сил відносно точки L:

$$\sum_{k=1}^{n} M_L(\vec{F}_k) = 0;\ -S_8 sin\alpha \cdot 4 + X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 = 0.$$

Звідси отримуємо $S_8 = -2{,}87$ кН.

Рівняння моментів сил відносно точки D:

$$\sum_{k=1}^{n} M_D(\vec{F}_k) = 0;\ S_6 sin\alpha \cdot 2 + S_6 cos\alpha \cdot 1{,}5 + X_A \cdot 3 + Y_A \cdot 2 = 0.$$

Маємо: $S_6 = -24{,}24$ кН.

Рівняння моментів сил відносно точки N:

$$\sum_{k=1}^{n} M_N(\vec{F}_k) = 0;\ -S_7 \cdot 1{,}5 - S_8 sin\alpha \cdot 2 - S_8 cos\alpha \cdot 1{,}7 + X_A \cdot 1{,}5 = 0.$$

Звідси знаходимо $S_7 = 13{,}14$ кН.

Ці результати добре узгоджуються з результатами, що отримані за допомогою способу вирізання вузлів.

Приклад 4.10
Визначити зусилля в стрижнях даної ферми (рис. 4.25), якщо
F_1 =3 кН, F_2 =4 кН, F_3 =5 кН.

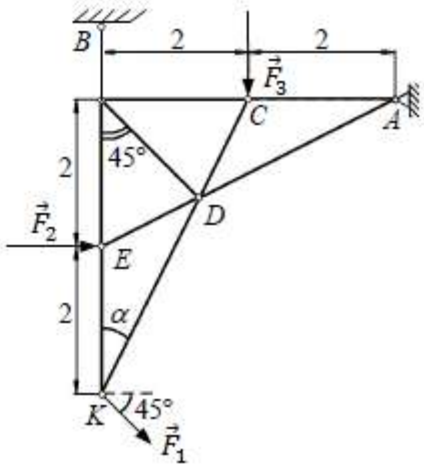


Рис.4.25

Розв'язання. Для спрощення позначимо стрижні цифрами. Відкинемо в'язі й замінимо їхню дію реакціями (рис. 4.26).

Введемо систему координат. Перевіримо ферму на статичну визначність.

Вузлів n= 6, стрижнів k= 9, k=2n-3 ⇒ $9 = 9$, отже ферма статично визначена.

Напишемо рівняння рівноваги ферми:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + F_2 + F_1 cos45° = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - F_3 + R_B - F_1 sin45° = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = F_3 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + F_2 \cdot 2 + F_1 cos45° \cdot 4 + F_1 sin45° \cdot 4 = 0.$$

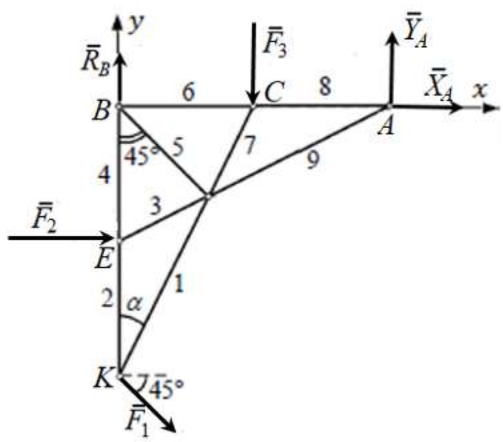


Рис.4.26

Розв’язавши отриману систему рівнянь, знайдемо

$$X_A = -6{,}121 \text{ кН}, \qquad Y_A = -1{,}621 \text{ кН}, \qquad R_B = 8{,}743 \text{ кН}.$$

Визначимо зусилля в стрижнях методом вирізання вузлів. Він полягає в послідовному вирізанні вузлів ферми й розгляданні їхньої рівноваги. Оскільки на вузол діє плоска збіжна система сил, для якої можна записати тільки два рівняння рівноваги, то вирізати вузли треба так, щоб невідомих сил було не більше двох. При складанні розрахункової схеми будемо вважати, що всі стрижні розтягнуті, тобто всі внутрішні зусилля направимо від вузла рівновагу якого розглядаємо. Для кожного вузла складаються рівняння рівноваги.

Для розрахунків потрібно попередньо визначити $sin\alpha$ і $cos\alpha$.

$$KC = 2\sqrt{5}; \;\; sin\alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447; \;\; cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894.$$

Починаємо вирізання з вузла K, оскільки тут невідомими є тільки два зусилля (рис. 4,27, а).

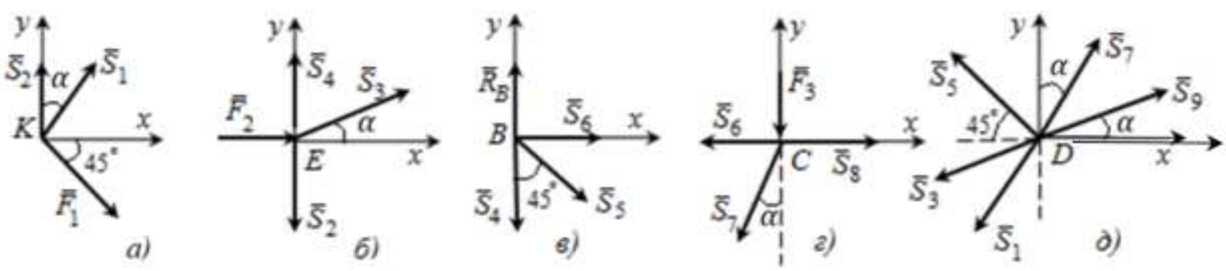


Рис. 4.27

Рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^{3} F_{kx} = 0; \;\; F_1 cos45^{\circ} + S_1 sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} F_{ky} = 0; \;\; -F_1 sin45^{\circ} + S_1 cos\alpha + S_2 = 0.$$

Розв’язавши отриману систему рівнянь знайдемо

$$S_1 = -\frac{F_1 cos45^{\circ}}{sin\alpha} = -4{,}745 \text{ кН}.$$

$$S_2 = F_1 sin45^{\circ} - S_1 cos\alpha = 6{,}363 \text{ кН}.$$

Рівновага вузла E (рис. 4.27, б).

$$\sum_{k=1}^{4} F_{kx} = 0; \;\; F_2 + S_3 cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} = 0;\ \ S_4 + S_3 sin\alpha - S_2 = 0.$$

$$S_3 = -4{,}474 \text{ кН}, \qquad S_4 = 8{,}363 \text{ кН}.$$

Рівновага вузла *B* (рис. 4.27, в).

$$\sum_{k=1}^{4} F_{kx} = 0;\ \ S_6 + S_5 sin45^{\circ} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} = 0;\ \ R_B - S_4 - S_5 cos45^{\circ} = 0.$$

$$S_5 = 0{,}537 \text{ кН}, \qquad S_6 = -0{,}38 \text{ кН}.$$

Рівновага вузла *C* (рис. 4.27, г).

$$\sum_{k=1}^{4} F_{kx} = 0;\ \ S_8 - S_6 - S_7 sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} = 0;\ \ -F_3 - S_7 cos\alpha = 0.$$

$$S_7 = -5{,}593 \text{ кН}, \qquad S_8 = -2{,}88 \text{ кН}.$$

Рівновага вузла *D* (рис. 4.27, д).

$$\sum_{k=1}^{5} F_{kx} = 0;\ \ (S_9 - S_3)cos\alpha + (S_7 - S_1)sin\alpha - S_5 cos45^{\circ} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{5} F_{ky} = 0;\ \ (S_9 - S_3 sin\alpha) + (S_7 - S_1)cos\alpha + S_5 sin45^{\circ} = 0.$$

$$S_9 = -3{,}625 \text{ кН}.$$

Оскільки зусилля у всіх стрижнях визначені, останнє рівняння використовуємо для перевірки. Легко перевірити, що це рівняння задовольняється тотожно.

Визначимо тепер для прикладу зусилля в стрижнях 6, 7, 9 за методом Ріттера. Для цього розріжемо ферму на дві частини так, щоб переріз проходив через стрижні, зусилля в яких потрібно визначити, тобто через стрижні 6, 7 і 9 (рис. 4.28, а). Нагадаємо, що переріз має проходити не більш як через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми.

Дальше розглядаємо одну з частин ферми на яку діє менше зовнішніх сил, а другу вважаємо в'яззю. В нашому випадку вигідно розглядати рівновагу правої частини (рис. 4.28, б). Прикладаємо до розрізаних стрижнів реакції відкинутої частини ферми. Ці реакції, як правило, напрямляють у бік відкинутої частини ферми. Це означає, що ми вважаємо всі стрижні розтягнутими.

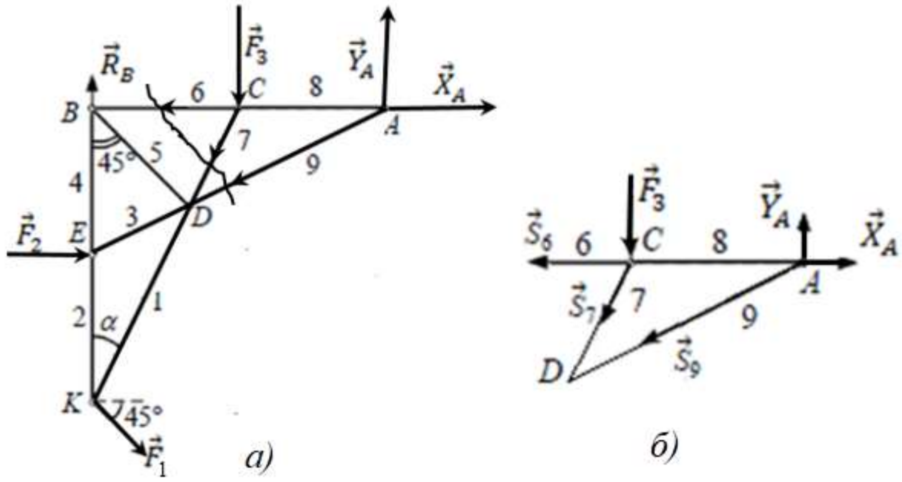


Рис. 4.28

Напишемо рівняння рівноваги у формі моментів сил відносно *точок Ріттера,* тобто тих точок, в яких перетинаються два з трьох перерізаних стрижнів. В нашому випадку точками Ріттера є точки *A*, *C* і *D*.

$$\sum_{k=1}^{6} M_D(\vec{F}_k) = 0;\ \ -F_3 \cdot DCsin\alpha + Y_A \cdot (2 + DCsin\alpha) - X_A \cdot DCcos\alpha + S_6 \cdot DCcos\alpha = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_6

$$S_6 = (F_3 - Y_A)tg\alpha + X_A - \frac{2Y_A}{DCcos\alpha}.$$

$$DC = \frac{2(\sqrt{5}cos\alpha - 1)}{cos\alpha + sin\alpha} = \frac{2}{cos\alpha + sin\alpha} = 1{,}49.$$

$$S_6 = (5 + 1{,}621) \cdot \frac{0{,}447}{0{,}894} - 6{,}121 + \frac{2 \cdot 1{,}621}{1{,}49 \cdot 0.894} = -0{,}38 \text{ кН}.$$

$$\sum_{k=1}^{6} M_C(\vec{F}_k) = 0;\ \ (Y_A - S_9 sin\alpha) \cdot 2 = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_9

$$S_9 = \frac{Y_A}{sin\alpha} = \frac{-1{,}621}{0{,}447} = 3{,}626 \text{ кН}.$$

$$\sum_{k=1}^{6} M_A = (F_3 + S_7 cos\alpha) \cdot 2 = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_7

$$S_7 = -\frac{F_3}{cos\alpha} = -\frac{5}{0{,}894} = -5{,}593 \text{ кН}.$$

Як бачимо, результати з великою точністю співпадають з результатами, знайденими за методом вирізання вузлів.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть формули для обчислення головного вектора і головного моменту плоскої системи сил?
2. В яких випадках плоска система сил приводиться до рівнодійної?
3. В яких випадках плоска система сил зводиться до пари сил?
4. Сформулюйте та запишіть усі форми умов рівноваги для довільної плоскої системи сил?
5. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил.
6. Чому дорівнює, як направлена і де прикладається рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження?
7. Чому дорівнює та де прикладається рівнодійна розподіленого навантаження з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом?

ГЛАВА V
ТЕРТЯ

При механічній взаємодії не гладких тіл в місцях їх дотику виникає сила, яка перешкоджає відносному проковзуванню цих тіл. Таку силу називають *силою тертя*. Розрізняють тертя спокою (статичне тертя), якщо тіла не рухаються одне відносно другого і тертя руху (кінематичне тертя), коли тіла перебувають у відносному русі.

Розрізняють також сухе тертя, коли контактуючі поверхні тіл не змащені, і рідинне тертя, коли контактуючі поверхні змащені. У теоретичній механіці розглядають тільки сухе тертя.

Розгляд всіх особливостей тертя є досить складною фізико механічною проблемою. Точне визначення сил тертя проводять за достатньо складними формулами, де враховуються не тільки механічні, а і електричні, термічні, внутрішньо молекулярні та інші характеристики. В інженерних розрахунках користуються установленими дослідним шляхом закономірностями, які з достатньою для практики точністю відображають основні особливості явища тертя.

§ 1. Закони тертя ковзання

Наближені закони для сухого тертя ковзання були встановлені ще у XVIII ст. французьким фізиком Ш. Кулоном (1736–1806) [2].

Основні особливості сил тертя можна установити за допомогою приладу, схема якого зображена на рис. 5.1.

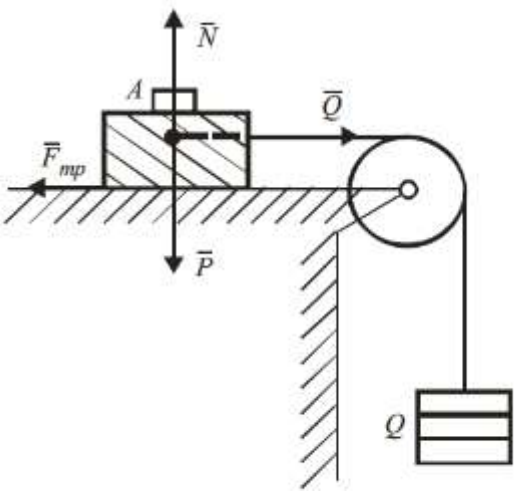


Рис. 5.1

На шорсткій поверхні встановлюється тіло A, на яке з допомогою перекинутої через ідеальний блок нитки діє сила $\vec{Q}$, рівна за величиною вазі підвішеного на нитці вантажу. При рівновазі тіла рушійна сила $\vec{Q}$ врівноважується силою тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Поява цієї сили зумовлена шорсткістю поверхні і наявністю зчеплення з поверхнею тіла, притиснутого силою ваги $\vec{P}$ до поверхні. Поступово збільшуючи вагу вантажу Q одночасно збільшується силу $\vec{Q}$ при одному і тому ж нормальному тиску $\vec{P}$ тіла. В деякий момент вага вантажу Q досягне навантаження Q_{max}, при якому тіло A зрушиться з місця. Очевидно, що в цей момент сила тертя стане найбільшою ($F_{\text{тр}} = F_{max}$) і вона не зможе зрівноважувати силу $\vec{Q}$ при її подальшому збільшенні. Навантажуючи тіло A допоміжними гирками будемо змінювати нормальний тиск $\vec{P}$ тіла на поверхню. Це дає змогу дослідити, як змінюється гранична сила тертя F_{max} в залежності від сили нормального тиску. Ці досліди підтверджують закон Кулона для сухого тертя ковзання:

1) При намірі зрушити одне тіло по поверхні іншого в площині стикання тіл виникає сила тертя, спрямована протилежно напрямку зрушення тіла, яка може приймати значення від нуля до максимальної величини, при досягненні якої починається рух тіла, тобто:

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{max}. \tag{5.1}$$

2) Максимальна сила тертя ковзання пропорціональна силі нормального тиску (нормальній реакції $\vec{N}$), тобто

$$F_{max} = f \cdot N. \tag{5.2}$$

де f – статичний коефіцієнт тертя ковзання.

3) Величина максимальної сили тертя в досить широких межах не залежить від розмірів стичних поверхонь.

4) Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалів і фізичного стану стичних поверхонь, тобто від чистоти обробки поверхонь, вологості, температури та інших умов. Коефіцієнт тертя визначається дослідним шляхом, його значення для різних матеріалів наводиться у довідниках. Для ряду матеріалів величина статичного коефіцієнта сухого тертя має такі значення:

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнта тертя ковзання
Сталь по сталі	0,15
Сталь по чавуну	0,3
Сталь по льоду	0,027
Дерево по дереву	0,4–0,62
Цегла по бетону	0,76
Метал по дереву	0,5–0,6

Закони тертя з достатньою точністю справедливі і для тертя руху. При русі сила тертя протилежна напрямку руху і визначається співвідношенням

$$F_{max} = f' \cdot N. \tag{5.3}$$

де f' – коефіцієнт тертя руху, або динамічний коефіцієнт тертя ковзання, причому $f' < f$. Динамічний коефіцієнт тертя ковзання f' залежить не тільки від матеріалу і стану поверхні, але часто і від швидкості ковзання. Для більшості матеріалів він зменшується при збільшені відносної швидкості, а для деяких матеріалів (шкіра по металу) – збільшується. У наближених технічних розрахунках вважають, що динамічний коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості і приблизно дорівнює статичному коефіцієнту тертя ковзання.

§ 2. Реакція шорсткої поверхні. Кут і конус тертя

Як відзначалось раніше (*§* 3 глава 1), реакція $\vec{R}$ шорсткої поверхні складається із двох складових: нормальної реакції $\vec{N}$ та перпендикулярної до неї сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 5.2). Повна реакція шорсткої поверхні $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ відхилена від нормалі на деякий кут ψ. При зміні сили тертя від нуля до $\vec{F}_{max}$ повна реакція шорсткої поверхні змінюється від $\vec{N}$ до $\vec{R}_{max} = \vec{N} + \vec{F}_{max}$, а кут її нахилу до нормалі зростає від 0 до деякого значення φ. У граничному стані рівноваги (рис. 5.3) повна реакція шорсткої поверхні $\vec{R}_{max}$ відхилена від нормалі на найбільший кут φ, який називають кутом тертя.

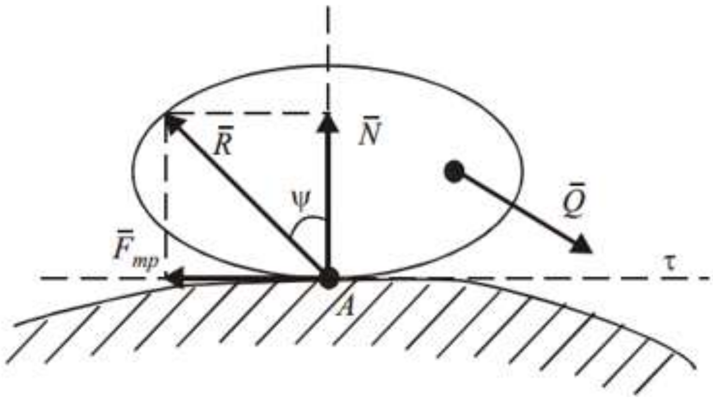


Рис. 5.2

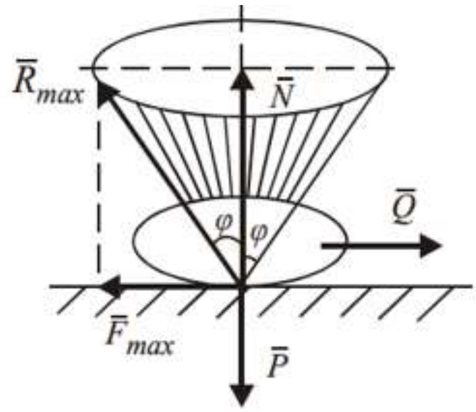


Рис. 5.3

Найбільший кут φ між повною реакцією шорсткої поверхні і напрямком нормальної реакції називають кутом тертя.

Як випливає з рис. 5.3, $tg\varphi = {F_{max}}/{N}$. Згідно із законом Кулона маємо $F_{max} = f \cdot N$, тому

$$tg\varphi = f. \tag{5.4}$$

Отже тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Конусом тертя називають конічну поверхню з кутом 2φ при вершині, яку описує повна реакція шорсткої поверхні, побудована на максимальній силі тертя, при її повороті навколо напрямку нормалі, (див. рис. 5.3).

Використовуючи поняття кута і конуса тертя, можна дати геометричну інтерпретацію стану рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Нехай рівнодійна $\vec{Q}$ прикладених до тіла активних сил, нахилена під кутом α до спільної нормалі стичних поверхонь. Тіло розміщене на шорсткій поверхні (рис. 5.4), Розкладемо цю рівнодійну на складові $\vec{Q} = \vec{Q}_n + \vec{Q}_\tau$, так, що $Q_n = Qcos\alpha$, а $Q_\tau = Qsin\alpha$.

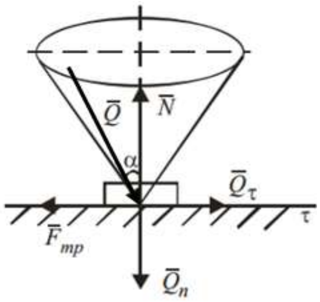


Рис. 5.4

Нормальна складова $\vec{Q}_n$ притискує тіло до поверхні в'язі і врівноважується нормальною реакцією $\vec{N}$, а дотична складова $\vec{Q}_\tau$ намагається зрушити тіло по поверхні. Тіло буде знаходитись в стані рівноваги до тих пір, поки дотична складова $Q_\tau = Qsin\alpha$ не стане перевищувати максимально можливу силу тертя $F_{max} = f \cdot N = f \cdot Qcos\alpha$, тобто за умов $Qsin\alpha \leq f \cdot Qcos\alpha$.

Розділяючи обидві частини нерівності на $Qcos\alpha$ з врахуванням виразу (5.4), одержимо таку необхідну умову рівноваги тіла на шорсткій поверхні:

$$tg\alpha \leq \ tg\varphi, \text{або } \alpha \leq \varphi.$$

До цієї умови не входить значення сили $\vec{Q}$, тому можна зробити такий висновок (див. рис. 5.4): *тіло на шорсткій поверхні не можна вивести із стану рівноваги ніякою силою, якщо лінія дії цієї сили проходить всередині конуса тертя*.

Цим пояснюються відомі явища самогальмування або заклинювання рухомих деталей машин у деяких положеннях [2]. Виходячи з цієї умови, назначають крок різьби гвинта (гайки) різьбових з'єднань та різьбових передач.

§ 3. Тертя кочення

У задачах механіки часто потрібно враховувати тертя кочення – опір, який виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо циліндричний коток радіуса r і вагою P, який під дією горизонтальної сили $\vec{Q}$ рухається по горизонтальній площині (рис. 5.5).

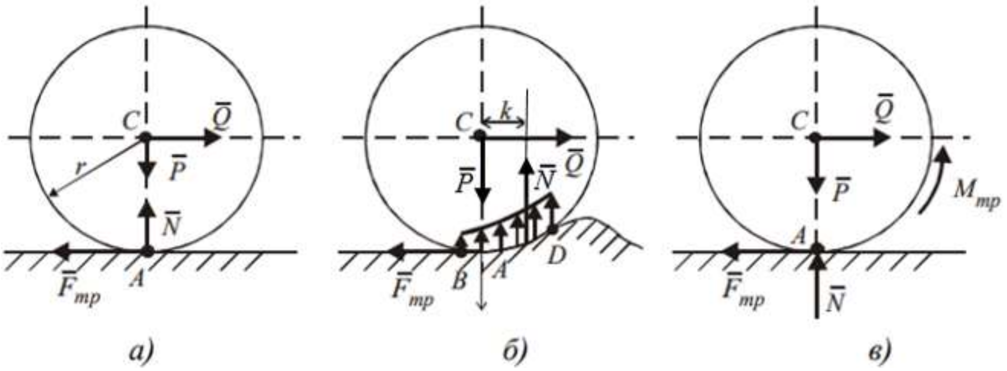


Рис. 5.5

Якщо $Q < F_{max}$, то в точці *A* контакту тіла з поверхнею виникає сила тертя $F_{\text{тр}} = Q$, яка перешкоджає ковзанню котка поверхнею.

При схемі навантаження котка, виконаній відповідно до положення теоретичної механіки про абсолютно тверде тіло (рис. 5.5, а), нормальна реакція $\vec{N}$, прикладена в точці *A* контакту, зрівноважена силою $\vec{P}$ ваги котка, а сили $\vec{F}_{\text{тр}}$ і $\vec{Q}$ створюють пару сил, яка спричиняє кочення. При такій розрахунковій схемі коток почне рухатися при будь-якому малому значенні сили $\vec{Q}$, що не відповідає дійсності.

Істинне уявлення про тертя кочення дає розрахункова схема з врахуванням деформації опорної поверхні і котка (рис.5.5, б), коли дотик котка до нерухомої площини відбувається не в точці *A*, а вздовж деякої дуги *BD*, яка визначає поверхню контакту. При цьому нормальна реакція $\vec{N}$, як результуюча розподілених на ділянці *AB* сил нормальних реакцій, буде зміщеною від центра в напрямку дії сили $\vec{Q}$ на деяку відстань, яка збільшується зі збільшенням величини рушійної сили $\vec{Q}$. При цьому пара сил $(\vec{Q}, \vec{F}_{\text{тр}})$, врівноважується парою $(\vec{P}, \vec{N})$, момент якої називають моментом тертя кочення $M_{\text{тр}}$.

У граничному стані рівноваги, коли нормальна реакція зміщується на найбільшу відстань k (див. рис. 5.5, б), момент тертя досягає максимальної величини M_{max}, і коток починає котитись поверхнею.

Це найбільше зміщення k нормальної реакції від центра котка в напрямку дії рушійної сили, при якому коток починає кочення, **називається коефіцієнтом тертя кочення**. Він має розмірність одиниці довжини і його виражають у міліметрах. Для випадку кочення вагонного колеса стальною рейкою $k = 0{,}5$мм.

Для уявлення явища тертя кочення у межах статики абсолютно твердого тіла розрахункова схема виконується без розгляду деформації та зміщення нормальної реакції (рис. 5.5, в), вважаючи опором коченню момент тертя $M_{\text{тр}}$. Це дозволяє наближені закони тертя кочення викласти подібно до законів тертя ковзання:

1) При намірі перекотити циліндричне тіло шорсткою поверхнею виникає опір коченню у вигляді моменту тертя кочення $M_{\text{тр}}$, величина якого набуває значення у межах від нуля до максимального, коли починається кочення:

$$0 \leq M_{\text{тр}} \leq M_{max}. \tag{5.5}$$

2) Найбільший момент M_{max} у широких межах не залежить від радіуса котка.

3) Максимальний момент тертя кочення пропорційний силі нормального тиску

$$M_{max} = k \cdot N. \tag{5.6}$$

де k – коефіцієнт тертя кочення.

4) Коефіцієнт тертя кочення залежить від матеріалу котка, площини і фізичного стану їх поверхонь.

Для аналізу явищ тертя корисно порівняти коефіцієнт f тертя ковзання зі співвідношенням k/r, через яке виражається максимальна сила тертя кочення

$$F_{max} = Q_{max} = \frac{k}{r} \cdot N. \tag{5.7}$$

Для більшості матеріалів відношення k/r значно менше статичного коефіцієнта тертя f. Цим пояснюється широке застосування в техніці явища кочення в транспортних засобах та інших конструкціях (колеса, котки, шарикопідшипники) [2].

§ 4. Розв'язування задач рівноваги тіла на шорсткій поверхні

При розв'язуванні задач на рівноваги тіла при наявності тертя використовують загальну методику розв'язування задач статики (див. *§* 8 глава 1). При цьому реакцію шорсткої поверхні представляють двома складовими: нормальною реакцією $\vec{N}$ та силою $\vec{F}_{\text{тр}}$. У випадку тертя кочення до цих реакцій додають пару сил з моментом тертя $M_{\text{тр}}$, дія якої перешкоджає коченню.

Розглядаючи граничний стан рівноваги тіла, коли сила тертя або момент тертя досягають свого найбільшого значення, до складених рівнянь рівноваги тіла добавляють залежність сил тертя (5.2) або моменту тертя (5.6) від нормальної реакції.

Приклад 5.1

Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким він надітий на вертикальний круглий стояк (рис. 5.6); довжина втулки $b = 2$см; у точці E на відстані a від осі стояка до стрижня підвішений вантаж P.

Нехтуючи вагою стрижня AB визначити відстань a таку, щоб стрижень знаходився в рівновазі під дією вантажу P, якщо коефіцієнт тертя між стрижнем і стояком $f = 0{,}1$.

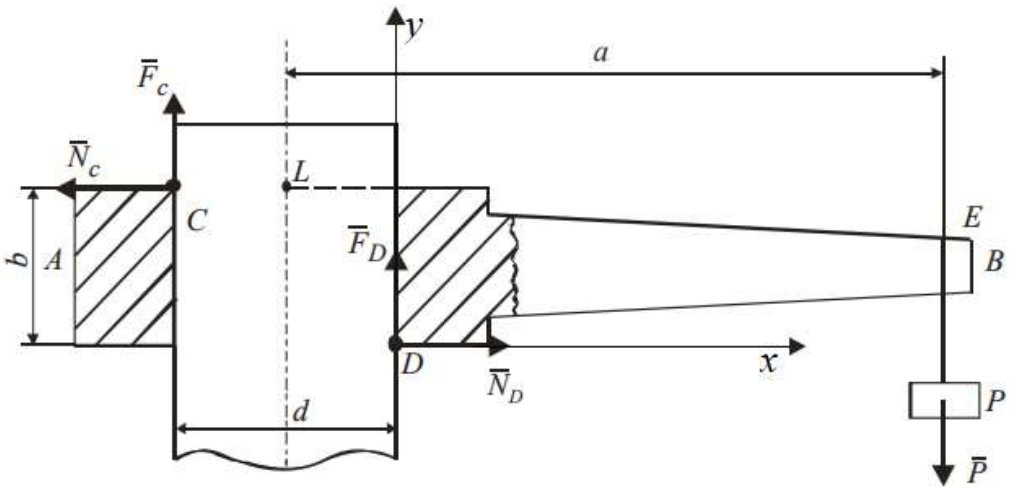


Рис. 5.6

Розв'язання. Розглянемо граничне положення рівноваги стрижня *AB*, коли вантаж *P* знаходиться на відстані a від осі стояка. В тому положенні на стрижень діють активна сила ваги вантажу $\vec{P}$ та реакції $\vec{N}_C$, $\vec{N}_D, \vec{F}_C, \vec{F}_D$ шорсткої поверхні в точках *C* і *D* контакту втулки із стояком, де $\vec{F}_C, \vec{F}_D$ – граничні сили тертя. Складемо рівняння рівноваги, вибравши точку L в якості моментної. Точка L знаходиться на осі стояка діаметром d на рівні верхнього торця втулки (рис. 5.6):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad N_D - N_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad F_D + F_C - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_L(\vec{F}_k) = 0. \ N_D \cdot b + (F_D - F_C) \cdot \frac{d}{2} - P \cdot a = 0.$$

Додаємо до цих рівнянь залежність граничних сил тертя від нормальних реакцій:

$$F_C = f \cdot N_C; \ \ F_D = f \cdot N_D.$$

З першого рівняння маємо $N_D = N_C = N$.

Із другого рівняння маємо: $2 \cdot f \cdot N - P \ = \ 0$, або $N = {}^{P}\!/_{2f}$. Тоді підставляючи ці значення в третє рівняння, одержимо:

$$N \cdot b - \ P \cdot a = \ 0, \text{або } P\left(\frac{b}{2f} - a\right),$$

Звідки

$$a = \frac{b}{2f} = 10\text{см}.$$

Приклад 5.2

Драбина AB вагою $P = 200\,H$ опирається на вертикальну стіну і горизонтальну підлогу (рис. 5.7). Коефіцієнт тертя драбини по шорсткій поверхні стіни в точці A дорівнює $f_1 = 0.4$, а по підлозі в точці B $f_2 = 0.5$. Під яким кутом α до підлоги треба поставити драбину, щоб нею змогла піднятись доверху людина вагою $90\,H$?

Розв'язання. Нормальні реакції стіни і підлоги в точках A і B позначимо відповідно $\vec{N}_A$ та $\vec{N}_B$, а сили тертя в цих точках $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Тоді драбина AB буде в рівновазі під дією шести сил: $\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ та сили $\vec{P}$ ваги драбини, прикладеної посередні AB і сили $\vec{Q}$ ваги людини, прикладеної в точці A.

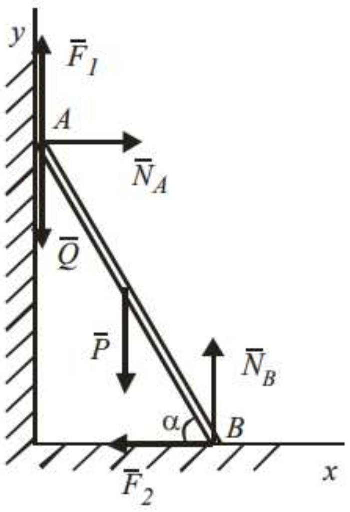


Рис. 5.7

Складемо рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad N_A - F_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad N_B - P - Q + F_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0. \left(N_B - \frac{P}{2}\right) \cdot ABcos\alpha - F_2 \cdot ABsin\alpha = 0.$$

Оскільки кут α – найменший кут нахилу драбини, при якому вона знаходиться на межі спокою і ковзання, тоді

$$F_1 = f_1 \cdot N_A; \;\; F_2 = f_2 \cdot N_B.$$

Підставивши F_1 і F_2 в рівняння рівноваги, одержимо:

$$N_A - f_2 \cdot N_B = 0;$$

$$f_1 \cdot N_A + N_B = P + Q;$$

$$(2N_B - P)cos\alpha - f_2 \cdot N_B sin\alpha = 0.$$

З перших двох рівнянь знайдемо

$$N_B = \frac{P+Q}{1+f_1 f_2};\ \ N_A = \frac{f_2(P+Q)}{1+f_1 f_2}.$$

З третього рівняння маємо

$$tg\alpha = \frac{2N_B - P}{2f_2 \cdot N_B} = 1.73;\ \alpha = arctg1.73 = 60°.$$

Приклад 5.3

Скільки сипучого матеріалу (наприклад піску) можна розмістити на круглій площадці діаметром $d = 20$м, якщо питома вага матеріалу складає $\gamma = 50$ кН/м^3, а коефіцієнт тертя між частинками становить $f = 0,7$.

Розв'язання. Сипучий матеріал на горизонтальній площадці набуває форми конуса. Розглянемо рівновагу деякої частинки M (рис. 5.8, *а*) матеріалу, що лежить на цій поверхні конуса і знаходиться в рівновазі під дією сили ваги $\vec{G}$, нормальної реакції $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Трикутник зрівноважених сил, які діють на частинку матеріалу (рис. 5.8, *б*), повинен бути замкнутим, тому

$$tg\alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

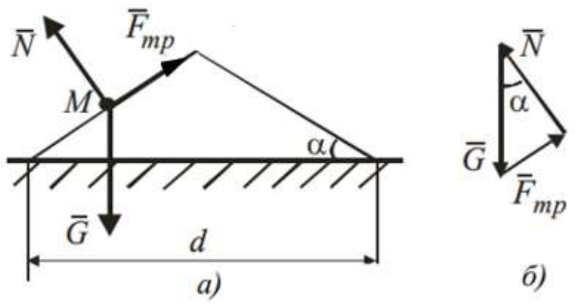


Рис. 5.8

Тоді об'єм конуса, створеного сипучим матеріалом,

$$V = \frac{1}{12}\pi d^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 \cdot \frac{d}{2} tg\alpha = \frac{1}{24}\pi d^3 f,$$

а вага сипучого матеріалу

$$P = \gamma \cdot V = \frac{1}{24}\pi\gamma d^3 f = 36633,3\ \text{к}H.$$

Приклад 5.4

Визначити, при яких значеннях кута α нахилу площини до горизонталі циліндр радіуса *R*, розміщений на похилій площині, залишиться в стані рівноваги, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює *f*, а тертя кочення *k* (рис. 5.9).

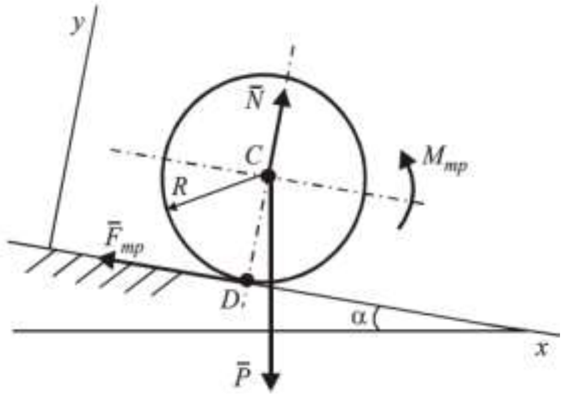


Рис. 5.9

Розв'язання. Розглянемо граничне положення рівноваги котка, коли на нього діють сила ваги $\vec{P}$, нормальна реакція $\vec{N}$, сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$ і момент тертя кочення $M_{\text{тр}}$. Складемо рівняння рівноваги, вибравши осі координат, як показано на рисунку:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ P sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \ N - P cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_D\left(\vec{F}_k\right) = 0.\ M_{\text{тр}} - P sin\alpha \cdot R = 0.$$

Крім цього, для виключення ковзання циліндра та його кочення повинні виконуватись нерівності

$$F_{\text{тр}} \le f \cdot N;\quad M_{\text{тр}} \le k \cdot N.$$

З рівнянь рівноваги визначаємо:

$$F_{\text{тр}} = P sin\alpha;\ \ N = P cos\alpha;\ \ M_{\text{тр}} = PR sin\alpha.$$

Підставивши ці величини в нерівності, одержимо:

$$P sin\alpha \le f \cdot\ P cos\alpha;\ \ PR sin\alpha \le k \cdot P cos\alpha,\ \text{ або }\ tg\alpha \le f,\qquad tg\alpha \le \frac{k}{R}.$$

Для збереження рівноваги циліндра ці дві нерівності повинні виконуватись одночасно.

Питання для самоконтролю

1. Коли виникає сила тертя ковзання, як вона змінюється? Запишіть формулу для визначення максимальної сили тертя ковзання.
2. Від чого залежить коефіцієнт тертя ковзання і яку він має розмірність?
3. Що таке кут і конус тертя? Який зв'язок між ними і коефіцієнтом тертя?
4. Коли тіло на шорсткій поверхні залишається в рівновазі незалежно від величини рушійної сили? Умова самогальмування в різьбових з'єднаннях?
5. В яких випадках виникає сила тертя кочення? Запишіть формулу для визначення і межі зміни моменту тертя кочення?
6. Фізична суть та одиниця вимірювання коефіцієнта тертя кочення.

ГЛАВА VI
ЦЕНТР ВАГИ

§ 1. Центр ваги твердого тіла і його координати

Сили ваги частинок твердого тіла, розміщеного поблизу поверхні Землі, являють собою систему збіжних сил, лінії дії яких перетинаються у центрі земної кулі. Але незначні розміри матеріальних тіл у порівнянні з розмірами Землі дозволяють вважати сили ваги частинок одного тіла паралельними між собою. Ці сили завжди направлені вертикально вниз і не змінюють свого напрямку при будь-якому переміщенні тіла. Така система паралельних сил $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ ваги частинок тіла (рис. 6.1) не може знаходитись у стані рівноваги чи зводитись до пари сил; вона еквівалентна одній рівнодійній силі $\vec{P}$, модуль якої дорівнює силі ваги тіла і визначається рівністю

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k. \qquad (6.1)$$

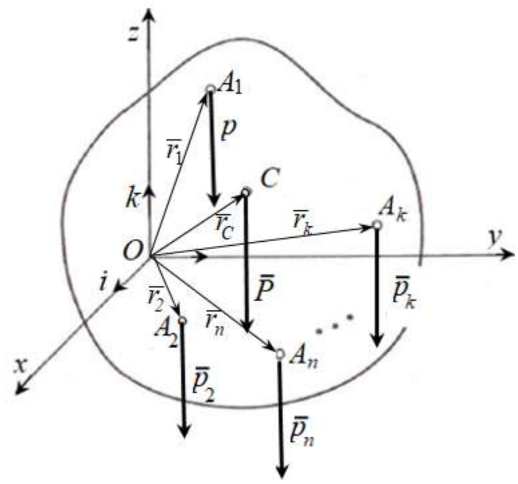


Рис. 6.1

При довільному повороті тіла сили $\vec{p}_k$ залишаються прикладеними в одних і тих же точках тіла і паралельні одна одній. Тому рівнодійна $\vec{P}$ сил $\vec{p}_k$ буде при будь-яких положеннях тіла проходити через одну і ту ж його точку C, яку називають центром ваги тіла. Отже, центром ваги твердого тіла називається незмінно зв'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної сил ваги частинок цього тіла при будь-яких положенні тіла в просторі. Знайдемо положення центра ваги тіла відносно прямокутної системи координат (див. рис. 6.1), напрямок осей якої задано ортами $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, а напрямок сил ваги – одиничним вектором $\vec{e} = -\vec{k}$.

Тоді $\vec{p}_k = p_k \cdot \vec{e}$; $k = 1, \dots, n$; $\vec{P} = \vec{e} \cdot \sum p_k$, де $p_1, p_2, \dots, p_n$ – модулі сил ваги частинок тіла.

На підставі теореми Варіньона векторна сума моментів сил ваги часток тіла відносно центра O дорівнює моменту сили ваги тіла відносно цього центра, тобто

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{p}_k), \text{або } \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times \vec{p}_k),$$

де $\vec{r}_C$ — радіус-вектор центра ваги тіла, проведений з точки O в точку C, $\vec{r}_k$ – радіус-вектор точки A_k прикладання сили $\vec{p}_k$, проведений із тієї ж точки O.

Підставляючи сюди вирази сил через одиничний вектор $\vec{e}$, одержимо:

$$\vec{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} p_k \vec{e} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k p_k \times \vec{e}).$$

Перенісши члени рівняння з правої частини у ліву і винісши за дужки спільний співмножник $\vec{e}$, одержимо:

$$\left(\vec{r}_C \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k p_k\right) \times \vec{e} = 0.$$

Це рівняння виконується за умови рівності нулю виразу в дужках, тобто

$$\vec{r}_C \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k p_k,$$

звідки визначається радіус-вектор центра ваги тіла:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k p_k \tag{6.2}$$

Проектуючи рівність (6.2) на осі координат, одержимо формули для визначення координат центра ваги тіла:

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} x_k p_k;\ y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} y_k p_k;\ z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} z_k p_k, \tag{6.3}$$

де x_k, y_k, z_k – координати точок прикладення сил ваги $\vec{p}_k$ частинок тіла.

§ 2. Координати центрів ваги однорідних тіл

Для однорідного тіла вага кожної його частинки пропорційна її об'єму v_k, а вага P всього тіла пропорціональна об'єму V цього тіла, тобто $p_k = \gamma v_k$ і $P = \gamma V$, де γ – питома вага тіла. Підставляючи ці значення p_k і P у формули (65) і поділивши чисельник та знаменник на γ, одержимо:

$$x_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{n} x_k v_k;\ y_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{n} y_k v_k;\ z_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{n} z_k v_k. \tag{6.4}$$

Як видно із формул (6.4), положення центра ваги однорідного тіла не залежить від фізичних властивостей тіла, а визначається тільки його геометричною формою і розмірами. Тому точка *C*, координати якої визначаються формулами (6.4), називають центром ваги об'єму.

Під поняттям центра ваги поверхні розуміють центр ваги однорідних плоских фігур, пластин однакової товщини, координати якого знаходять за аналогічними формулами:

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} x_k s_k;\ y_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} y_k s_k;\ z_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} z_k s_k, \tag{6.5}$$

де s_k – площа елементарної ділянки поверхні, *S* – площа всієї поверхні плоскої фігури.

Таким же чином одержують координати центра ваги лінії:

$$x_C = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k l_k;\ y_C = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} y_k l_k;\ z_C = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} z_k l_k, \qquad (6.6)$$

де L – довжина всієї лінії, l_k– довжина її частини.

§ 3. Методи визначення координат центрів ваги тіл

При визначенні положень центрів ваги тіл складної форми застосовують такі конкретні методи.

1) *Метод симетрії*. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться в площині, на осі або в центрі симетрії.

2) *Метод розбивання і доповнення*. Тіло розбивають на скінчену кількість частин простої форми, центри ваги яких відомі або легко знаходяться. Якщо тіло має вирізи, пустоти, то їх вважають заповненими матеріалом з від'ємною масою. Координати центра ваги всього тіла обчислюють, застосовуючи формули (6.4), (6.5), (6.6), де доданки для частин вирізів, пустот враховують з від'ємним значенням.

3*) Метод інтегрування*. Якщо однорідне тіло неможливо розбити на скінчену кількість частин, положення центрів ваги яких відомі, то його розбивають на будь-які малі об'єми Δv_k, для яких формули (6.4) набудуть вигляду:

$$x_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta v_k;\ y_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta v_k;\ z_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} z_k \Delta v_k. \qquad (6.7)$$

де x_k, y_k, z_k – координати точки, розміщеної всередині об'єму Δv_k. Переходячи у формулах (69) до границі, при $n \to \infty$, коли $\Delta v_k \to 0$, отримаємо, що суми в чисельниках цих виразів перетворюються в інтеграли по всьому об'єму тіла, тобто:

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dv;\ \ y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dv;\ \ z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dv. \qquad (6.8)$$

Аналогічно для координат центрів ваги площ і ліній одержимо із формул (6.5) і (6.6):

$$x_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} x ds;\ \ y_C = \frac{1}{V}\int_{(S)} y ds;\ \ z_C = \frac{1}{V}\int_{(S)} z ds. \qquad (6.9)$$

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl;\ \ y_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} y dl;\ \ z_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} z dl. \qquad (6.10)$$

§ 4. Центри ваги деяких однорідних тіл

1) Центр ваги дуги кола. Визначимо положення центра ваги дуги кола радіуса R, центральний кут якої 2α (рис.6.7). Виберемо систему координат з початком в центрі кола і направимо вісь x так, щоб вона була віссю симетрії дуги. Тоді центр ваги дуги знаходиться якраз на цій осі, тобто координата $y_C = 0$. Для знаходження координати x_C скористаємось інтегральним методом, застосувавши першу з формул (6.10). Розіб'ємо дугу на елементарні відрізки, один з яких MM' довжиною $dl = R \cdot d\varphi$, відхилений від осі Ox на кут φ. Координата x центра ваги цього відрізка $x = Rcos\varphi$. Довжина дуги AB буде $L = 2R\alpha$.

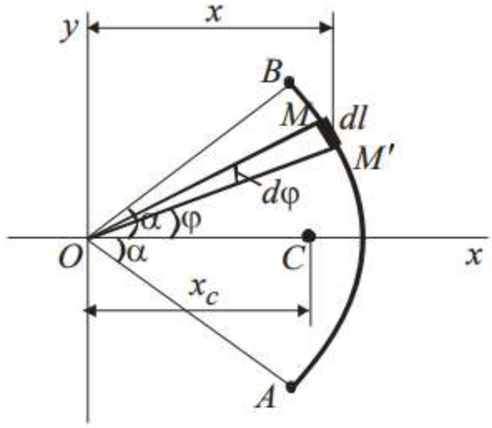


Рис. 6.2

На підставі формули (6.10) матимемо:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{1}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 cos\varphi d\varphi, \text{ звідки}$$

$$x_C = R\frac{sin\alpha}{\alpha}. \qquad (6.11)$$

Координату центра ваги півкола одержимо при $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$:

$$x_C = \frac{2R}{\pi}.$$

2) *Центр ваги площі трикутника.* Розіб'ємо площу трикутника (рис. 6.8) лініями, паралельними стороні *AD* на тоненькі смужки. Центри ваги цих смужок будуть знаходитись на медіані *BE* трикутника. Отже центр ваги трикутника лежить на цій медіані. Провівши аналогічне розбивання площі трикутника лініями, паралельними стороні *AB*, дійдемо висновку, що центр ваги площі трикутника знаходиться на перетині його медіан. Як відомо, медіани перетинаються на відстані однієї третьої від основи і двох третіх від вершини, тому $CE = {}^{1}/_{3}\,BE$ (див. рис.6.3).

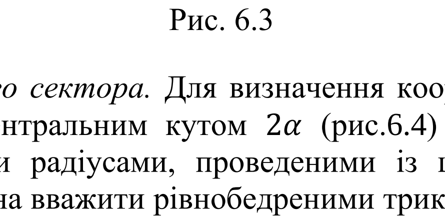


Рис. 6.3

3) *Центр ваги кругового сектора.* Для визначення координат центра ваги кругового сектора OAB радіуса R з центральним кутом 2α (рис.6.4) розіб'ємо площу сектора на елементарні однакові сектори радіусами, проведеними із центра O. Внаслідок малості елементарних секторів їх можна вважити рівнобедреними трикутниками, центр ваги кожного з яких знаходиться на відстані ${}^{2}/_{3}\,R$ від вершини О. Отже центри ваги елементарних секторів

лежать на дузі DE, так що $OD = {}^{2}/_{3}\,R$. Тому центр ваги сектора OAB і центр ваги дуги DE є одна і та ж точка, координати якої, відповідно до формули (6.11) будуть

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{sin\alpha}{\alpha}; \;\; y_C = 0. \tag{6.12}$$

Коли $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$, одержимо координату центра ваги півкола:

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

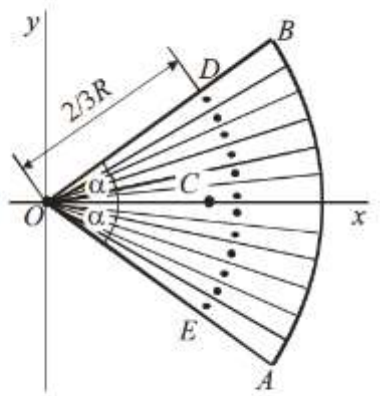


Рис. 6.4

§ 5. Розв'язування задач на знаходження координат центра ваги.

Приклад 6.1

Визначити координати центра ваги плоскої пластини, зображеної на рис. 6.10, яка має форму кутника вказаних розмірів, і в якій виконано квадратний виріз. Усі розміри вказані в сантиметрах.

Розв'язання. Проведемо осі координат. Розіб'ємо пластину на два прямокутники та один квадратний виріз. Обчислимо площі і координати центрів ваги кожної з цих фігур.

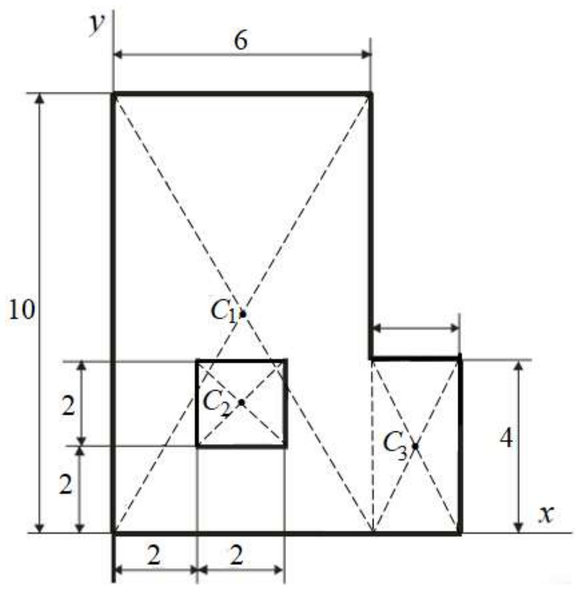


Рис. 6.5

Площа більшого прямокутника $S_1 = 6 \cdot 10 = 60$ см^2, а координати його центра ваги $x_1 = 3$ см, $y_1 = 5$ см.

Менший прямокутник має площу $S_2 = 2 \cdot 4 = 8$ см^2, координати центра ваги цього прямокутника $x_2 = 7$ см, $y_2 = 2$ см.

Площа вирізаного квадрата $S_3 = -2 \cdot 2 = -4$ см^2, координати центра ваги $x_3 = 3$ см, $y_3 = 3$ см. Координати центра ваги всієї пластини знайдемо за формулами (6.5):

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{3 \cdot 60 + 7 \cdot 8 - 3 \cdot 4}{60 + 8 - 4} = 3{,}5 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{5 \cdot 60 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4}{60 + 8 - 4} = 4{,}75 \text{ см}.$$

Приклад 6.2

Знайти центр ваги однорідної криволінійної пластинки (на рис. 6.6 вона заштрихована). Пластинка одержується вирізанням із квадрата зі стороною a четверті круга (кругового сектора з центральним кутом $\frac{\pi}{2}$), центр якого перебуває в вершині *O* квадрата.

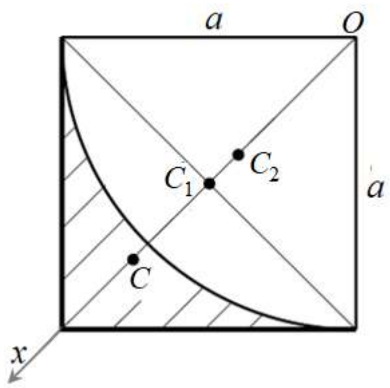


Рис.6.6

Розв'язання. Так як центр ваги квадрата та кругового сектора відомі, то доцільно скористатись методом від'ємних площ. З міркувань симетрії очевидно, що центр ваги *C* криволінійної пластинки лежить на діагоналі квадрата. Проведемо вісь *Ox* вздовж осі симетрії пластинки. Нехай C_1, S_1 – центр ваги та площа квадрата; C_2, S_2 – центр ваги та площа четверті круга; $C -$ центр ваги криволінійної пластинки. Тоді

$$x_{C_1} = \frac{a}{\sqrt{2}};\ \ S_1 = a^2;\ \ x_{C_2} = \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi};\ \ S_2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$x_C = \frac{x_{C_1} \cdot S_1 - x_{C_2} \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{4a}{3\sqrt{2}(4 - \pi)} = 1{,}098a.$$

Приклад 6.3

Два однорідних стрижні *AB* і *BC* однакового поперечного перерізу, з яких *AB* удвічі коротший за *BC*, з'єднані жорстко своїми кінцями під кутом 60°, утворюють ламаний важіль *ABC*. В кінці *A* важіль підвішений на нитці. Визначити: кут α нахилу стрижня *BC* до горизонталі при рівновазі важеля; поперечними розмірами стрижнів знехтувати.
Дано: *AB*:*BC*=1:2; $\angle$ *ABC* = 60°; Знайти: α -?

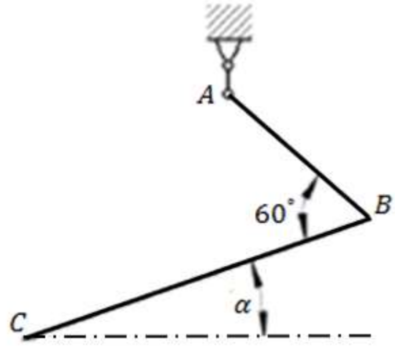


Рис. 6.7

Розв'язання. Проаналізуємо сили, під дією яких ламаний важіль знаходиться в рівновазі. Активна сила – це сила тяжіння важеля, яку прикладемо умовно в його центрі ваги (точка M на рис. 6.8). Важіль не вільний, так як в точці A він підвішений на нитці, яка є в'яззю. Звільнившись від в'язі дію її на важіль замінюємо реакцією, яка направлена вздовж нитки від важеля. Таким чином важіль повинен знаходитися в рівновазі під дією двох сил – сили тяжіння $\vec{P}$, прикладеної в точці M і направленої вертикально вниз і сили натягу нитки $\vec{T}$, прикладеної в точці A (рис. 6.8).

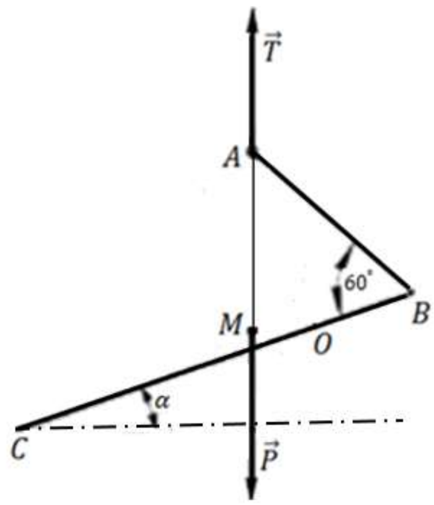


Рис. 6.8

Відомо, що тіло може бути в рівновазі під дією двох сил тільки тоді, коли ці сили рівні за величиною і направлені в протилежні сторони вздовж однієї прямої (перша аксіома статики). Звідси випливає, що реакція нитки повинна бути направленою вертикально вгору і центр ваги ламаного важеля повинен лежати на одній вертикалі з точкою A. Звідси також випливає, що при підвішуванні будь якого несиметричного тіла на нитці точка A не може відхилитися від вертикалі, коли тіло буде в рівновазі. Отже для знаходження кута α ми повинні використати умову, що *центр ваги важеля повинен знаходитися на вертикалі,* проведеній через точку A.

Позначимо довжину стрижня AB через l. Тоді довжина стрижня BC буде рівна $2l$. Центр ваги стрижня AB знаходиться в точці C_1, а стрижня BC в точці C_2 (рис. 6.9).

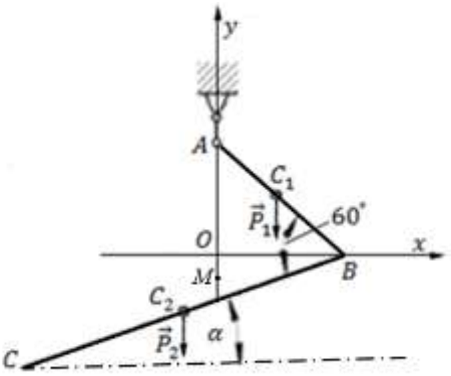


Рис. 6.9

Так як стрижні однорідні і однакового поперечного перерізу, то вага кожного з них пропорціональна довжині. Отже нам потрібно знайти координати центра ваги конструкції, яка складається з двох стрижнів. Виберемо систему координат, як показано на рис. 6.9. Тоді координати центра ваги важеля знаходяться за формулами

$$x_M = \frac{x_{C_1} l_1 + x_{C_2} l_2}{l_1 + l_2}, \qquad y_M = \frac{y_{C_1} l_1 + y_{C_2} l_2}{l_1 + l_2},$$

де $l_1 = l,\ l_2 = 2l$.

Зауважимо, що при такому виборі системи координат нам достатньо знайти тільки координату x_M. Це пов'язано з тим, що центр ваги важеля повинен лежати на вертикалі, проведеній через точку А. Отже координата x_M в даній системі координат повинна бути рівною нулю. Таким чином умовою для знаходження кута α якраз і буде служити умова $x_M = 0$.

Знайдемо координати x_{C_1} і x_{C_2}.

$$\angle OBC = \alpha, \qquad \angle ABO = 60^{\circ} - \alpha.$$

$$x_{C_1} = \frac{l}{2}\cos(60^{\circ} - \alpha) = \frac{l}{2}\left(cos\alpha + \sqrt{3}sin\alpha\right).$$

$$x_{C_2} = l\cos(60^{\circ} - \alpha) - lcos\alpha = \frac{l}{2}\left(\sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha\right).$$

$$x_M = \frac{\frac{l}{2}\left(cos\alpha + \sqrt{3}sin\alpha\right)\cdot l + \frac{l}{2}\left(\sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha\right)\cdot 2l}{l + 2l} = \frac{l}{12}\left(-3cos\alpha + 5\sqrt{3}sin\alpha\right).$$

$$x_M = 0 \ \Rightarrow\ -3cos\alpha + 5\sqrt{3}sin\alpha = 0.$$

$$tg\alpha = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad \alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) \approx 19{,}1^{\circ}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називають центром ваги тіла? При переміщенні тіла в просторі центр ваги тіла змінює своє положення відносно точок тіла чи ні?
2. Запишіть формули для визначення радіус-вектора центра ваги твердого тіла та його координат?
3. За якими формулами визначаються координати однорідного тіла.
4. Визначення положення центра ваги площі, якщо відомі положення центра ваги окремих її частин?
5. Методи визначення координат центрів ваги тіл. Метод симетрії. Як знайти центр ваги однорідної пластини у формі паралелограма, трикутника?
6. Суть методу доповнення (метод від'ємних мас)?
7. Центри ваги деяких однорідних тіл: дуги кола, площі кругового сектора. Запишіть формули.

РОЗДІЛ II
КІНЕМАТИКА

ГЛАВА I
КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух системи матеріальних точок з геометричної точки зору, зокрема рух абсолютно твердого тіла і матеріальної точки незалежно від діючих на них сил, тобто незалежно від тих причин, які викликають і змінюють цей рух. Інакше кажучи, *кінематика* – це частина механіки, в якій вивчаються геометричні властивості рухів.

Рухом називається зміна положення тіла з плином часу відносно якого небудь іншого тіла. Це тіло, відносно якого вивчається рух нашого тіла, називається тілом відліку. З цим тілом зв'язують деяку систему координат. Сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і приладу для вимірювання часу (годинника) називається системою відліку. Від геометрії кінематика відрізняється тим, переміщення тіл у просторі розглядаються з врахуванням часу, за який відбувається ці переміщення. Тому кажуть, що кінематика – це геометрія чотирьох вимірів. Таке уявлення виявилось плідним у теорії відносності, в якій при вивченні руху враховується взаємозв'язок простору і часу одного з другим та з рухомою матерією. Світ за термінологією Г. Мінковського розглядається як просторово-часовий многовид чотирьох вимірів, а подія – це точка цього многовиду [3].

В класичній механіці метричні властивості простору вважаються незалежними від матерії, що рухається в ньому, простір розглядається як тривимірний, евклідів, він є неперервним однорідним і ізотропним. Час в механіці вважається універсальним, не пов'язаним з простором і рухом; це скалярна неперервна змінна величина, яка у всіх системах відліку набуває одного й того ж значення, якщо за початок відліку вибрана спільна для них подія.

Тривимірний евклідів простір і абсолютний час наближено відображають реальні властивості простору та часу. Це наближення дає достатню для практики точність при вивченні рухів твердих тіл з малими порівняно зі швидкістю світла швидкостями [3].

Залежність від часу параметрів, які однозначно визначають положення тіла (точки) у вибраній системі відліку, описується відповідними рівняннями, які називаються **законом руху** тіла (точки). Закон руху вважається відомим, якщо можна визначити положення тіла в просторі в довільний момент часу.

Однією із задач кінематики є задання закону руху, тобто встановлення математичних рівнянь, які дозволяють визначити положення точки або тіла відносно системи відліку в будь-який момент часу.

Інша, основна задача кінематики полягає у визначенні за заданим законом руху кінематичних характеристик цього руху: траєкторії, швидкості і прискорення точки, кутової швидкості та кутового прискорення тіла.

Вивчення кінематики починають з вивчення руху окремої точки. **Траєкторією** точки називають геометричне місце послідовних положень рухомої точки. Траєкторія – це неперервна лінія, яка може бути прямою або кривою. Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то її рух називають прямолінійним, а якщо ця умова не виконується, то – криволінійним.

§ 2. Способи задання руху точки

Рух точки в просторі можна задати векторним, координатним і натуральним способами.

Векторний спосіб. Положення рухомої точки M в просторі в кожний момент часу визначається її радіусом-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, проведеним з деякої нерухомої точки O простору в рухому точку M (рис. 1.1). При русі точки радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу t відповідає певне значення $\vec{r}$. Отже, $\vec{r}$ є функцією часу t, тобто

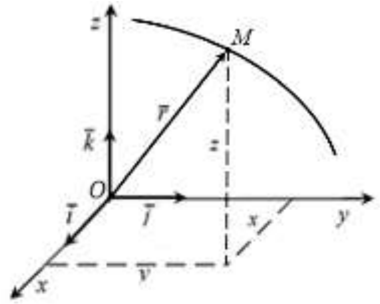


Рис. 1.1

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.1)$$

Функцію $\vec{r}(t)$ вважають однозначною, тому що рухома точка у будь-який момент часу може знаходитися лише в одному місці простору. Крім того, $\vec{r}(t)$ має бути неперервною функцією. У більшості задач механіки ця функція є двічі диференційованою функцією часу t. Рівняння (1.1) називається *кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі*. Це рівняння виражає закон руху точки, а також рівняння траєкторії точки у векторній формі.

Геометричне місце кінців змінного вектора, початок якого весь час знаходиться в одній і тій же точці, називають *годографом* вектора. Отже траєкторія точки є годографом її радіуса-вектора.

Векторний спосіб застосовується в основному в теоретичних дослідженнях руху.

Координатний спосіб. Положення точки визначається її координатами відносно деякої системи координат. Так, наприклад, у прямокутній декартовій системі координат задаються координати x, y, z рухомої точки M (див. рис. 1.1) як відомих функцій часу:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \qquad (1.2)$$

Між векторним і координатним способами задання руху точки існує такий зв'язок:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \qquad (1.3)$$

де $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$– орти координатних осей; $x, y, z -$ проекції радіуса вектора точки на осі координат, або координати точки M.

Рівняння (1.2) також можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки, де параметром виступає час t. Для того, щоб знайти рівняння траєкторії в координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами точки, потрібно виключити з цих рівнянь параметр t.

Крім декартової системи координат можуть застосовуватися й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні, тощо.

Якщо рух точки задано в полярних координатах (рис.1.2), то як функції часу задаються координати r і φ:

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t), \qquad (1.4)$$

де r – полярний радіус; φ – кут між полярною віссю та полярним радіусом [1].

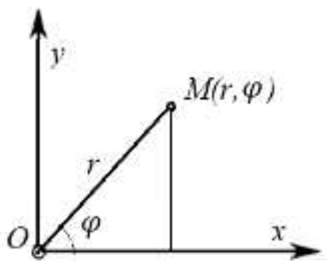


Рис. 1.2

Виключивши параметр t з рівнянь (1.4), дістанемо $F(r,\varphi) = 0$ – рівняння траєкторії в полярних координатах.

У тривимірному просторі застосовуються також циліндричні (рис. 1.3 а) і сферичні (рис.1.3 б) координати.

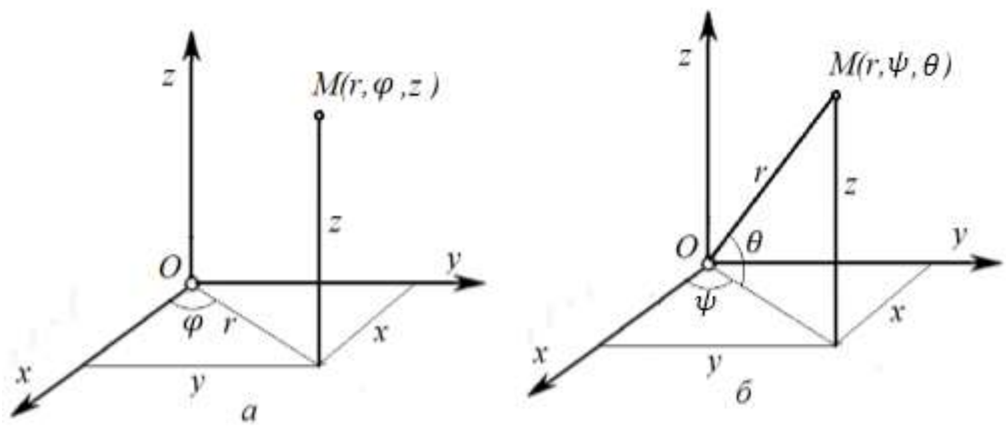


Рис.1.3

Рівняння руху точки у циліндричних координатах мають вигляд

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t), z = z(t). \qquad (1.5)$$

У сферичних координатах положення точки визначається полярним радіусом r, кутами ψ та θ (полюсний кут), а рівняння руху точки мають вигляд [1]

$$r = r(t), \psi = \psi(t), \theta = \theta(t). \qquad (1.6)$$

Натуральний спосіб. В цьому випадку задається траєкторія точки із вибраними на ній початком O і додатнім напрямком відліку дугової координати s точки (рис. 1.4). Тоді положення точки M у будь який момент часу можна визначити із залежності

$$s = s(t), \qquad (1.7)$$

яку називають рівняння руху точки в натуральній формі. Зауважимо, що дугова координата s в рівнянні (1.7) визначає положення рухомої точки на траєкторії, а не пройдений нею шлях. Наприклад, якщо точка, рухаючись із початкового положення O (рис. 1.4), пройде в положення M_1, а потім переміститься в положення M, то її дугова координата буде s, а пройдений шлях, як сума дуг OM_1 і M_1M, буде більшим, ніж дугова координата.

При вивченні руху точки, заданого натуральним способом, вводять рухому систему координат, початок якої співпадає з рухомою точкою M і яка рухається разом з цією точкою. Осі цієї системи координат (осі натурального тригранника) направлені так (рис. 1.4): дотична вісь $M\tau$ – за дотичною до траєкторії в напрямку збільшення координати s, вісь головна нормаль Mn – за головною нормаллю до траєкторії у бік угнутості траєкторії, вісь бінормаль Mb доповняє цю систему до правої системи координат. Орти $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ цих координатах осей встановлюють відомі з диференціальної геометрії три взаємно перпендикулярні напрямки (дотична, головна нормаль і бінормаль) і створюють координатні площини: стична площина проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і головну нормаль $\vec{n}$, нормальна – через головну нормаль $\vec{n}$ і бінормаль $\vec{b}$, і спрямна – через дотичну $\vec{\tau}$ та бінормаль $\vec{b}$. Якщо траєкторія точки є плоскою кривою, то вона розміщена в стичній площині.

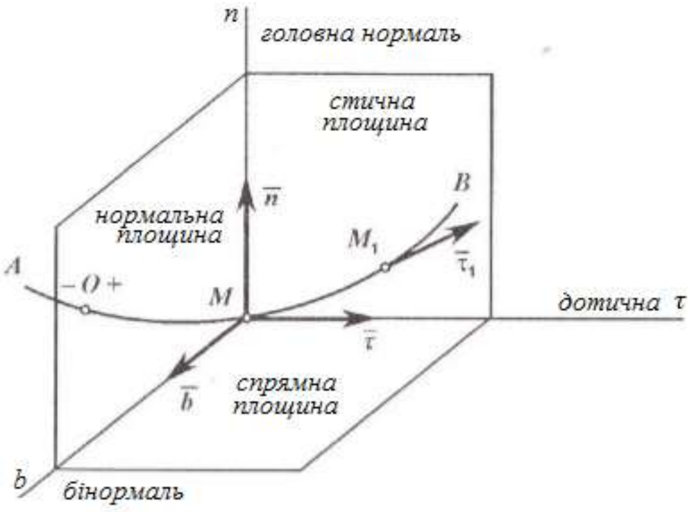


Рис. 1.4

Якщо траєкторія руху точки пряма лінія, то можна вздовж траєкторії направити вісь Ox так, щоб вона співпадала з дотичною віссю $M\tau$. Тоді закон прямолінійного руху точки в натуральній формі буде

$$x = x(t). \tag{1.8}$$

§ 3. Швидкість точки

Швидкістю точки (швидкістю руху точки) називається векторна величина, яка характеризує зміну радіуса-вектора рухомої точки із зміною часу.

Вектор швидкості точки. При векторному способі задання руху вектор швидкості $\vec{V}$ визначають, розглядаючи зміну радіуса-вектора $\vec{r}$ точки. Нехай точка M рухається по деякій кривій і в момент часу t займає положення M, а через досить малий проміжок часу Δt вона займає положення M_1. Положення точки M визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а положення точки $M_1 -$ радіусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ (рис. 1.5). Вектор переміщення точки $\Delta\vec{r}$ можна одержати також як результат деякого фіктивного рівномірного прямолінійного руху точки із M до M_1, який характеризується середньою швидкістю:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

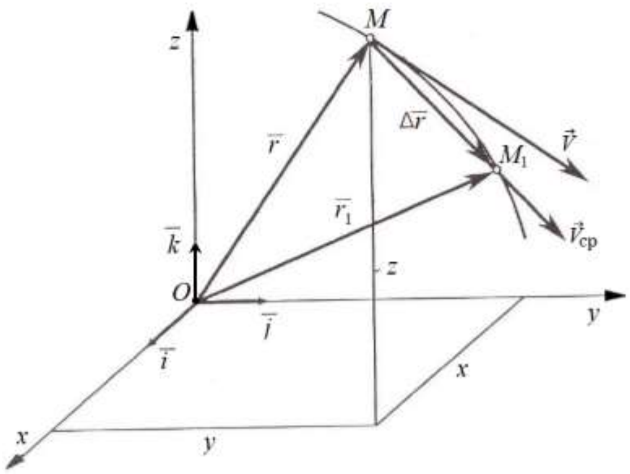


Рис. 1.5

Напрямок вектора середньої швидкості $\vec{V}_{\text{ср}}$ співпадає з напрямком вектора $\Delta\vec{r}$.

Середня швидкість наближено відображає характер дійсного руху точки. Щоб одержати швидкість $\vec{V}$ у даний момент часу або в даній точці, слід перейти до границі, тобто швидкість $\vec{V}$ точки у даний момент часу знаходиться як границя середньої швидкості при прямуванні Δt до нуля

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{1.9}$$

У рівняннях механіки похідну за часом від деякої змінної величини позначають точкою над цією величиною. Отже, вектор швидкості точки дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора точки. Граничне положення вектора $\Delta\vec{r}$ при стягуванні точки M_1 до точки M (тобто при спрямуванні Δt до нуля) буде співпадати з дотичною до траєкторії. Отже направлений вектор швидкості за дотичною до траєкторії у напрямку руху точки.

Одиниця виміру швидкості точки у системі $СІ - 1\text{м}/c$.

Швидкість точки при координатному способі задання руху

Якщо рух точки задано в декартовій системі координат (1.2), то швидкість точки визначається за проекціями вектора швидкості на осі координат. Виражаючи, згідно з формулою (1.3), радіус-вектор точки через її координати і враховуючи, що орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постійні (тобто вони не змінюються ні за величиною ні за напрямком), з рівняння (1.9) одержимо:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \tag{1.10}$$

Отже проекції вектора швидкості на декартові осі координат дорівнюють першій похідній за часом від відповідних координат точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{1.11}$$

За цими проекціями можна визначити модуль вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{1.12}$$

і його направляючі косинуси:

$$cos\left(\widehat{\vec{V}, \vec{i}}\right) = \frac{V_x}{V}, \qquad cos\left(\widehat{\vec{V}, \vec{j}}\right) = \frac{V_y}{V}, \qquad cos\left(\widehat{\vec{V}, \vec{k}}\right) = \frac{V_z}{V}. \tag{1.13}$$

Якщо рух точки в площині Oxy задано в полярних координатах (1.4), то перехід до декартових координат відбувається за формулами

$$x = rcos\varphi, \;\; y = rsin\varphi.$$

Диференціюючи x і y, знайдемо проекції швидкості $\vec{V}$ на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}cos\varphi - \frac{rd\varphi}{dt}sin\varphi = V_r cos\varphi - V_\varphi sin\varphi, \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}sin\varphi + \frac{rd\varphi}{dt}cos\varphi = V_r sin\varphi + V_\varphi cos\varphi, \end{aligned} \tag{1.14}$$

де $V_r = \frac{dr}{dt}$ —проекція швидкості на радіальний напрямок; $V_\varphi = \frac{rd\varphi}{dt}$ — проекція швидкості на трансверсальний напрямок, перпендикулярний до радіального [1].

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}. \tag{1.15}$$

Швидкість точки при натуральному способі задання руху

Нехай точка рухається по заданій траєкторії, і її положення визначається функцією часу дуговою координатою s (рис.1.6). Тоді за час Δt радіус-вектор точки одержить приріст $\Delta\vec{r}$, а координата $s -$ приріст Δs. Обчислимо швидкість точки, вважаючи $\vec{r}$ складною функцією часу, тобто $\vec{r}$ =$\vec{r}[s(t)]$:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}[s(t)]}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{1.16}$$

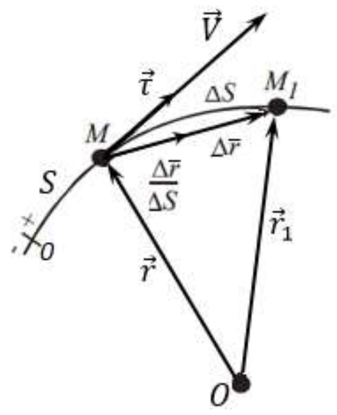


Рис. 1.6

Розглянемо вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$, модуль якого $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1$. У зв'язку з тим, що напрямок вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ співпадає з напрямом січної MM_1, граничним положенням якої є дотична до траєкторії точки, то вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ є одиничним вектором дотичної до траєкторії точки

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}. \tag{1.17}$$

На підставі (1.16 і (1.17) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі задання руху точки

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} = \dot{s} \cdot \vec{\tau}. \tag{1.18}$$

Алгебраїчною швидкістю точки називають проекцію вектора швидкості на дотичну до траєкторії $V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$. Знак алгебраїчної швидкості залежить від напрямку руху точки: якщо $V_\tau > 0$, то точка рухається у додатному напрямку відліку дугової координати, а якщо $V_\tau < 0$, то – у від'ємному. Модуль вектора швидкості $V = |V_\tau| = |\dot{s}|$ відрізняється від алгебраїчної швидкості тільки відсутністю знака, тому часто ці дві величини позначають одним і тим же символом V.

§ 4. Прискорення точки

Векторна величина, яка характеризує зміну вектора швидкості точки із зміною часу, називається ***прискоренням точки***.

Векторний спосіб визначення прискорення

Нехай в деякий момент часу t точка знаходиться в положенні M на траєкторії і має швидкість $\vec{V}$ (рис.1.7) За проміжок часу Δt точка переміститься із положення M в положення M_1, де її швидкість стане дорівнювати $\vec{V}_1$. За час Δt швидкість отримала приріст $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Середнім прискоренням за час Δt називається відношення

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \tag{1.19}$$

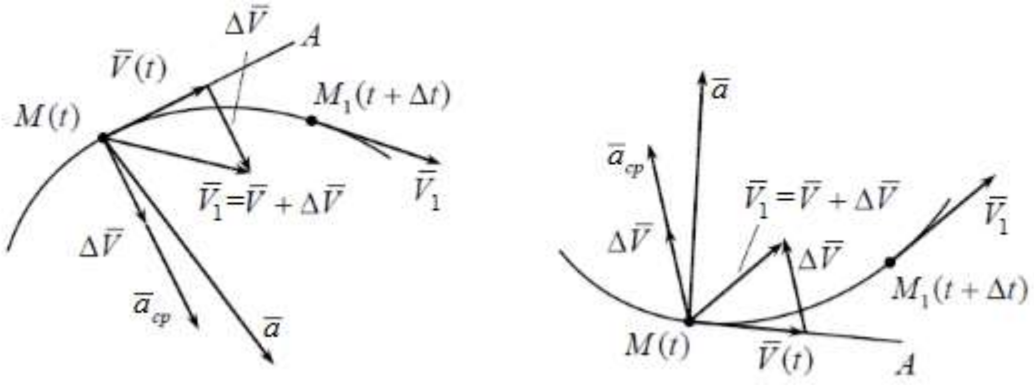


Рис. 1.7

Направлений вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ відповідно до напрямку вектора $\Delta\vec{V}$ у бік увігнутості траєкторії.

Прискорення точки у момент часу t знаходять як границю, до якої прямує середнє прискорення $\vec{a}_{\text{ср}}$ при прямуванні Δt до нуля:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{1.20}$$

Враховуючи, що де $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, матимемо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \tag{1.21}$$

Отже, вектор прискорення точки у даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки. Вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ лежить у площині, утвореній векторами $\vec{V}$ і $\vec{V}_1$. Коли Δt прямує до нуля, точка M_1 наближається до точки M, і площина векторів $(\vec{V}, \vec{V}_1)$ повертається навколо вектора $\vec{V}$, прагнучи до положення стичної площини. Отже вектор прискорення $\vec{a}$ лежить у стичній площині $M\tau n$ (рис.1.4) і направлений у бік увігнутості траєкторії.

Одиниця вимірювання прискорення в системі *СІ* -1м$/c^2$.

Визначення прискорення при координатному способі задання руху

При заданні руху в декартовій системі координат прискорення точки знаходять через його проекції на координатні осі:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}. \tag{1.22}$$

Підставляючи вираз для швидкості (1.10) в формулу (1.21) і враховуючи незмінність ортів $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, знайдемо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}. \qquad (1.23)$$

Порівнюючи залежності (1.22) і (1.23) бачимо, що проекції вектора прискорення точки на осі декартової системи координат визначаються такими формулами:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}. \qquad (1.24)$$

За проекціями прискорення на осі координат знаходимо його модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.25)$$

та направляючі косинуси

$$cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\imath}}) = \frac{a_x}{a}, \qquad cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\jmath}}) = \frac{a_y}{a}, \qquad cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a}. \qquad (1.26)$$

Знайдемо прискорення точки якщо рух в площині Oxy задається в полярних координатах (1.4). Знайдемо проекції прискорення $\vec{a}$ на радіальний a_r та трансверсальний a_φ напрямки (рис. 1.8) [1].

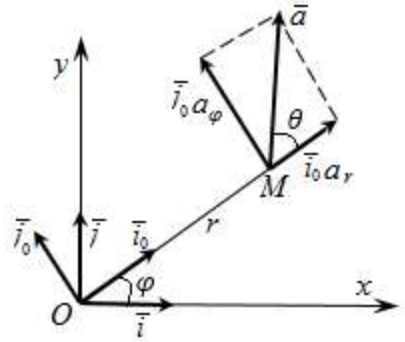


Рис. 1.8

Спочатку виразимо проекції прискорення a_x та a_y на осі декартових координат через проекції на радіальний a_r та трансверсальний a_φ напрямки:

$$a_x = a_r cos\varphi - a_\varphi sin\varphi,$$

$$a_y = a_r sin\varphi + a_\varphi cos\varphi.$$

Враховуючи залежність між полярними та декартовими координатами, знайдемо

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r}cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi - r\dot{\varphi}^2 cos\varphi - r\ddot{\varphi}sin\varphi =$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})sin\varphi;$$

$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r}sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}cos\varphi - r\dot{\varphi}^2 sin\varphi + r\ddot{\varphi}cos\varphi =$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})cos\varphi;$$

Порівнюючи вирази відповідно a_x і a_y, знайдемо

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$
$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{1.27}$$

Модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\varphi{}^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2}. \tag{1.28}$$

Напрямок вектора прискорення визначимо через кут θ, який утворює вектор $\vec{a}$ з радіальним напрямком (рис. 1.8)

$$tg\theta = \frac{a_\varphi}{a_r} = \frac{2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}}{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}. \tag{1.29}$$

Визначення прискорення точки при натуральному способі задання руху

Якщо рух точки задано натуральним способом, прискорення точки визначають через його проекції на зв'язані з рухомою точкою M натуральні осі координат: дотичну $M\tau$, головну нормаль Mn і бінормаль Mb (рис. 1.9), напрямки яких встановлені раніше в § 2. У сусідньому положенні M_1 точки натуральні осі координат змінять свій напрямок. Кут $\Delta\varphi$ між ортами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$ двох сусідніх дотичних осей називається кутом суміжності. Кривизною кривої в точці M називають границю відношення кута суміжності до довжини елемента дуги Δs при Δs прямуючому до нуля:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{1.30}$$

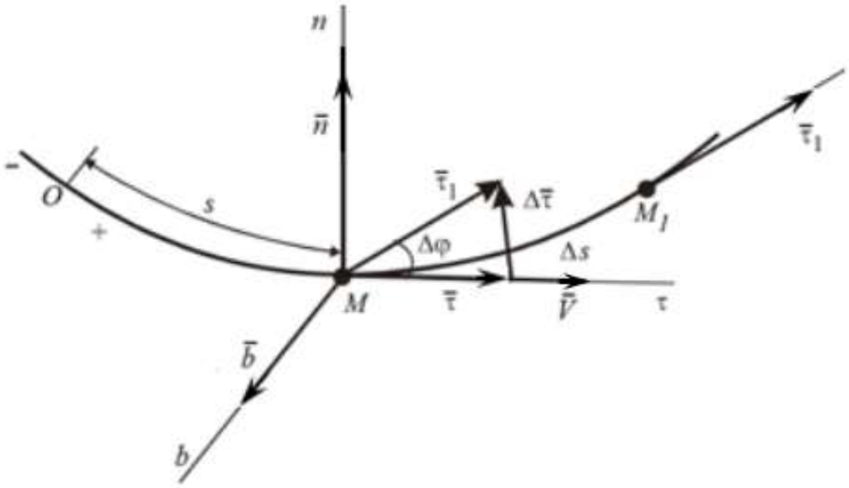


Рис. 1.9

Радіусом кривизни кривої в точці M називається обернена до кривизни величина ρ.

$$\rho = \frac{1}{K}. \tag{1.31}$$

Вектор швидкості точки при натуральному способі задання руху подається у вигляді

$$\vec{V} = V_\tau \cdot \vec{\tau},$$

де $V_\tau = \dot{s}$ – проекція вектора швидкості на вісь τ.

Тоді, на підставі формули (1.16), маємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_\tau \cdot \vec{\tau}) = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.32)$$

Визначимо модуль і напрямок вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, який входить в другий доданок виразу (1.32):

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (1.33)$$

Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ завжди направлений у бік увігнутості траєкторії і лежить в площині, що проходить через точку M і вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$. Отже вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ лежить в стичній площині, до якої прямує площина векторів $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ при $\Delta s \to 0$, і направлений у бік увігнутості траєкторії. Кут нахилу вектора $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ до вектора $\vec{\tau}$ визначимо, диференціюючи за s тотожність $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \vec{\tau}^2 = 1$; одержимо $2\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\tau} = 0$. Звідси випливає, що вектори $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ і $\vec{\tau}$ взаємно перпендикулярні. Отже вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ направлений за головною нормаллю до центра кривизни траєкторії.

Для визначення модуля вектора $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, встановимо спочатку, що $|\Delta\vec{\tau}| = 2sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ (див. рис. 1.9). Тому

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{2sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}}\left|\frac{sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = K = \frac{1}{\rho}. \quad (1.34)$$

Враховуючи встановлений напрямок цього вектора, матимемо $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$. Підставимо це значення у вираз (1.33), і згідно з формулою (1.32) одержимо

$$\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \quad (1.35)$$

оскільки $V_\tau^2 = V^2$. З цієї формули випливає, що вектор прискорення лежить у стичній площині.

Таким чином, вектор прискорення точки має дві складові: дотичну та нормальну. Складова вектора прискорення у напрямку бінормалі дорівнює нулю, тобто $\vec{a}_b = 0$. Дотичне прискорення

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} = \ddot{s}\vec{\tau}, \quad (1.36)$$

направлене за дотичною до траєкторії у напрямку збільшення координати s, якщо алгебраїчна швидкість точки V_τ збільшується, або в напрямку зменшення s, якщо V_τ зменшується, тобто дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості точки. Проекція дотичного прискорення на вісь τ:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}. \quad (1.37)$$

Нормальне прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}, \tag{1.38}$$

а його проекція на головну нормаль

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \tag{1.39}$$

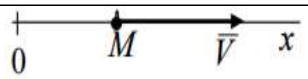
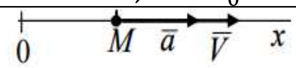
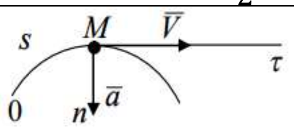
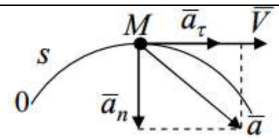
Це прискорення завжди направлене по нормалі до траєкторії в сторону увігнутості; воно характеризує зміну вектора швидкості за напрямком. Так як ці складові взаємно перпендикулярні, то модуль вектора прискорення знаходиться за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.40}$$

§ 5. Окремі випадки руху точки

Розглянемо зведені до таблиці 1 випадки руху точки в залежності від значень дотичного і нормального прискорень. Як бачимо, тільки у випадку рівномірного прямолінійного руху точки її прискорення дорівнює нулю. В інших окремих випадках руху точка має відмінне від нуля прискорення: при змінному прямолінійному русі прискорення точки буде тільки дотичним, при рівномірному криволінійному – тільки нормальним, а при змінному криволінійному русі прискорення точки складається із дотичного і нормального прискорень.

Таблиця 1.1

Характер руху точки	**Значення прискорення**			**Траєкторія, вектори швидкості і прискорення, кінематичні залежності**
	$\vec{a}_\tau$	$\vec{a}_n$	$\vec{a}$	
Рівномірний прямолінійний рух	$a_\tau = a_x = 0$	$a_n = 0$	$a = 0$	 $\vec{V} = const;\ x = x_0 + Vt$
Рівнозмінний прямолінійний	$a_\tau = a_x = \frac{dV}{dt} = const$	$a_n = 0$	$\vec{a} = \vec{a}_\tau$	 $V = V_0 + at$ $x = x_0 + Vt + \frac{at^2}{2}$
Рівномірний криволінійний	$a_\tau = 0$	$a_n = \frac{V^2}{\rho}$	$\vec{a} = \vec{a}_n$	 $s = s_0 + Vt$ $V = const$
Рівнозмінний криволінійний	$a_\tau = \frac{dV}{dt} = const$	$a_n = \frac{V^2}{\rho}$	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$	 $V = V_0 + a_\tau t$ $s = s_0 + Vt + \frac{a_\tau t^2}{2}$

Дотичне прискорення дорівнює нулю, якщо точка рухається з постійною за величиною швидкістю, або в ці моменти часу, коли алгебраїчна швидкість набуває екстремальних значень (максимум чи мінімум). Нормальне прискорення дорівнює нулю коли рух прямолінійний або в місцях перегину траєкторії, тобто коли $\rho = \infty$, а також в ці моменти часу, коли величина швидкості дорівнює нулю.

§ 6. Приклади визначення кінематичних характеристик руху точки

Для того, щоб розв'язати задачу кінематики треба знати закон руху точки. Цей закон може бути явно заданий в умові задачі, або його можна знайти. Якщо рух задано координатним способом відносно декартової системи координат, тобто рівняннями (1.2), то швидкість і прискорення точки знаходять за формулами (1.10)…(1.13), (1.20)…(1.25). Після обчислення швидкості V і прискорення a можна знайти дотичне та нормальне прискорення. Для цього використаємо формулу

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2.$$

Беручи похідну по часу від лівої і правої частини дістанемо

$$2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\frac{dV_y}{dt} + 2V_z\frac{dV_z}{dt}$$

або

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}. \qquad (1.41)$$

Нормальне прискорення a_n знайдемо із залежності $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$. Маючи нормальне прискорення знаходимо радіус кривизни траєкторії ρ за формулою $a_n = \frac{V^2}{\rho}$. Якщо рух задано натуральним способом, то всі характеристики руху визначаються за формулами (1.16), (1.35)…(1.39). Якщо закону руху точки траєкторією в умові задачі не задано, його необхідно знайти, виходячи із заданих характеристик руху та значення деяких кінематичних характеристик руху в певний момент часу. Для цього застосовують формули кінематичних залежностей в окремих випадках руху точки, які наведені в таблиці 1.

Приклад 1.1

Знайти траєкторію точки M шатуна AB кривошипно-шатунного механізму (рис. 1.10). Довжина кривошипа $OA = r = 20$ см, довжина шатуна $AB = l = 20$ см, відстань $AM = \frac{l}{4} = 5$см, кут нахилу кривошипа до горизонталі змінюється за законом $\varphi = 2t$ рад. Знайти швидкість і прискорення точки та радіус кривизни траєкторії в момент часу $t = \frac{\pi}{8}$ сек.

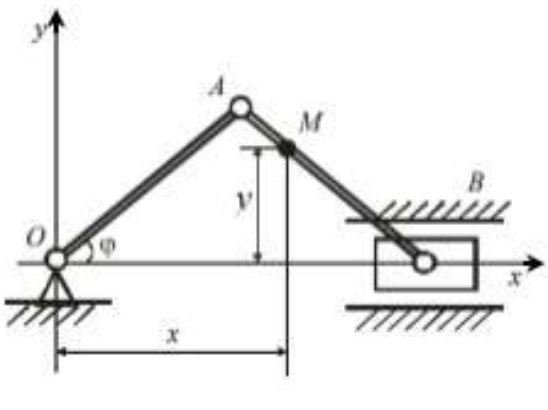


Рис. 1.10

Розв'язання. У даній задачі закон руху точки не заданий, тому перш за все встановимо рівняння руху точки M у координатній формі. Для цього проведемо осі координат x та y, вибравши їх початок в точці O, і знайдемо координати точки M як функції кута φ. Із рисунка 1.10 видно, що

$$x = (OA + AM)cos\varphi = 25cos\varphi;$$

$$y = (OA - AM)sin\varphi = 15sin\varphi.$$

Враховуючи задану залежність кута φ від часу, маємо:

$$x = 25cos2t;$$

$$y = 15sin2t.$$

$$x = 25cos2t; y = 15sin2t. \qquad \text{(a)}$$

Для знаходження рівняння траєкторії точки М виключимо час t з рівнянь руху

$$cos2t = \frac{x}{25}; \;\; sin2t = \frac{y}{15}.$$

Піднімаючи до квадрату ліву і праву частини кожної рівності і додаючи їх, одержимо

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1.$$

Отже, траєкторією точки M є еліпс з пів осями 25 см і 15 см і з центром в точці O. Будуємо траєкторію руху точки у вибраному масштабі (рис. 1.11). Знайдемо на траєкторії точку, від якої відлічується дугова координата s, і додатний напрямок відліку. З рівнянь (а) маємо, що при $t = 0$ $x = 25, y = 0$. Значить початком відліку дугової координати є точка M_0 (рис. 1.11). Для того, щоб знайти додатний напрямок відліку s, використаємо друге рівняння (а). Бачимо, що з ростом часу від нуля координата y зростає. Значить додатний напрямок відліку буде таким, як показано на рисунку.

Знайдемо положення точки M на траєкторії у заданий момент часу $t = \frac{\pi}{8}$ сек. Координати точки в цей момент часу дорівнюють

$$x_M = 25cos\frac{\pi}{4} = 17{,}675 \text{ см}, \qquad y_M = 15sin\frac{\pi}{4} = 10{,}605 \text{ см}.$$

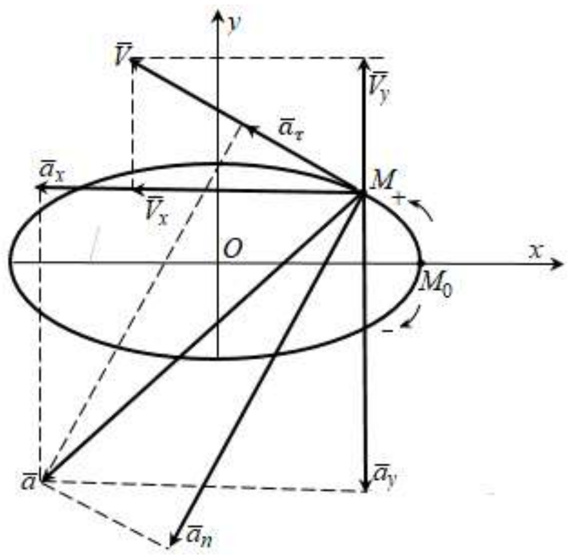


Рис. 1.11

На рисунку це положення позначено *M*.

Проекції вектора швидкості на осі координат

$$V_x = \dot{x} = -50\ sin\ 2t;\ V_y = \dot{y} = 30\ cos2t;$$

модуль швидкості в будь-який момент часу:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10\sqrt{25sin^2 2t + 9cos^2 2t}.$$

Прискорення точки *M* теж знайдемо за його проекціями на осі координат згідно з формулами (1.24):

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -100cos\ 2t;\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = -60sin2t;$$

модуль вектора прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10\sqrt{100cos^2 2t + 36sin^2 2t}.$$

Обчислимо проекції на осі координат і величини швидкості і прискорення в момент часу $t = \frac{\pi}{8}$ с:

$$V_x = -50\ sin\ \frac{\pi}{4} = -35{,}35\ \frac{\text{см}}{\text{с}};\ V_y = 30\ cos\frac{\pi}{4} = 21{,}2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$V = \sqrt{(-35{,}35)^2 + (21{,}2)^2} = 41{,}2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$a_x = -100cos\frac{\pi}{4} = -70{,}7\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2};\ a_y = -60sin\frac{\pi}{4} = -42{,}4\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a = \sqrt{(-70{,}7)^2 + (-42{,}4)^2} = 82{,}45\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Дотичне прискорення знайдемо за формулою (1.41):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

і в момент часу $t_1 = \frac{\pi}{8}$ маємо:

$$a_\tau = \frac{(-35{,}35)(-70{,}7) + 21{,}2(-42{,}4)}{41{,}2} = 38{,}85\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Знайдемо Нормальне прискорення точки знаходимо за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{82{,}45^2 - 38{,}85^2} = 72{,}7\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Радіус кривизни траєкторії в точці *M* згідно з формулою (1.39) дорівнює

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{41{,}2^2}{72{,}7} = 23{,}35\ \text{см}.$$

У заданому положенні точки будуємо вектор $\vec{V}$ зі складовими $\vec{V}_x$ та $\vec{V}_y$, направляючи вектор швидкості за дотичною до траєкторії (див. рис. 1.11). Вектор $\vec{a}$ знаходимо за складовими $\vec{a}_x$ і $\vec{a}_y$, а також і за $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$, як показано на рис. 1.11.

Приклад 1.2

Точка рухається по колу радіуса 25 м за законом $s = 2t^2 + 3t$ (s – в метрах, t – в секундах). Знайти прискорення точки для моменту часу, коли її дугова координата дорівнює 27 м.

Розв'язання. Рух точки задано натуральним способом. Задаємо на траєкторії початкове положення O та додатний напрямок руху (рис. 1.12). Покажемо положення M_1 точки в той момент часу, коли її дугова координата $s_1 = 27$ м, що відповідає центральному куту $\varphi_1 = \frac{s_1}{R} = 1{,}08$ рад. Знайдемо час t_1 руху точки з положення O в положення M_1, підставивши в рівняння руху значення s_1 і t_1 : $27 = 2t_1^2 + 3t_1$. Із квадратного рівняння $2t_1^2 + 3t_1 - 27 = 0$, знайдемо $t_1 = 3$с.

Величини швидкості і прискорення точки дорівнюють:

$$V = \frac{ds}{dt} = 4t + 3;\ a_\tau = \frac{dV}{dt} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = const.$$

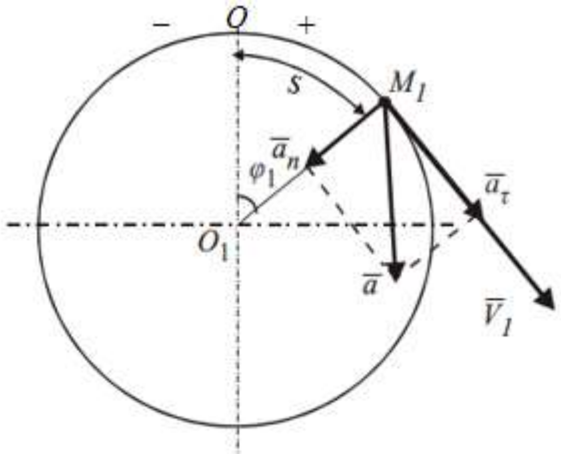


Рис. 1.12

При $t = t_1 = 3$с швидкість $V_1 = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Тоді нормальне прискорення у цей момент часу

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = 9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

а повне прискорення точки в положенні M_1

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 9{,}85\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Приклад 1.3

Поїзд відходить від станції, рухаючись рівноприскорено по дузі кола радіусом $R = 720$ м. Пройшовши шлях $s_1 = 480$ м, поїзд дістав швидкість $V_1 = 12\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Знайти час, за який поїзд пройшов цю відстань, та його повне прискорення.

Розв'язання. Приймаємо поїзд за матеріальну точку, траєкторія якої відома. Для знаходження шуканих величин скористаємось натуральним способом задавання руху, вибравши початок відліку на траєкторії в початковому положенні поїзда. Тоді при $t = 0$ маємо $s_0 = 0$ і $V_0 = 0$. Рівнозмінний рух поїзда описується залежностями:

$$V = a_\tau t;\ \ s = \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Позначимо час, за який поїзд пройшов шлях s_1, через t_1. Тоді можемо записати

$$V_1 = a_\tau t_1;\ \ s_1 = \frac{a_\tau t_1^2}{2}.$$

Розв'язавши ці рівняння відносно t_1 і a_τ, знайдемо

$$t_1 = \frac{2\,s_1}{V_1};\ \ a_\tau = \frac{V_1^2}{2s_1}.$$

Підставивши в отримані формули значення s_1 і V_1, дістанемо\

$$t_1 = 80\ \text{с.};\ \ a_\tau = 0{,}15\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Повне прискорення визначаємо за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

де

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Остаточно

$$a = \sqrt{(0{,}15)^2 + (0{,}2)^2} = 0{,}25\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Питання для самоконтролю

1. Предмет кінематики? Основна задача кінематики точки.
2. Що називають системою відліку, закон руху точки?
3. Що таке траєкторія точки.
4. Способи задання руху точки, поясніть суть кожного з них?
5. Як визначити траєкторію точки при координатному способі задавання руху?
6. Коли пройдений точкою шлях і її дугова координата на траєкторії співпадають?
7. Як визначається вектор швидкості точки? Як направлений цей вектор в просторі?
8. Як знайти проекції швидкості точки на осі декартової системи координат.
9. Як визначити модуль і напрямок вектора швидкості, якщо задані його проекції на осі декартової системи координат?
10. Як знайти алгебраїчну швидкість точки за заданою траєкторією?
11. Чому дорівнює вектор прискорення точки і як він напрямлений у просторі?
12. Як знайти прискорення точки при координатному способі завдання руху?
13. Як направлені осі натурального тригранника?
14. В якій площині розташований вектор прискорення відносно натуральних осей, куди він спрямований?
15. Як знайти проекції прискорення точки на дотичну вісь і головну нормаль до траєкторії?
16. Коли дотичне прискорення точки дорівнює нулю. Коли нормальне прискорення точки дорівнює нулю?
17. Який рух точки називається рівномірним, рівнозмінним?

ГЛАВА ІІ
НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 1. Загальні положення кінематики твердого тіла

Основна задача кінематики твердого тіла полягає в тому, щоб описати його рух в цілому як єдиного цілого, так і кожної його окремої точки. Для того потрібно вказати спосіб знаходження положення цього тіла відносно деякої системи відліку в будь-який момент часу. Це можна зробити шляхом задання деякої кількості незалежних параметрів, через які однозначно визначається положення тіла в просторі в залежності від часу. Рівняння, в яких ці параметри задані як функції часу, є рівняннями руху тіла.

Кількість таких незалежних параметрів, через які однозначно визначається положення тіла в просторі, називається числом ступенів вільності тіла.

У механіці розрізняють п’ять видів руху твердого тіла: поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний (плоский), обертальний навколо нерухомої точки (сферичний), вільний рух твердого тіла.

До найпростіших рухів відносяться поступальний і обертальний навколо нерухомої осі. Інші рухи тіла можна представити як сукупність простих рухів.

§ 2. Поступальний рух твердого тіла

Почнемо розгляд кінематики абсолютно твердого тіла з вивчення найпростішого поступального руху.

Поступальним називають такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно самій собі.

Прикладами поступального руху є рух кузова автомобіля на прямолінійній ділянці шляху, рух спарника AB (рис. 2.1), що з’єднує кривошипи OA і O_1B однакової довжини, які обертаються. Точки спарника при цьому рухаються дугами кіл однакового радіуса. Також прикладом поступального руху твердого тіла є рух кабінок колеса огляду. Траєкторіями кабінок теж є кола, а в процесі руху вони весь час залишаються паралельними поверхні землі.

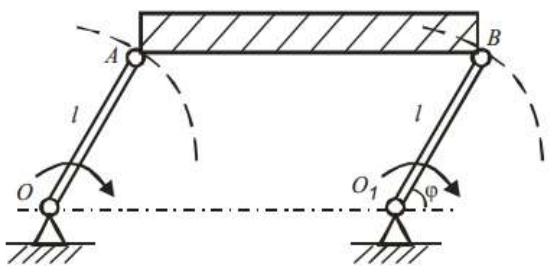


Рис. 2.1

Доведемо теорему про траєкторії точок тіла при поступальному русі.

П*ри поступальному русі твердого тіла траєкторії всіх його точок при накладанні співпадають (тобто траєкторії конгруентні).*

Рівні між собою вектори швидкостей і вектори прискорень.

Доведення. Розглянемо в тілі, яке рухається поступально, дві довільні точки A і B і доведемо, що їх траєкторії однакові. На основі рис. 2.2 бачимо, що

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}. \tag{2.1}$$

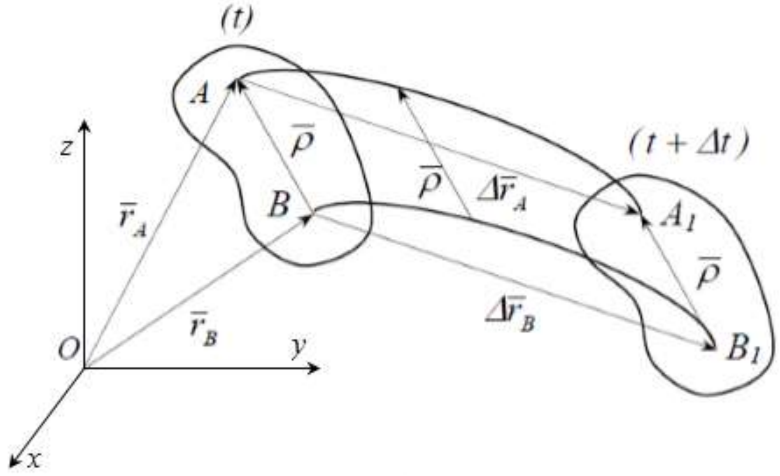


Рис. 2.2

Функції $\vec{r}_A(t)$ і $\vec{r}_B(t)$ визначають траєкторії точок A і B. Вектор $\overrightarrow{BA} = \vec{\rho}$ не змінюється в часі ні за величиною ні за напрямком. Значить, як видно із співвідношення (2.1), траєкторію точки A можна отримати шляхом паралельного перенесення траєкторії точки B. Напрямок і величина перенесення визначається вектором $\vec{\rho}$.

Доведемо теорему про розподіл швидкостей і прискорень точок тіла при поступальному русі.

При поступальному русі твердого тіла всі точки рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями.

Скориставшись співвідношенням (2.1), знайдемо

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{BA}\right)}{dt}.$$

На основі визначення поступального руху $\frac{d\left(\overrightarrow{BA}\right)}{dt} = 0$, тому

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B.$$

Аналогічно диференціюючи дальше по t отримаємо:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Теорема доведена.

Із цієї теореми випливає, що поступальний рух тіла повністю характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла (наприклад, точки A). Значить, рівняння поступального руху твердого тіла будуть мати такий вигляд:

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ y_A = f_3(t) \tag{2.2}$$

§ 3. Обертовий рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Кут повороту. Рівняння руху

Обертовим рухом навколо нерухомої осі називають такий рух твердого тіла, при якому деяка пряма, що належать тілу, залишається нерухомою. Ця пряма називається *віссю обертання*. Точки тіла, які не лежать на осі обертання, рухаються по колах, що лежать в перпендикулярних до осі обертання площинах, центри яких знаходяться на цій осі.

Для аналітичного визначення закону обертового руху тіла навколо нерухомої осі необхідно ввести поняття про кут повороту. Нехай вісь Az (рис. 2.3) є віссю обертання тіла. Поведемо через цю вісь в початковий момент часу нерухому площину Π_0 і зафіксуємо її положення в нерухомому просторі і в тілі. Точки тіла, які в початковий момент часу лежать в площині Π_0, залишаться в площині П, яка рухається разом з тілом і утворює деякий двогранний кут із своїм початковим положенням Π_0. Цей двогранний кут називається кутом повороту тіла і вимірюється він своїм лінійним кутом φ (рис. 2.3). Для того, щоб кут повороту однозначно визначав положення тіла, потрібно домовитися щодо додатного напрямку відліку цього кута. У відповідності до вибору правої системи координат будемо вважати кут φ додатним, якщо дивлячись з додатного напрямку осі обертання бачимо поворот тіла проти ходу стрілки годинника.

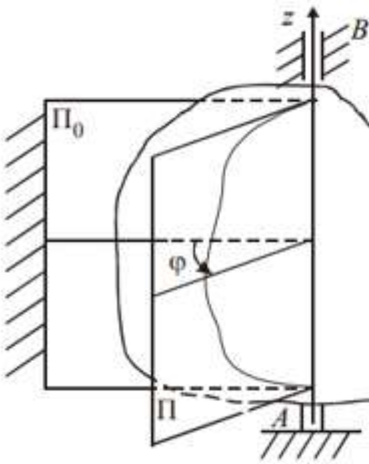


Рис. 2.3

При такій умові кут повороту однозначно визначає положення тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Кожному моменту часу відповідає визначене значення кута повороту φ. Отже, кут повороту – однозначна функція часу.

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (2.3)$$

Ця функціональна залежність називається *рівнянням обертового руху тіла навколо нерухомої осі*. Рівняння (2.3) дозволяє знайти положення тіла в просторі в довільний момент часу, тобто воно визначає закон обертового руху тіла.

Вимірюється кут повороту φ в радіанах.

§ 4. Кутова швидкість тіла і кутове прискорення

*Розглянемо основні к*інематичні величини, які характеризують обертовий рух тіла навколо нерухомої осі. Цими величинами є кутова швидкість тіла ω (омега) і кутове прискорення ε (епсілон).

Кутовою швидкістю називається фізична величина, що характеризує бистроту зміни кута повороту φ з часом.

Припустимо, що за проміжок часу Δt кут повороту тіла φ дістав приріст $\Delta\varphi$. Тоді середня кутова швидкість визначається рівністю

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Границя, до якої прямує середня кутова швидкість $\omega_{\text{ср}}$ при прямуванні Δt до нуля, називається кутовою швидкістю в даний момент часу t:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Отже, *кутова швидкість тіла дорівнює першій похідній за часом від кута повороту*:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2.4)$$

Якщо $\omega > 0$, то в даний момент часу тіло обертається в додатному напрямку відліку кута повороту φ. Одиниця виміру кутової швидкості $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

На практиці кутову швидкість вимірюють в обертах за хвилину (n, $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$). Тоді кутова швидкість ω в радіанах за секунду обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \qquad (2.5)$$

Фізична величина, яка характеризує бистроту зміни кутової швидкості тіла із зміною часу, називається *кутовим прискоренням.*

Припустимо, що за проміжок часу Δt кутова швидкість дістала приріст $\Delta\omega$. Тоді середнє кутове прискорення дорівнює

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Кутове прискорення у даний момент часу можна знайти, виконавши граничний перехід:

$$\varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Отже кутове прискорення тіла дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \qquad (2.6)$$

Одиниця виміру кутового прискорення $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$. Якщо кутова швидкість зростає, то $\varepsilon > 0$.

Окремі випадки обертового руху

Обертовий рух називається рівномірним, якщо кутова швидкість тіла постійна, тобто

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const.$$

Інтегруючи це співвідношення, одержимо рівняння рівномірного обертання

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (2.7)$$

де φ_0 –початковий кут повороту.

Якщо кутове прискорення залишається постійним, тобто

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const,$$

то обертання називають *рівнозмінним*. Звідси після інтегрування отримаємо

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2.8}$$

Так, як з виразу (2.8) випливає, що

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t,$$

то після інтегрування одержимо рівняння рівнозмінного обертання

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{2.9}$$

§ 5. Розподіл лінійних швидкостей і прискорень в тілі, що обертається навколо нерухомої осі

Швидкості і прискорення точок твердого тіла, яке здійснює обертовий рух, називають *лінійними* для того, щоб відрізнити їх від кутової швидкості і кутового прискорення.

Розглянемо розподіл лінійних швидкостей при обертовому русі твердого тіла навколо нерухомої осі. Для цього доцільно використати натуральний спосіб задання руху точки. Траєкторією точки M, яка знаходиться на відстані R від осі обертання, є коло з центром C на осі обертання (рис. 2.4). Виберемо на траєкторії початкову точку M_0, яка відповідає початку відліку кута повороту. Враховуючи формулу 2.3, знайдемо

$$\smile M_0 M = s = R\varphi(t). \tag{2.10}$$

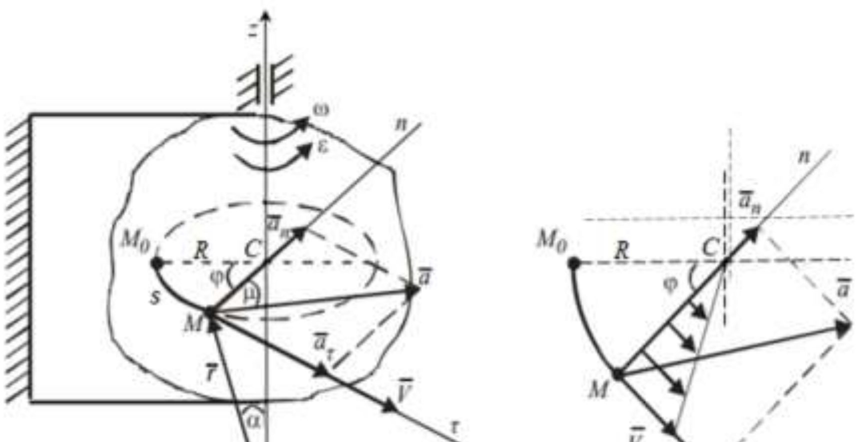


Рис. 2.4

Ця рівність є рівнянням руху точки по траєкторії. Додатний напрямок дугової координати вибираємо відповідно до додатного напрямку кута повороту φ.

Тепер знайдемо проекцію швидкості на додатний напрямок дотичної до траєкторії

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt},$$

або

$$V_\tau = R\omega. \tag{2.11}$$

Отже, *швидкості точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є лінійними функціями радіуса обертання* (рис. 2.4, б).

Розглянемо тепер розподіл лінійних прискорень.

Прискорення точки M має дотичну і нормальну складові, тобто

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Виразимо ці прискорення через кінематичні характеристики ω і ε обертового руху.

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$
$$a_n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2. \qquad (2.12)$$

Вектор дотичного прискорення направлений по дотичній до кола обертання і співпадає з напрямком швидкості при прискореному обертанні та протилежно до вектора швидкості при сповільненому. Вектор нормального прискорення направлений вздовж радіуса обертання до осі обертання (рис. 2.4). Модуль повного прискорення точки M

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.13)$$

Вектор повного прискорення утворює з вектором нормального прискорення кут μ (рис. 2.4), який визначається із співвідношення

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (2.14)$$

§ 6. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення. Формула Ейлера. Векторні формули для визначення швидкості та прискорення точок тіла

Покажемо, що кутову швидкість можна розглядати як вектор. Розглянемо швидкість точки M тіла що здійснює обертовий рух навколо осі Oz (рис. 2.5).

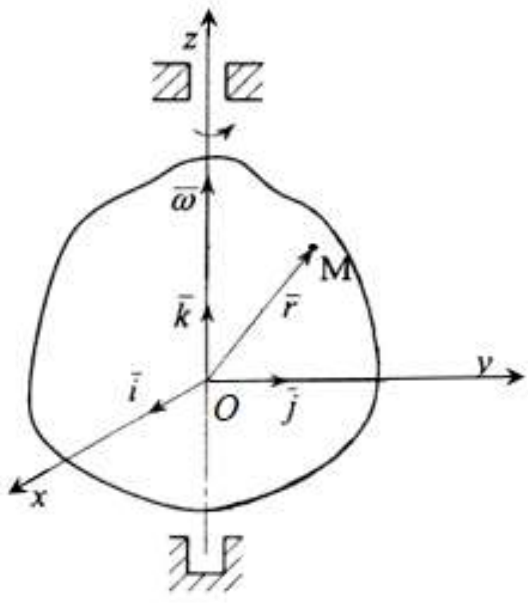


Рис. 2.5

Скористаємось незмінно зв'язаною з тілом прямокутною системою координат з початком на осі обертання. Радіус-вектор точки M запишемо у вигляді

$$\vec{r} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z.$$

Так як система координат $Oxyz$ незмінно зв'язана з тілом, то координати точки M і одиничний вектор $\vec{k}$ не змінюються із зміною часу. Знайдемо швидкість точки M, враховуючи, що від часу залежать тільки одиничні вектори $\vec{\imath}$ і $\vec{\jmath}$, так як із зміною часу змінюється їхній напрямок внаслідок обертання системи координат разом з тілом з кутовою швидкістю ω.

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\imath}}{dt}x + \frac{d\vec{\jmath}}{dt}y.$$

Вектор $\frac{d\vec{\imath}}{dt}$ дорівнює швидкості кінця цього вектора. Величина цієї швидкості дорівнює $\omega \cdot |\vec{\imath}| = \omega \cdot 1$. Направлений цей вектор по дотичній до траєкторії кінця вектора $\vec{\imath}$, тобто паралельно вектору $\vec{\jmath}$. Отже можемо написати

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \omega\vec{\jmath}.$$

Провівши аналогічні міркування для вектора $\vec{\jmath}$, знайдемо

$$\frac{d\vec{\jmath}}{dt} = -\omega\vec{\imath}.$$

Справедливі такі формули:

$$\vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{\imath}; \; -\vec{\imath} = \vec{k} \times \vec{\jmath}.$$

Тоді

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \omega\left(\vec{k} \times \vec{\imath}\right) = \omega\vec{k} \times \vec{\imath}; \; \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \omega\left(\vec{k} \times \vec{\jmath}\right) = \omega\vec{k} \times \vec{\jmath}.$$

Підставимо знайдені похідні у вираз для швидкості точки M. Дістанемо

$$\vec{V}_M = \omega\vec{k} \times \left(\vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z\right) = \omega\vec{k} \times \vec{r}.$$

Тут ми врахували, що $\vec{k} \times \vec{k} = 0$.
Назвемо вектор $\omega\vec{k}$ – *вектором кутової швидкості*

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}. \tag{2.15}$$

Формула для швидкості точки M тоді прийме вигляд

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{2.16}$$

Остання формула називається ***формулою Ейлера***.

Як видно з формули (2.15) кутова швидкість $\vec{\omega}$ є вектором, який напрямлений вздовж осі обертання в ту частину простору, звідки обертання тіла видно проти ходу стрілки годинника (рис. 2.5) (при правій системі декартових координат). Точка прикладання вектора $\vec{\omega}$ на осі обертання довільна, тобто $\vec{\omega}$ – ковзний вектор.

Введення вектора кутової швидкості вимагає розширення поняття про кутове прискорення. Якщо визначити кутове прискорення як вектор, який характеризує бистроту зміни вектора кутової швидкості із зміною часу, то

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.17)$$

Отже вектор $\vec{\varepsilon}$ направлений по дотичній до годографа вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$. Так як вектор $\vec{\omega}$ завжди направлений вздовж осі обертання, годограф цього вектора є відрізком прямої, яка співпадає з цією віссю. Тобто вектор $\vec{\varepsilon}$ також направлений вздовж осі обертання. Направлений цей вектор в ту сторону, в яку направлений вектор швидкості кінця вектора $\vec{\omega}$. Якщо кутова швидкість за величиною зростає, то довжина вектора $\vec{\omega}$ збільшується, тобто вектор швидкості його кінця співпадає за напрямком з напрямком вектора $\vec{\omega}$. Якщо ж кутова швидкість за величиною спадає, то довжина вектора $\vec{\omega}$ зменшується і вектор швидкості його кінця має протилежний напрямок до напрямку вектора $\vec{\omega}$. Таким чином, при прискореному обертанні вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ направлені в одному і тому ж напрямку (рис. 2.6, а). Якщо обертання сповільнене вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ направлені у протилежних напрямках (рис. 2.6, б).

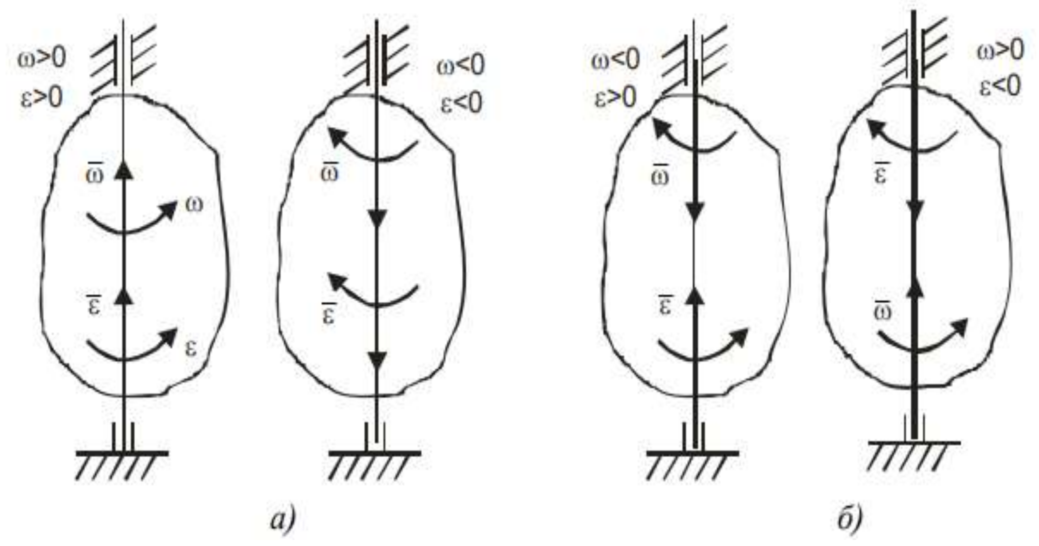


Рис. 2.6

Зауважимо, що формула Ейлера (2.16) визначає і величину і напрямок вектора швидкості точки M тіла, яке здійснює обертовий рух навколо нерухомої осі (рис. 2.4).

Так як $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M, то швидкість цієї точки визначається також за формулою $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Звідси, враховуючи формулу 2.16), знайдемо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (2.18)$$

Вектор $\vec{r}$ в даному випадку не змінюється за величиною, а змінюється тільки за напрямком, тому формула Ейлера (2.18) є узагальненим правилом знаходження похідної вектора постійного модуля.

Для знаходження вектора прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, продиференціюємо вираз (2.16) за часом:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

або

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \tag{2.19}$$

Ці дві складові прискорення у формулі (2.19) є дотичним і нормальним прискореннями:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \tag{2.20}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{2.21}$$

Співпадіння напрямків лівої та правої частин рівностей (2.20) і (2.21) підтверджується правилом векторного добутку. Їх модулі:

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon \cdot r \cdot sin\alpha = \varepsilon R = a_\tau;$$

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{V}\right| = \omega \cdot V \cdot sin90^{\circ} = \omega \cdot R\omega = \omega^2 R = a_n.$$

Тобто векторні формули (2.18) і (2.19) і за величиною і за напрямком визначають дотичне і нормальне прискорення.

§ 7. Приклади визначення кінематичних характеристик простих рухів тіла

Приклад 2.1

Показаний на рис. 2.7 механізм лебідки, переміщує вантаж 4 завдяки обертанню шківа 1 радіусом $r_1 = 0{,}04$м, який за допомогою пасової передачі зв'язаний зі шківом 2, радіуса $r_2 = 0{,}08$ м. З цим шківом жорстко зв'язана шестерня 2, яка зчеплена з шестернею 3, насадженою на вал барабана радіусом $r_3 = 0{,}1$ м. Визначити у момент часу $t_1 = 0{,}4$с швидкість, прискорення точки *M* барабана та висоту підйому вантажу за цей час, якщо шків 1 обертається за законом $\varphi_1 = 25t^2 - 5t$, а кількість зубців шестерень $z_2 = 24$ і $z_3 = 30$.

Розв'язання. Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення шківа 1.

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 50t - 5, \qquad \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 50 \text{ с}^{-2} = const.$$

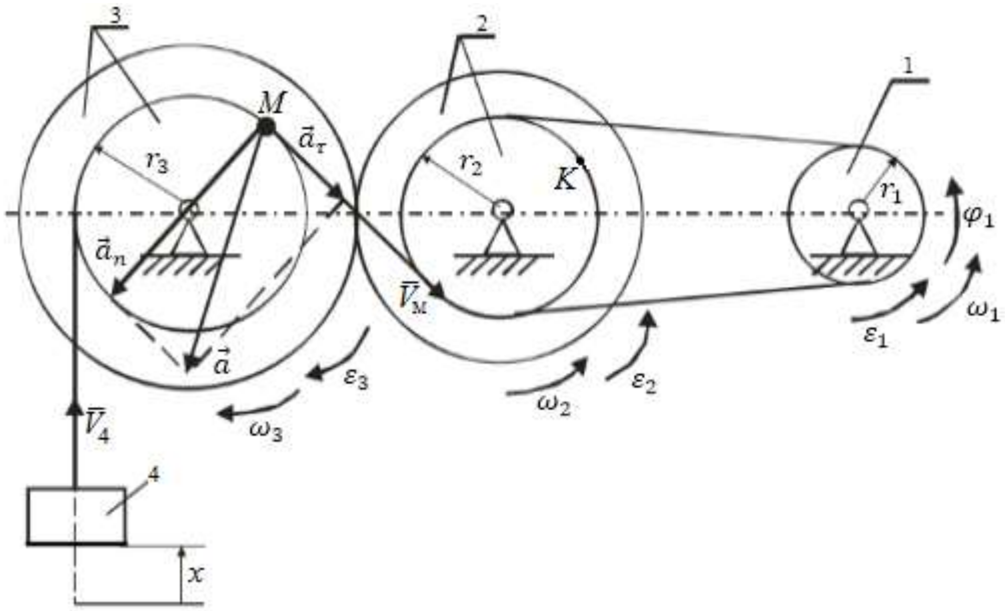


Рис. 2.7

Оскільки ремінь, який з’єднує шківи 1 і 2, нерозтяжний, швидкості всіх точок ременя однакові. А так як проковзування ременя відносно шківів відсутнє, то швидкості точок на ободах обох шківів теж рівні і дорівнюють швидкості точок ременя. Отже швидкість точки K, яка лежить на ободі шківа 2, дорівнює швидкості будь-якої точки на ободі шківа 1, тобто $V_K = \omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$. Звідси знаходимо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{(50t - 5)0{,}04}{0{,}08} = 25t - 2{,}5.$$

Кутове прискорення колеса 2

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 25 \text{ с}^{-2} = const.$$

Швидкості точок дотику зубчатих коліс 2 і 3 рівні

$$V_{2,3} = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3,$$

звідки

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{z_3}{z_2}.$$

Кутові швидкості обертання коліс обернено пропорційні їх радіусам або кількості зубців:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{z_2}{z_3} = 20t - 2.$$

Така ж залежність є між кутовими прискореннями:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{z_2}{z_3} = 20 \text{ с}^{-2} = const.$$

У момент часу $t_1 = 0{,}4$с маємо $\omega_3 = 20 \cdot 0{,}4 - 2 = 6 \text{ с}^{-1}$.

Визначимо модулі швидкості $\vec{V}$, дотичного $\vec{a}_\tau$, нормального $\vec{a}_n$ і повного $\vec{a}$ прискорення точки M.

У момент часу $t_1 = 0{,}4$с, $V = \omega_3 r_3 = 0{,}6$ м$/c$ маємо:

$$a_\tau = \varepsilon_3 r_3 = 2 \ \frac{\text{м}}{c^2}; \ \ a_n = \omega_3^2 r_3 = 3{,}6 \ \frac{\text{м}}{c^2}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 4{,}12 \ \frac{\text{м}}{c^2}.$$

Так як швидкість вантажу дорівнює швидкості точки M

$$V = \frac{dx}{dt} = 2t - 0{,}2,$$

то інтегруючи вираз швидкості, знайдемо закон поступального руху.

$$x = \int (2t - 0{,}2)dt = t^2 - 0{,}2t + C.$$

Прийнявши початок відліку осі x в початковому положенні вантажу, коли $x_0 = 0$, отримаємо $C = 0$, і за час $t_1 = 0{,}4$с вантаж підніметься на висоту

$$x(t_1) = 0{,}08 \text{ м}.$$

Приклад 2.2

Прискорення точки *M* диска, що обертається навколо нерухомої осі, $a = 4\text{м}/c^2$ (рис. 2.8). Визначити кутову швидкість цього диска і швидкість точки *M*, якщо радіус диска $R = 0{,}5$ м, а кут нахилу повного прискорення точки *M* до нормалі $\mu = 60°$.

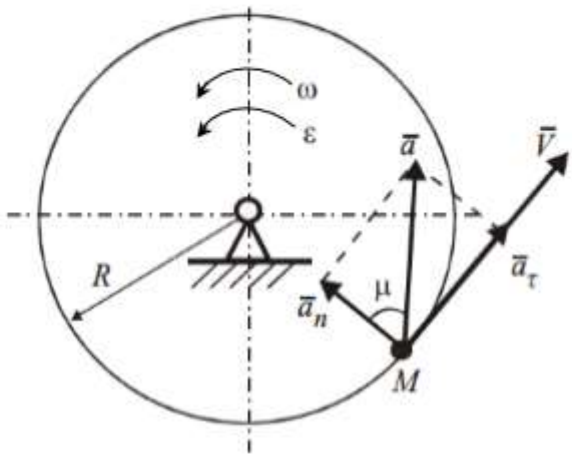


Рис. 2.8

Розв'язання. Оскільки кут між вектором повного прискорення точки *M* і вектором її нормального прискорення відомий, то прискорення

$$a_n = acos\mu = 4cos60° = 2\frac{\text{м}}{c^2}.$$

Нормальне прискорення точки при обертальному русі зв'язане з кутовою швидкістю тіла залежністю $a_n = \omega^2 R$. Звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точки М:

$$V = \omega R = 1 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Питання для самоконтролю

1. 1 Які найпростіші рухи твердого тіла ви знаєте?
2. Який рух твердого тіла є поступальним. Наведіть приклади поступального руху. Вкажіть основні властивості та рівняння поступального руху.
3. Яке рівняння визначає обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі?
4. Як пов'язані між собою кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення тіла?
5. Як напрямлені вектори кутової швидкості і кутового прискорення тіла, яке здійснює обертовий рух навколо нерухомої осі?
6. Як знайти швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?
7. Як визначається прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі? Як направлені і чому дорівнюють його складові?

ГЛАВА III
ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 1. Основні визначення. Рівняння плоско-паралельного руху твердого тіла

Якщо всі точки твердого тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій (основній) площині, то такий рух називається ***плоско-паралельним*** *(або плоским).*

Велика кількість механізмів в сучасному машинобудуванні належать до так званих плоских механізмів, тобто до механізмів, окремі ланки яких здійснюють плоский рух. Тому вивчення плоско-паралельного руху має велике практичне значення.

Найпростішими прикладами плоского руху є рух колеса по прямолінійній рейці, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму.

Із визначення плоского руху випливає можливість приведення задачі про вивчення руху тіла в трьох вимірному просторі до вивчення руху плоскої фігури в її площині.

Із геометричних міркувань ясно, що при плоскопаралельному русі всяка скріплена з тілом пряма AB, яка перпендикулярна до основної площини (рис. 3.1), буде рухатися поступально, тобто паралельно сама собі (саме ж тіло буде рухатися, взагалі кажучи, не поступально). З визначення плоского руху випливає, що точки A і B рухаються в площинах паралельних основній площині. Очевидно, що всі точки прямої AB здійснюють однаковий рух, тобто траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої однакові. Отже рух прямої AB повністю визначається рухом однієї з точок на цій прямій, наприклад точки M, а рух всього тіла – рухом паралельного до основної площини П перетину S тіла в площині Π_1 (рис. 3.1). Тому надалі плоский рух тіла будемо розглядати як рух плоскої фігури S в площині $0xy$, суміщеної з площиною Π_1.

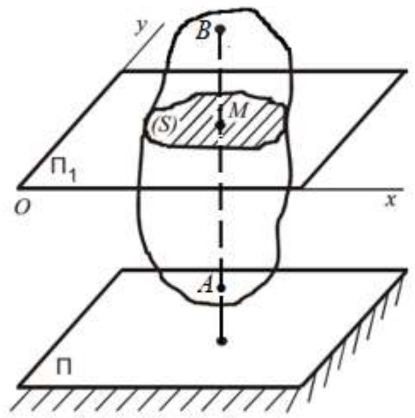


Рис. 3.1

Положення незмінної плоскої фігури в її площині повністю визначається положенням двох її точок, або положенням відрізка прямої, який з'єднує ці точки, наприклад відрізка AB (рис. 3.2). Отже положення плоскої фігури S в площині Oxy визначається координатами x_A, y_A деякої точки A, яку називають полюсом, і кутом φ, який утворює зв'язаний з плоскою фігурою S відрізок AB з віссю Ox.

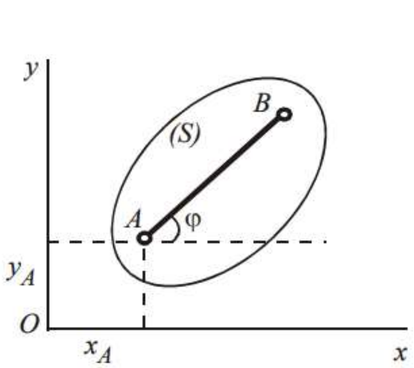


Рис. 3.2

Залежність від часу цих величин

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t) \qquad (3.1)$$

називають рівняннями плоско-паралельного (плоского) руху твердого тіла. Перші два рівняння визначають рух тіла при незмінному куті φ, тобто визначають поступальний рух тіла. Останнє рівняння характеризує обертовий тіла навколо осі, що проходить через полюс A перпендикулярно до площини Oxy, при незмінних координатах точки A.

Теорема. *Всяке переміщення плоскої фігури в її площині може бути складене з поступального переміщення і повороту навколо деякого центра (полюса).*

Нехай маємо два довільних положення плоскої фігури Π_1 і Π_2, які характеризуються положеннями A_1B_1 і A_2B_2 незмінно зв'язаного з цією фігурою відрізка AB (рис. 3.3). Поступальним рухом фігури П перемістимо її з положення Π_1 в положення Π_3 так, щоб точка A_1 зайняла положення A_2. Це переміщення визначається вектором $\overrightarrow{A_1A_2}$. Тоді відрізок AB займе положення $A_2B_3||A_1B_1$. Тепер повернемо фігуру навколо центра A_2 на кут $\Delta\varphi = B_3A_2B_2$. В результаті відрізок A_2B_3 займе положення A_2B_2, а фігура П – кінцеве положення Π_2.

Таким чином *плоский рух твердого тіла можна розглядати як суму поступального руху разом з деяким полюсом і обертального руху навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно до площини руху.*

В якості полюса при вивченні плоского руху вибирають будь-яку точку тіла. Характеристики поступальної частини плоского руху залежить від того, яка точка вибрана за полюс. Можна показати, що обертальна частина руху фігури від вибору полюса не залежить, тобто при будь-якому полюсі для того, щоб привести фігуру з положення Π_1 в положення Π_2, її потрібно повернути на один і той же кут $\Delta\varphi$, який дорівнює куту між напрямками відрізків A_1B_1 і A_2B_2.

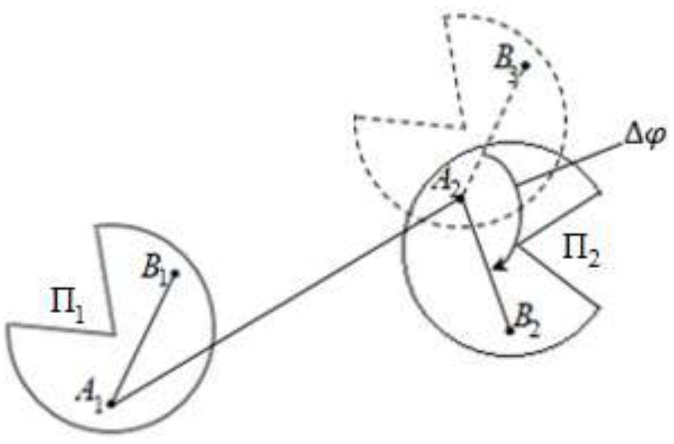


Рис. 3.3

При плоскому русі кутову швидкість і кутове прискорення можна вважати векторами, які направлені вздовж рухомої осі, що проходить через вибраний полюс перпендикулярно до площини руху.

§ 2. Швидкості точок тіла при плоскому русі

Якщо задані рівняння плоско-паралельного руху тіла (3.1), то можна визначити швидкість $\vec{V}_A$ полюса і кутову швидкість ω плоскої фігури. Розглянемо рух довільної точки B плоскої фігури, положення якої в довільний момент часу відносно нерухомої системи відліку Oxy визначається радіусом-вектором (рис. 3.4)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}.$$

Знайдемо швидкість цієї точки

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}. \tag{3.2}$$

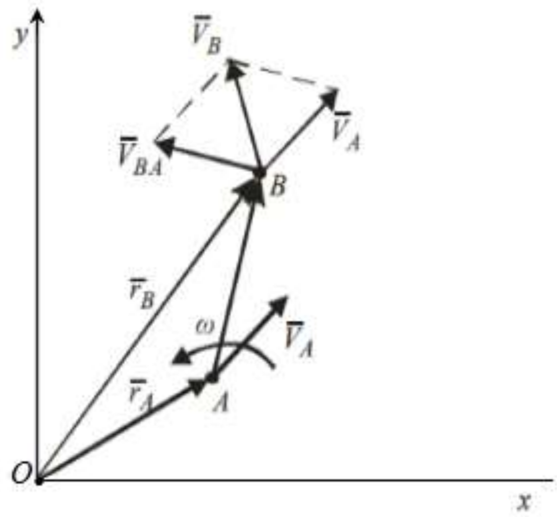


Рис. 3.4

Тут $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A -$ швидкість полюса A. Похідна від вектора постійного модуля $\overrightarrow{AB}$ за часом визначається формулою (1.28), тобто

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}.$$

Легко бачити, що це швидкість точки B, яку вона одержує при обертанні плоскої фігури навколо полюса A з кутовою швидкістю ω. Позначають цю швидкість $\vec{V}_{BA}$ і кажуть, що це швидкість точки B в її обертовому русі навколо полюса A. Отже, із рівності (3.2) маємо

$$\begin{gathered} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}; \\ \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Величина швидкості $\vec{V}_{BA}$ і її напрямок визначаються так

$$V_{BA} = \omega \cdot BA \quad \left(\vec{V}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}\right), \tag{3.4}$$

(направлений вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярно до $\overrightarrow{AB}$ в напрямку обертання фігури)

Отже, *швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і швидкості цієї точки в її обертальному русі навколо полюса* (рис. 3.4).

Теорема про проекції швидкостей двох точок на пряму, що з'єднує ці точки

При розв'язуванні задач для знаходження швидкості довільної точки плоскої фігури замість співвідношення (3.3) можна використовувати більш прості співвідношення. Одне з таких співвідношень випливає з такої теореми: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою.*

Доведення. Спроектуємо векторну рівність (3.3) на лінію, проведену через точки A, B (рис. 3.5) і, враховуючи, що $\vec{V}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$, одержимо

$$V_A cos\alpha = V_B cos\beta. \tag{3.5}$$

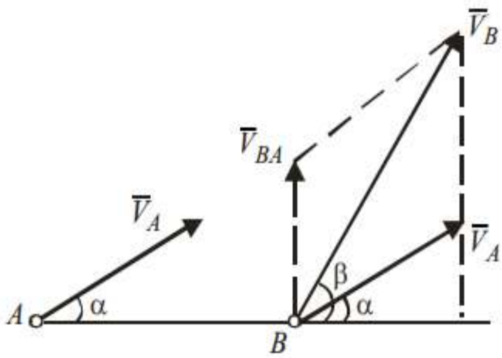


Рис. 3.5

Ця теорема дозволяє знаходить швидкість довільної точки тіла, якщо для неї відомий напрямок вектора швидкості, а також величина і напрямок швидкості будь-якої іншої точки цього тіла. Зауважимо, що ця теорема справедлива не тільки у випадку плоского руху, а й у випадку руху вільного твердого тіла і називається теоремою Грасгофа.

§ 3. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається миттєвим центром швидкостей (м.ц.ш.).

Покажемо, що така точка завжди існує при умові, що кутова швидкість плоскої фігури в даний момент часу не дорівнює нулю ($\omega \neq 0$).

Нехай в даний момент часу відома швидкість довільної точки A плоскої фігури ($\vec{V}_A \neq 0$) і її кутова швидкість ω, яка відмінна від нуля (рис. 3.6). Від вектора $\vec{V}_A$ відкладемо кут 90° у напрямку кутової швидкості плоскої фігури і проведемо в цьому напрямку промінь AM. Відкладемо на цьому промені відрізок

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \tag{3.6}$$

Виберемо в якості полюса точку A і знайдемо швидкість точки P:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA},$$

де

$$V_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \cdot \frac{V_A}{\omega} = V_A.$$

Так як вектор $\vec{V}_{PA}$ перпендикулярний до AP і направлений у напрямку обертання плоскої фігури, то $\vec{V}_A = -\vec{V}_{PA}$, і $V_P = V_A - V_{PA} = 0$, тобто швидкість точки P у даний момент часу дорівнює нулю і тому вона є миттєвим центром швидкостей. Іншої такої точки плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, не існує, так як наявність двох точок з нульовою швидкістю означало б, що плоска фігура в даний момент часу нерухома, а це суперечить прийнятій умові $\vec{V}_A \neq 0$.

Зауважимо, що в багатьох випадках точка P може виявитися за межами плоскої фігури, тоді слід умовно продовжити плоску фігуру так, щоб ця точка була в її межах.

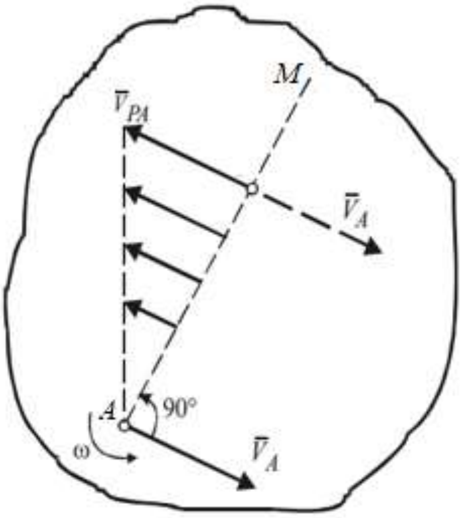


Рис. 3.6

Якщо вибрати тепер в якості полюса миттєвий центр швидкостей P, то швидкість будь-якої точки плоскої фігури буде визначатися так (рис. 3.7)

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP}, \text{або } \vec{V}_A = \vec{V}_{AP}, \;\; V_A = \omega \cdot AP; \; \vec{V}_A \perp \overrightarrow{AP}.$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP}, \text{або } \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}, \;\; V_B = \omega \cdot BP; \; \vec{V}_B \perp \overrightarrow{BP};$$

$$\vec{V}_K = \vec{V}_P + \vec{V}_{KP} = \vec{V}_{KP}, \text{або } \vec{V}_K = \vec{V}_{KP}, \;\; V_K = \omega \cdot KP; \; \vec{V}_K \perp \overrightarrow{KP}.$$

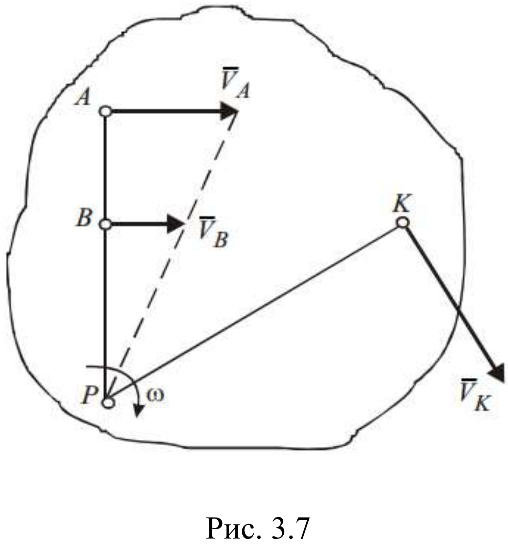


Рис. 3.7

Отже, *швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює її швидкості в обертальному русі плоскої фігури навколо миттєвого центра швидкостей*. Із рівняння (3.6) маємо

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \cdots = \frac{V_K}{KP}, \tag{3.7}$$

тобто *кутова швидкість плоскої фігури в даний момент часу дорівнює відношенню швидкості однієї з її точок до довжини відрізка, що з'єднує точку з м.ц.ш., а швидкості точок тіла пропорційні відстаням від цих точок до м.ц.ш.*

§ 4. Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Існує декілька прийомів знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

1. Якщо відомі швидкість $\vec{V}_A$ однієї з точок плоскої фігури та її кутова швидкість ω, то м.ц.ш. знаходиться на перпендикулярі до вектора $\vec{V}_A$ швидкості точки, відкладеному в напрямку обертання плоскої фігури, на відстані $AP = \dfrac{V_A}{\omega}$ (рис. 3.6).

2. Якщо відомі напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури і вони не паралельні (рис. 3.8), то м.ц.ш. лежить на перетині перпендикулярів до цих напрямків, проведених через ці дві точки.

3. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, напрямлені в один бік і їхні модулі різні (рис. 3.9, а), то м.ц.ш. знаходиться на перетині спільного перпендикуляра до векторів швидкостей цих точок і лінії, проведеної через кінці цих векторів.

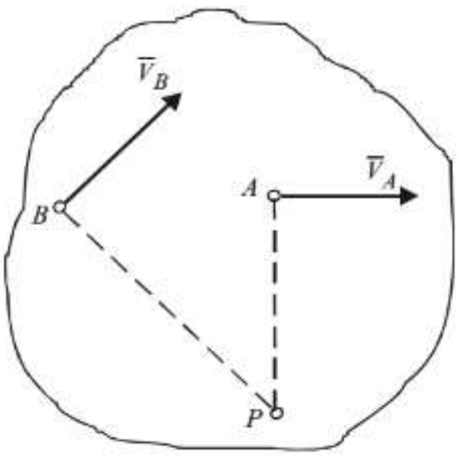


Рис. 3.8

4. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, напрямлені в різні боки (рис. 3.9, б), то м.ц.ш. знаходиться на перетині спільного перпендикуляра до векторів швидкостей цих точок і лінії, проведеної через кінці цих векторів.

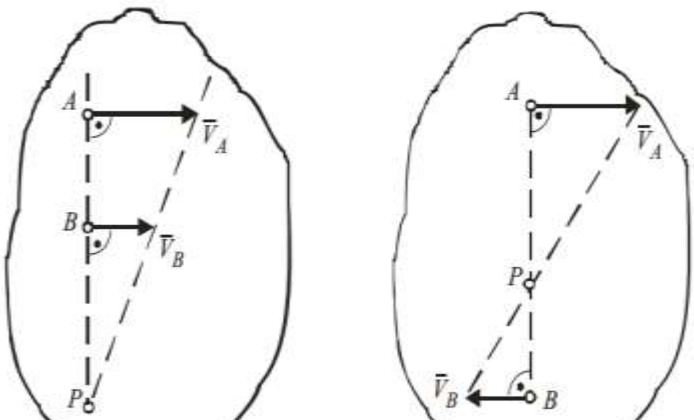


Рис. 3.9

5. Якщо швидкості двох точок паралельні між собою, а лінія що з'єднує ці точки, неперпендикулярна до їх швидкостей (рис. 3.10), то м.ц.ш. знаходиться в нескінченності ($AP = \infty; BP = \infty$), а кутова швидкість плоскої фігури $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$. У цьому випадку тіло здійснює так званий миттєвий поступальний рух. При цьому швидкості усіх точок плоскої фігури у даний момент часу рівні за величиною і однаково направлені.

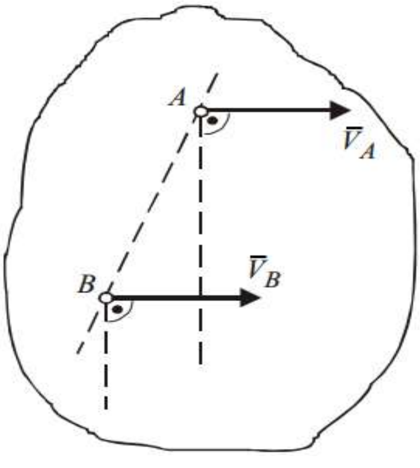


Рис. 3.10

6. У випадку кочення рухомого контуру плоскої фігури по нерухомій іншій поверхні (рис. 3.11), м.ц.ш. знаходиться в точці контакту тіла з нерухомою поверхнею, так як при відсутності ковзання швидкість цієї точки рухомого тіла дорівнює нулю.

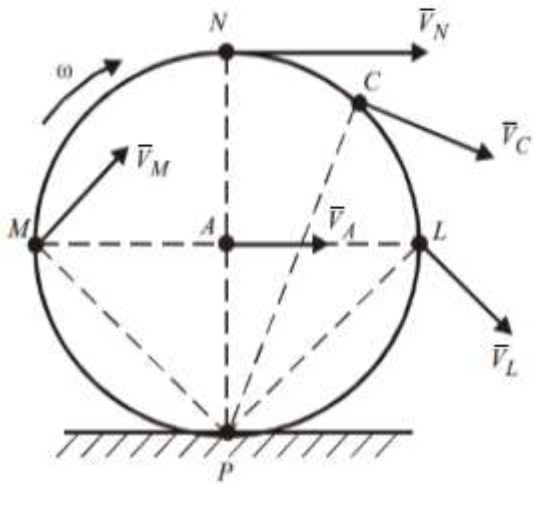


Рис. 3.11

§ 5. Прискорення точок тіла при плоскому русі

Швидкість будь-якої точки В плоскої фігури згідно з (3.3) визначається формулою

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності по часу, дістанемо:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt}. \quad (3.8)$$

Величина $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} -$ вектор кутового прискорення фігури, який напрямлений перпендикулярно до площини фігури. Крім того $\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ як похідна від вектора постійного модуля. Так як вектори $\vec{\omega}$ і $\overrightarrow{AB}$ взаємно перпендикулярні і $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, будемо мати:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\ \right) = \vec{\omega} \cdot \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB}\ \right) - \overrightarrow{AB}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \overrightarrow{AB}.$$

Тут використана відома формула векторної алгебри $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

В результаті рівність (3.8) дає:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \left(\ \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}\right) - \omega^2 \overrightarrow{AB}.$$

Введемо позначення

$$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} = \vec{a}_{BA}^{\text{об}},\ \ -\omega^2 \overrightarrow{AB} = \vec{a}_{BA}^{\text{доц}}.$$

Вектори $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ і $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$ представляють відповідно це обертове (дотичне) і доцентрове (нормальне) прискорення, які мала би точка *B*, якщо б фігура здійснювала тільки обертовий рух навколо полюса *A*.

Остаточно знаходимо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \qquad (3.9)$$

де $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} -$ прискорення точки *B* у її обертовому русі навколо полюса *A*.

Таким чином *прискорення будь-якої точки плоскої фігури складається геометрично із прискорення полюса і прискорення, яке точка отримує при обертанні фігури навколо полюса.*

Так як $\vec{\varepsilon} \perp \overrightarrow{AB}$, то чисельно :

$$a_{BA}^{\text{об}} = \varepsilon \cdot AB;\ a_{BA}^{\text{доц}} = \omega^2 \cdot AB,$$
$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (3.10)$$

Вектори $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$ і $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$ направлені так як дотичне і нормальне прискорення точки при обертовому русі, тобто $\vec{a}_{BA}^{\text{об}} \perp \overrightarrow{AB}$ і направлене в напрямку обертання фігури, якщо обертання прискорене, і в протилежному напрямку, якщо обертання сповільнене; $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}} \parallel \overrightarrow{AB}$ і направлене від точи *B* до полюса *A*, тобто до центра обертання. Зауважимо, що для цих складових прискорення точки B часто використовують позначення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ і $\vec{a}_{BA}^{n}$, тобто так, як при чисто обертовому русі.

Кут μ, який утворює вектор $\vec{a}_{BA}$ з відрізком AB, визначається за формулою

$$tg\mu = \frac{a_{BA}^{\text{об}}}{a_{BA}^{\text{доц}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2};\ \mu = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \qquad (3.11)$$

У загальному випадку полюс *A* може рухатись криволінійно і його прискорення теж може мати дотичну і нормальну складові $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n}$, тому розгорнута формула для визначення прискорення довільної точки плоскої фігури буде мати чотири складових:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{n}. \qquad (3.12)$$

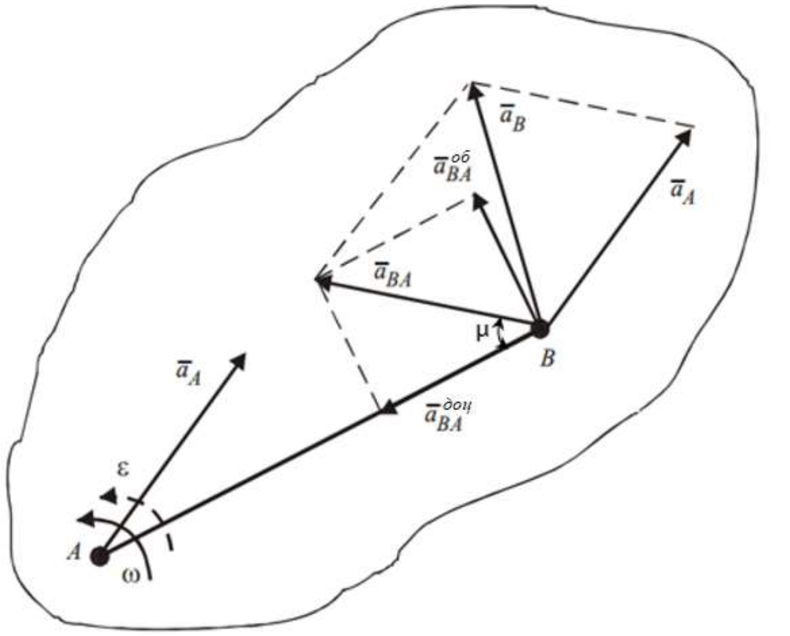


Рис. 3.12

Отримані результати дозволяють побудувати вектор $\vec{a}_B$ так, як це показано на рис. 3.12. На практиці геометричне складання векторів при знаходженні прискорення точки плоскої фігури зручніше здійснювати шляхом проектування векторного виразу (3.12) на вибрані осі координат.

§ 6. Миттєвий центр прискорень

В кожний момент руху плоскої фігури в своїй площині, якщо одночасно не дорівнюють нулю ω і ε, існує єдина точка цієї фігури, прискорення якої дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром прискорень (м.ц.п.).

Нехай у деякий момент часу відоме прискорення деякої точки A плоскої фігури, а також її кутова швидкість ω і кутове прискорення ε (рис. 3.13).

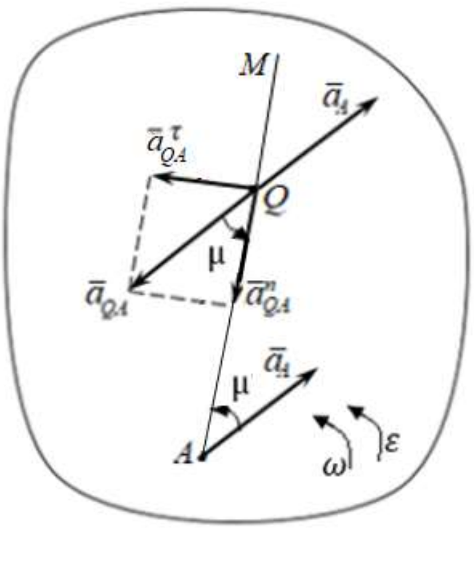


Рис. 3.13

Відкладемо від вектора прискорення $\vec{a}_A$ точки A кут μ, який визначається за формулою (3.11). Відкладаємо цей кут в напрямку ε, тобто в напрямку обертання фігури, якщо обертання прискорене і в протилежному напрямку, якщо обертання сповільнене. З точки A під цим кутом проводимо промінь AM. Покажемо на промені точку Q, яка знаходиться на відстані AQ від точки A, причому

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}.$$

Знайдемо прискорення точки Q.

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA};$$

$$\vec{a}_{QA} = \vec{a}^{\tau}_{QA} + \vec{a}^{n}_{QA};$$

$$a^{\tau}_{QA} = \varepsilon \cdot AQ;\ a^{n}_{QA} = \omega^2 \cdot AQ;\ \ a_{QA} = \sqrt{\left(a^{\tau}_{QA}\right)^2 + \left(a^{n}_{QA}\right)^2} = AQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = a_A.$$

Вектор прискорення $\vec{a}_{QA}$ утворює з вектором $\overrightarrow{QA}$ кут, тангенс якого дорівнює

$$tg\alpha = \frac{a^{\tau}_{QA}}{a^{n}_{QA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = tg\mu.$$

Отже цей кут дорівнює куту μ. Таким чином вектор $\vec{a}_{QA}$ по модулю дорівнює a_A і направлений вздовж тієї ж лінії що й $\vec{a}_A$ в протилежному до $\vec{a}_A$ напрямку, тобто $\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A$. Значить

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = \vec{a}_A - \vec{a}_A = 0,$$

тобто точка Q є миттєвим центром прискорень.

Звідси випливає, що в кожен момент часу, за винятком, коли $\omega = 0$, існує єдина точка, прискорення якої дорівнює нулю. Якщо тепер в якості полюса вибрати миттєвий центр прискорень Q, то прискорення будь – якої точки M буде рівне

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ},$$

тобто прискорення всіх інших точок шукаються так, як при чисто обертовому русі навколо миттєвого центра прискорень. Можна показати, що модулі прискорень двох точок плоскої фігури відносяться між собою так, як їхні відстані від миттєвого центра прискорень. Ці прискорення направлені під однаковим для всіх точок плоскої фігури кутом μ до радіусів – векторів, що з'єднують миттєвий центр прискорень з цими точками.

Потрібно зазначити, що миттєвий центр прискорень в загальному випадку руху не збігається з миттєвим центром швидкостей.

§ 7. Приклади розв'язання задач кінематики плоского руху

Приклад 3.1

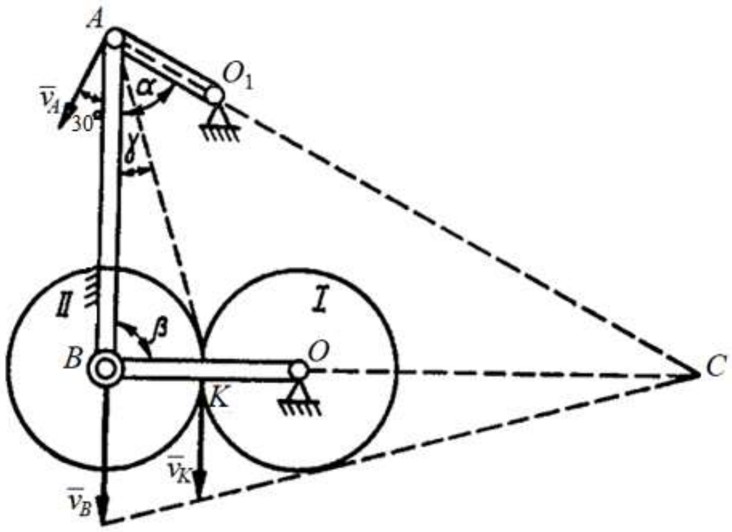
Механізм Уатта складається з коромисла O_1A, яке, гойдаючись на осі O_1, передає за допомогою шатуна *AB* рух кривошипу *OB*, вільно насадженому на вісь *O*. На цю саму вісь насаджено колесо I. Шатун *AB* закінчується колесом II, яке наглухо зв'язане з шатуном. Визначити кутові швидкості кривошипа *OB* і колеса I в момент, коли $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, якщо $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$см; $O_1A = 75$см; $AB = 150$см і кутова швидкість коромисла $\omega_0 = 6$сек$^{-1}$ (рис. 3.14).

Розв'язання. Складемо спочатку загальний план розв'язання задачі. З умови видно, що кутову швидкість кривошипа *OB* знайдемо, якщо визначимо лінійну швидкість точки B, яка належить шатуну AB і колесу II одночасно. Так само кутову швидкість колеса I знайдемо, якщо визначимо лінійну швидкість точки *K* колеса II, в якій воно зчіплюється з колесом I.

1-й спосіб. Щоб визначити швидкість точки *B*, застосуємо теорему про проекції швидкостей кінців незмінного відрізка на його напрям. За цією теоремою ці проекції повинні бути однаковими.

Проектуючи швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ на напрям AB, матимемо:

$$v_B = v_A \sin\alpha = \omega_0 \cdot O_1 A sin 60° = 225\sqrt{3} \text{ см/сек.}$$



O_1A

Рис.3.14

Для визначення швидкості точки *K* спроектуємо швидкості точок *A* і *K* на напрям відрізка *AK*. Дістанемо:

$$v_K \cos\gamma = v_A \cos(30 + \gamma).$$

Беручи до уваги, що

$$tg\gamma = \frac{BK}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

матимемо:

$$v_K = 180\sqrt{3} \text{ см/сек.}$$

Знаючи швидкості точок *B* і *K*, визначаємо шукані кутові швидкості:

$$\omega_{OB} = \frac{v_B}{OB} = 3{,}75 \text{ рад/сек;}$$

$$\omega_{\mathrm{I}} = \frac{v_K}{OK} = 6 \text{ рад/сек.}$$

2-й спосіб. Для визначення швидкостей $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_K$ побудуємо миттєвий центр швидкостей ланки AB. Щоб знайти його положення, поставимо до векторів швидкостей в точках A і B перпендикуляри. Точка *C* перетину цих перпендикулярів і є миттєвий центр швидкостей ланки AB. Отже можна записати:

$$\frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_K}{KC}.$$

Таким чином

$$v_B = v_A \frac{BC}{AC} = v_A \sin\alpha = 225\sqrt{3} \text{ см/сек};$$

$$v_K = v_A \frac{KC}{AC} = 180\sqrt{3} \text{ см/сек};$$

ω_{OB} і ω_{I} визначаються так само, як і в попередньому випадку.

Приклад 3.2

У плоскому механізмі, зображеному на рис. 3.15, довжина ланок якого $l_1 = OA = 0{,}6$ м, $l_2 = AB = 1{,}8$ м, $l_3 = O_1B = 2{,}4$ м, $O_1D = 0{,}8$ м і $l_4 = DE = 1{,}2$ м, кривошип *OA* обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon_1 = 10\text{с}^{-2}$. Визначити швидкості V_B, V_E точок *B*,*E* механізму і кутові швидкості ω_2, ω_4 стрижнів *AB* і *DE*, а також прискорення a_B точки *B* та кутове прискорення ε_2 стрижня *AB* в положенні механізму, коли кути $\alpha = 60°, \beta = 90°, \gamma = 45°, \theta = 120°$, а кутова швидкість кривошипа *OA* в цей момент часу $\omega_1 = 6\text{с}^{-1}$.

Розв'язання. Будуємо положення механізму у відповідності до заданих кутів (рис. 3.16). Проаналізуємо рух кожної з ланок механізму. Кривошип *OA* здійснює обертовий рух навколо осі, що проходить через точку *O*. Ланка 3 (O_1BD) теж здійснює обертовий рух навколо осі, що проходить через точку O_1. Ланки *AB* і *DE* здійснюють плоско-паралельний рух.

Визначаємо швидкості точок механізму. Швидкість точки *A* визначається як швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Її модуль $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6\ \text{м}/c$ і направлений вектор $\vec{V_A}$ перпендикулярно до кривошипа *OA* в напрямку його обертання. Точка *B* належить ланці 3, яка здійснює обертовий рух навколо точки O_1. Отже вектор швидкості $\vec{V_B}$ точки *B* перпендикулярний до O_1B. Точка *B* одночасно належить шатуну *AB*. Таким чином для ланки *AB*, яка рухається плоско-паралельно, маємо величину і напрямок швидкості точки *A* та напрямок швидкості точки *B*. Миттєвий центр швидкостей P_2 стрижня *AB* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок *A* і *B* до векторів їх швидкостей. Відомо, що швидкість будь-якої точки плоскої фігури визначається так, як при чисто обертовому русу навколо миттєвого центра швидкостей з деякою кутовою швидкістю. Позначимо цю кутову швидкість ω_2. Тоді можемо записати

$$V_A = \omega_2 \cdot AP_2;\ \ V_B = \omega_2 \cdot BP_2.$$

Так як величина швидкості точки *A* відома, то отримуємо $\omega_1 \cdot l_1 = \omega_2 \cdot AP_2$, звідки знаходимо кутову швидкість ω_2, а значить і величину швидкості точки *B*.

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot l_1}{AP_2} = \frac{\omega_1 \cdot l_1}{\text{AB}} = \frac{\omega_1 \cdot l_1}{l_2} = \frac{3{,}6}{1{,}8} = 2c^{-1};$$

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = \omega_2 \cdot \frac{AB}{sin45°} = 2 \cdot 2{,}55 = 5{,}1\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

Виходячи з напрямку швидкості точки *A*, знаходимо напрямок обертання фігури *AB* навколо миттєвого центру швидкостей P_2 (рис. 3.16) і напрямок швидкості точки *B*. Точка *B* належить також ланці 3, яка обертається з деякою кутовою швидкістю ω_3 навколо точки O_1. Отже

$$V_B = \omega_3 \cdot BO_1 \text{ звідки } \omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{5{,}1}{2{,}4} = 2{,}125\ c^{-1}.$$

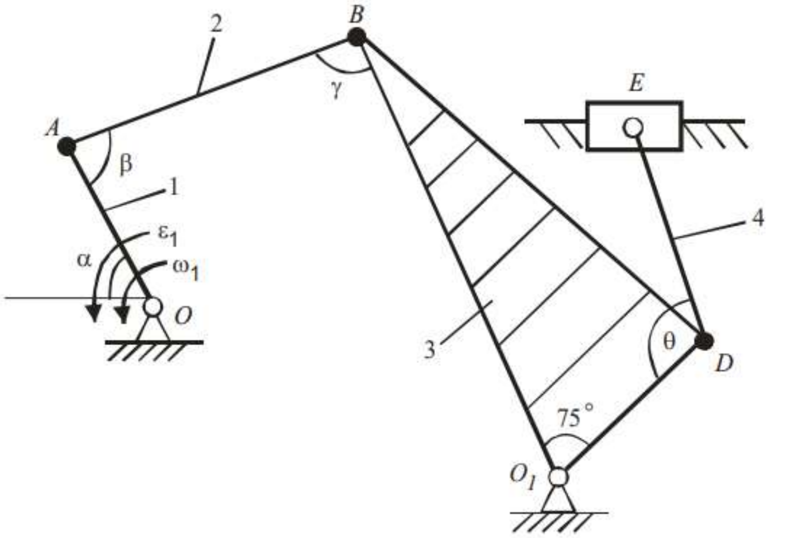


Рис. 3.15

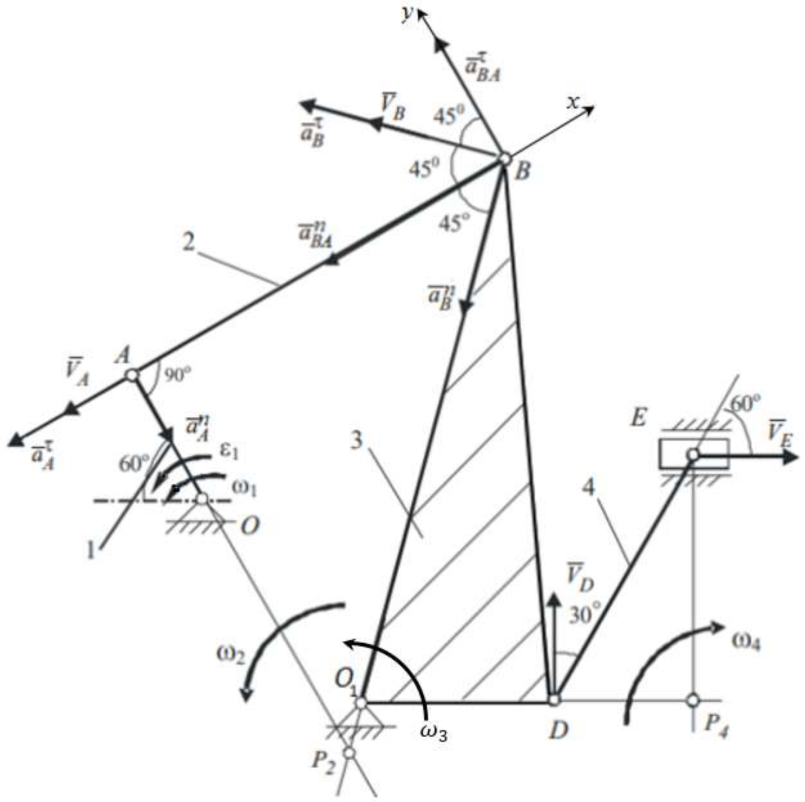


Рис. 3.16

Точка D також належить ланці 3 і її швидкість $V_D = \omega_3 \cdot DO_1 = 2{,}125 \cdot 0{,}8 = 1{,}7\ ^{м}/_{с}$. Направлений вектор швидкості точки D перпендикулярно до O_1D в напрямку обертання ланки 3.

Точка E належить ланці 4, яка здійснює плоский рух. Так як ця точка також належить повзуну, який рухається в горизонтальних направляючих, то її швидкість направлена горизонтально. Отже для ланки 4 маємо величину і напрямок швидкості точки D і напрямок швидкості точки E. Значить можна знайти миттєвий центр швидкостей P_4 цієї ланки і відповідно кутову швидкість ω_4 і швидкість точки E.

$$V_D = \omega_4 \cdot DP_4 = \omega_3 \cdot DO_1;\ \ \omega_4 = \frac{\omega_3 \cdot DO_1}{DP_4} = \frac{1{,}7}{0{,}6} = 2{,}83c^{-1}.$$

$$V_E = \omega_4 \cdot EP_4 = \omega_4 \cdot l_4 cos30° = 2{,}83 \cdot 0{,}6\sqrt{3} = 2{,}94 \, ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

Зауважимо, що як швидкість точки *B*, так і швидкість точи *E* можна знаходити скориставшись теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки.

Визначимо прискорення точок. Точка *A* належить ланці 1, яка здійснює обертовий рух навколо точки O з кутовою швидкістю ω_1 і кутовим прискоренням ε_1. Отже прискорення точки *A* складається з дотичного і нормального прискорень:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n;$$
$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 6 \, ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}; \;\; a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 21{,}6 \, ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}. \qquad (а)$$

Так як обертання прискорене, вектор $\vec{a}_A^\tau$ направлений перпендикулярно до *OA* в напрямку швидкості точки А, а вектор $\vec{a}_A^n$ направлений від точки *A* до точки *O*. Точка В належить ланці 2, яка рухається плоско-паралельно. Виберемо в якості полюса точку А і прискорення точки знаходимо за формулою

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n.$$

Точка *B* належить одночасно стрижню BO_1 (ланці 3), який обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю ω_3 і невідомим прискоренням ε_3. Отже прискорення точки *B* також складається з дотичного і нормального прискорень, тобто

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (б)$$

Проаналізуємо кожний член в лівій і правій частині (б).

Вектор $\vec{a}_B^\tau$ направлений перпендикулярно до стрижня O_1B, проте ні величини ні в яку сторону він направлений ми не знаємо, так як невідоме кутове прискорення ε_3. Тому направляємо його в будь-яку сторону. В нашому випадку ми направили його в тому ж напрямку, що й швидкість точки В, тобто ми припустили, що обертання ланки 3 навколо точки O_1 прискорене. Нормальне прискорення точки *B*

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot l_3 = 10{,}85 \, ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$$

і вектор $\vec{a}_B^n$ направлений від точки *B* до точки O_1.

Вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлений перпендикулярно до стрижня *AB*, проте ні величини ні в яку сторону він направлений ми теж не знаємо, так як невідоме кутове прискорення ε_2. Направляємо це прискорення так, як показано на рис.3.16. Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлений вздовж *AB* від точки *B* до точки *A* і за величиною він дорівнює:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2 = 7{,}2 \, ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Перепишемо рівняння (б) і ці члени, які відомі як за величиною так і за напрямком залишимо без зміни, а ці, які відомі тільки за напрямком підкреслимо рискою.

$$\underline{\vec{a}_B^\tau} + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \underline{\vec{a}_{BA}^\tau} + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (в)$$

Таким чином невідомі тільки числові значення a_B^τ і a_{BA}^τ. Щоб знайти ці величини, спроектуємо обидві частини векторного рівняння на дві довільно вибрані перпендикулярні осі x та y. Направляємо одну з осей (вісь x) вздовж стрижня *AB* і вісь y в перпендикулярному напрямку. В результаті проектування одержимо:

$$-(a_B^\tau + a_B^n) cos45° = -a_A^\tau - a_{BA}^n;$$

$$(a_B^\tau - a_B^n) sin45° = -a_A^n + a_{BA}^\tau.$$

З цих алгебраїчних рівнянь знаходимо:

$$a_B^\tau = \frac{a_A^\tau + a_{BA}^n}{cos45°} - a_B^n = 7{,}8\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2};$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^n + (a_B^\tau - a_B^n)sin45° = 19{,}5\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Тоді прискорення точки *B*:

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 13{,}4\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Кутове прискорення стрижня *AB*:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 8{,}1\text{с}^{-2}.$$

Відповідь:

$$V_B = 5{,}1\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}};\ V_E = 2{,}85\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}};\ \omega_2 = 2\text{с}^{-1};\ \omega_4 = 2{,}83\ \text{с}^{-1};\ a_B = 13{,}4\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2};\ \varepsilon_2 = 8{,}1\ \text{с}^{-2}.$$

Приклад 3.3

Шестерня 2 радіуса $R = 12$ см планетарного механізму (рис. 3.17, а) починає рухатися кривошипом *OA*, який обертається навколо осі O нерухомої шестерні 1 з тим же радіусом. Кривошип *OA* обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon_0 = 8c^{-2}$, маючи у даний момент кутову швидкість $\omega_0 = 2c^{-1}$. Визначити швидкість і прискорення точки *B* рухомої шестерні механізму, якщо $\angle OAB = 120°$.

Розв'язання. Кривошип *OA* здійснює обертовий рух, причому з рисунка бачимо, що вектори кутової швидкості і кутового прискорення направлені в протилежні сторони. Це означає, що обертання сповільнене. Швидкість і прискорення точки A дорівнюють:

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 48\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}};$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 192\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}};$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 96\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}}.$$

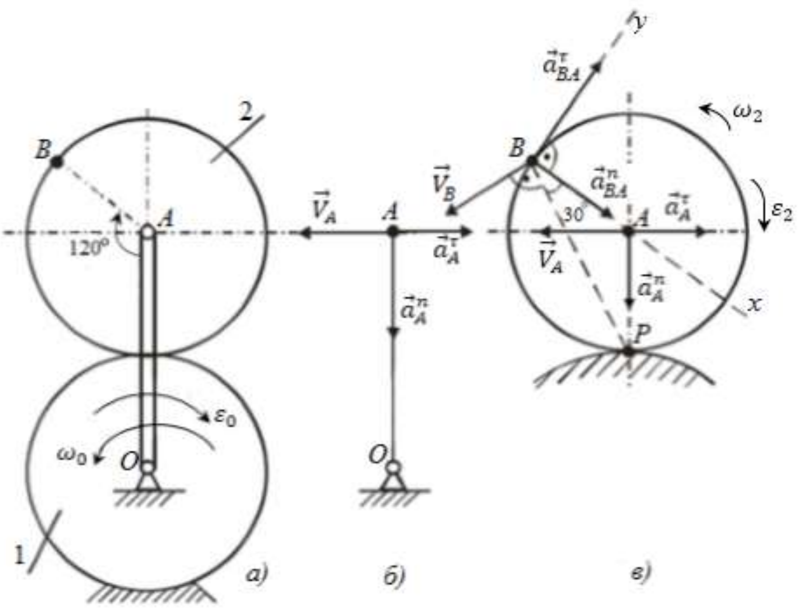


Рис. 3.17

Напрямки векторів $\vec{V}_A, \vec{a}_A^\tau, \vec{a}_A^n$ показані на рис. 3.17, б. Внаслідок того, що обертання кривошипа сповільнене, прискорення $\vec{a}_A^\tau$ направлене в протилежну сторону від $\vec{V}_A$.

Шестерня 2 здійснює плоский рух. Миттєвий центр швидкостей шестерні знаходиться в точці P її контакту з нерухомою шестернею 1, а відстань $AP = R = const$.
Тоді

$$V_A = \omega_2 \cdot AP;\;\; V_B = \omega_2 \cdot BP.$$

Маючи швидкість точки A в даний момент часу знайдемо:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{\omega_0 \cdot OA}{R} = 2\omega_0 = 4c^{-1}.$$

Зауважимо, що якщо кутову швидкість кривошипа в довільний момент часу позначити через ω, то кутова швидкість шестерні в довільний момент часу буде рівна

$$\omega_2 = \frac{\omega \cdot OA}{R} = 2\omega.$$

Тоді

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 2\frac{d\omega}{dt} = 2\varepsilon_0 = 16c^{-2}.$$

Швидкість точки В дорівнює $V_B = \omega_2 \cdot PB = 4 \cdot 20{,}8 = 83{,}2\, ^{\text{см}}/_{\text{с}}$, де відстань PB знайдена з рівнобедреного трикутника ABP

$$PB = 2R\cos 30° = 20{,}8\text{см}.$$

Направлений вектор $\vec{V}_B$ перпендикулярно до BP в напрямку ω_2, як показано на рис. 3.17, в.

Так як прискорення точки A шестерні відоме, то її можна вибрати в якості полюса. Тоді прискорення точки B знайдемо за формулою:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n.$$

Складові прискорення точки B в її обертальному русі навколо полюса A знайдемо за формулами:

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot R = 192\, ^{\text{см}}/_{\text{с}^2};\;\; a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot R = 192\, ^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Потрібно зауважити, що прискорення ε_2 теж направлене в протилежну сторону ніж ω_2, тобто обертання шестерні 2 сповільнене.

Напрямки складових вектора прискорення точки B показані на рис. 3.17, в. Вибравши осі координат (рис. 3.17, в), визначимо проекції вектора $\vec{a}_B$ на ці осі:

$$a_{Bx} = a_A^\tau\cos 30° + a_A^n\cos 60° + a_{BA}^n = 406{,}3\, ^{\text{см}}/_{\text{с}^2};$$

$$a_{By} = a_A^\tau\sin 30° - a_A^n\sin 60° + a_{BA}^\tau = 204{,}9\, ^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Тоді

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + \left(a_{By}\right)^2} = 455\, ^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Приклад 3.4

Знайти положення миттєвого центра прискорень колеса радіусом $R = 50см$, що котиться без ковзання по нерухомій рейці зі швидкістю $v_O = 2м/с$ і прискоренням $a_O = 1м/с^2$ (рис. 3.18).

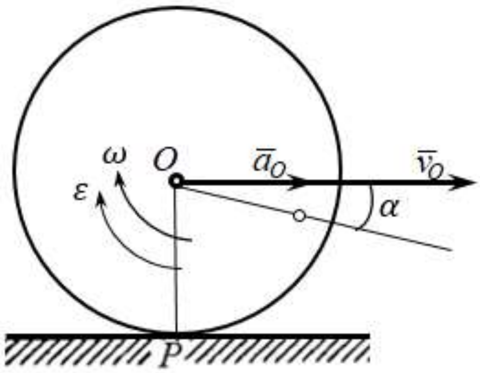


Рис. 3.18

Розв'язання. Згідно з умовою задачі за полюс потрібно вибрати центр колеса O. Тоді для визначення положення миттєвого центра прискорень Q слід повернути вектор $\vec{a}_O$ на кут α у бік обертання, тобто за ходом годинникової стрілки, оскільки тут рух прискорений $(\varepsilon > 0)$, і відкласти на одержаній прямій відрізок

$$OQ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Таким чином, для остаточного розв'язання задачі потрібно визначити ω і ε. Швидкість точки О дорівнює

$$v_O = \omega \cdot OP = \omega \cdot r.$$

Звідси

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{v_O}{r}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_O}{r}.$$

У цьому випадку $\varepsilon > 0$, бо $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ напрямлені в один бік. З урахуванням заданих значень v_O, r, a_O, знайдемо $\omega = 4c^{-1}$, $\varepsilon = 2c^{-2}$. Тоді

$$tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{1}{8};\ \alpha = arctg\frac{1}{8}, \alpha \approx 7°, OQ = \frac{1}{\sqrt{4 + 256}} \approx 0{,}06м = 6см.$$

2. Геометричний спосіб знаходження миттєвого центра прискорень ґрунтується на тому, що прискорення будь-яких точок плоскої фігури утворюють у кожний момент часу один і той самий кут α з відрізками, що з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень.

Покажемо, як можна геометрично знайти миттєвий центр прискорень, якщо відомі прискорення будь-яких двох точок плоскої фігури, наприклад A і B.

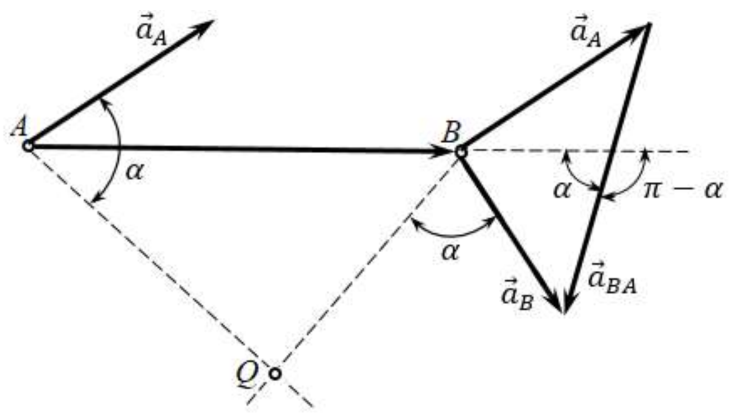


Рис. 3.19

Якщо взяти за полюс точку A, то між прискореннями точок A і B, показаними на рис. 3.19 існує така залежність:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

Якщо ж в якості полюса вибрати точку B, то

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}.$$

Отже, взявши за полюс точку A, на основі першого рівняння для $\vec{a}_{BA}$ знайдемо

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A,$$

де $\vec{a}_{BA}$ – повне прискорення точки B в її обертальному русі навколо точки A. Побудувавши у точці B зазначені вектори, знайдемо $\vec{a}_{BA}$, з'єднавши кінці векторів $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_B$ і спрямувавши $\vec{a}_{BA}$ у бік зменшуваного вектора $\vec{a}_B$. Оскільки вектор $\overrightarrow{AB}$ складає з $\vec{a}_{BA}$ кут $\pi-\alpha$, то знайдемо цей кут з креслення, а отже, знайдемо і кут α. Потім з точок A і B до їхніх прискорень проведемо прямі під кутом α до взаємного перетину. У знайденій точці перетину розташований миттєвий центр прискорень Q.

Приклад 3.5

Механізм (рис. 3.20) складається з стержнів 1, 2, 3, 4 і повзуна B, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

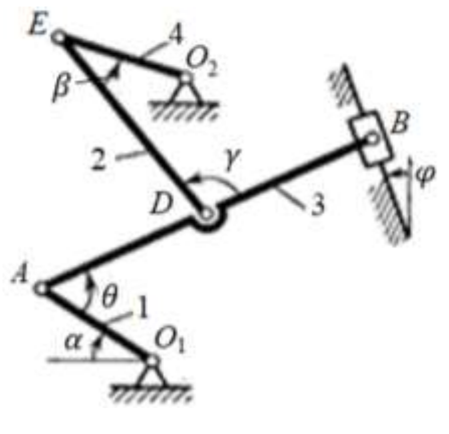


Рис. 3.20

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2\ c^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7\ c^{-2}$ (напрямки ω_1 і ε_1 – проти ходу годинникової стрілки). *Визначити*: $\vec{V}_B, \vec{V}_E, \omega_2, a_B, \varepsilon_3$.

Розв'язання. Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами (рис. 3.21; на цьому рисунку зображаємо всі вектори швидкостей).

Визначаємо V_B. Точка В належить стержню AB. Щоб знайти V_B, треба знати швидкість будь-якої іншої точки цього стержня. За даними задачі, враховуючи напрямок ω_1, можемо знайти $\vec{V}_A$; чисельно

$$\vec{V}_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8\ ^{\text{м}}/_{\text{с}};\ \ \vec{V}_A \perp O_1A. \tag{1}$$

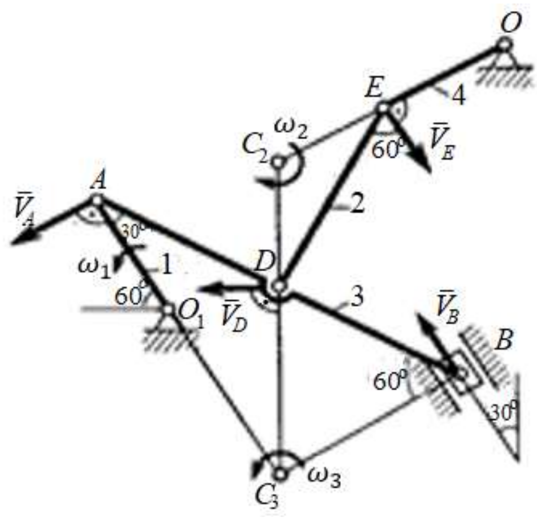


Рис. 3.21

Напрямок $\vec{V}_B$ знайдемо, врахувавши, що точка B належить одночасно повзуну, що рухається вздовж напрямних поступально. Тепер, знаючи $\vec{V}_A$ і напрямок $\vec{V}_B$, скористаємось теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стержня AB) на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB). Спочатку по цій теоремі встановлюємо, в яку сторону направлений вектор $\vec{V}_B$ (проекції швидкостей повинні мати однакові знаки). Обчислюючи ці проекції, знаходимо

$$V_B cos30° = V_A cos60°, \qquad V_B = 0{,}46\ \text{м/с}. \tag{2}$$

Визначаємо $\vec{V}_E$. Точка E належить стержню DE. Отже, по аналогії з попереднім, щоб визначити $\vec{V}_E$, треба спочатку знайти швидкість точки D, яка належить одночасно стержню AB. Для цього, знаючи $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$, будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) стержня AB; це точка C_3, яка лежить на перетині перпендикулярів до $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$, проведених через точки A і B ($\vec{V}_A$ перпендикулярна стержню 1). По напрямку вектора $\vec{V}_A$ визначаємо напрямок повороту стержня AB навколо МЦШ C_3. Вектор $\vec{V}_D$ перпендикулярний до відрізка C_3D, що з'єднує точки D і C_3, і направлений в сторону повороту стержня 3 навколо точки C_3. Величину V_D знайдемо з пропорції

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B} \tag{3}$$

Щоб обчислити C_3D і C_3B, замітимо, що ΔAC_3B – прямокутний, так як гострі кути в ньому рівні 30° і 60°, і що $C_3D = AB sin 30° = BD$. Тоді ΔBC_3D являється рівностороннім і $C_3B = C_3D$. В результаті рівність (3) дає

$$V_D = V_B = 0{,}46\frac{\text{м}}{\text{с}};\ \vec{V}_D \perp C_3D. \quad (4)$$

Так як точка E належить одночасно стержню O_2E, який обертається навколо O_2, то $\vec{V}_E \perp O_2E$. Тоді, провівши з точок E і D перпендикуляри до швидкостей $\vec{V}_E$ і $\vec{V}_D$, побудуємо МЦШ C_2 стержня DE. По напрямку вектора $\vec{V}_D$ визначимо напрямок повороту стержня DE навколо центру C_2. Вектор $\vec{V}_E$ направлений в сторону повороту цього стержня. З рис. 3.21 видно, що $< C_2ED =< C_2DE = 30°$, звідки $C_2E = C_2D$. Склавши пропорцію, знайдемо, що

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \qquad V_E = V_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

Визначаємо ω_2 . Оскільки МЦШ стержня 2 відомий (точка C_2) і

$$\boxed{C_2D = \frac{l_2}{2cos30°} = 0{,}69 \text{ м},}$$

то

$$\omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

Визначаємо прискорення $\vec{a}_B$ (рис. 3.22, на якому зображаємо всі вектори прискорень). Точка B належить стержню AB. Щоб знайти $\vec{a}_B$, треба знайти прискорення якої-небудь іншої точки стержня AB і траєкторію точки B. За даними задачі можемо визначити $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$, де чисельно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ \ a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (7)$$

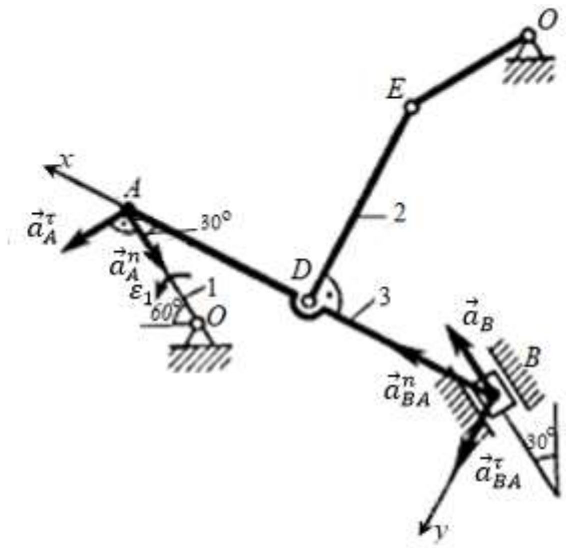


Рис. 3.22

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлений уздовж AO_1, а $\vec{a}_A^\tau$ перпендикулярно AO_1; зображаємо ці вектори на рис. 3.22. Так як точка B одночасно належить повзуну, то вектор $\vec{a}_B$ паралельний напрямним повзуна. Зображаємо вектор $\vec{a}_B$ на рисунку, вважаючи, що він направлений в ту ж сторону, що і $\vec{V}_B$.

Для визначення $\vec{a}_B$ скористаємось рівністю

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \tag{8}$$

Зображаємо на рисунку вектори $\vec{a}_{BA}^n$ (уздовж *BA* від *B* до *A*) і $\vec{a}_{BA}^\tau$ (в будь-яку сторону перпендикулярно *BA*); чисельно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Знайшовши ω_3 за допомогою МЦШ C_3 стержня 3, одержимо

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3A} = \frac{V_A}{l_3 cos30°} = 0{,}66\ c^{-1} \text{ і } a_{BA}^n = 0{,}61\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \tag{9}$$

Таким чином, серед величин, що входять в рівність (8), невідомі тільки числові значення a_B і a_{BA}^τ; їх можна знайти, спроектувавши обидві частини рівності (8) на які-небудь дві осі.

Щоб визначити a_B, спроектуємо обидві частини рівності (8) на напрямок *BA* (вісь *x*), перпендикулярний невідомому вектору $\vec{a}_{BA}^\tau$. Тоді одержимо

$$a_B cos30° = a_A^\tau cos60° - a_A^n cos30° + a_{BA}^n. \tag{10}$$

Підставивши в рівність (10) числові значення всіх величин із (7) та (9), знайдемо що

$$a_B = 0{,}72\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \tag{11}$$

Так як з (10) отримано $a_B > 0$, то, значить, вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. 3.22.

Визначаємо кутове прискорення ε_3. Щоб знайти ε_3, спочатку визначимо a_{BA}^τ. Для цього обидві частини рівності (8) спроектуємо на напрямок, перпендикулярний *AB* (вісь *y*). Тоді одержимо

$$-a_B sin30° = a_A^\tau sin60° + a_A^n sin30° + a_{BA}^\tau. \tag{12}$$

Підставивши в рівність (12) числові значення всіх величин з (11) і (7), знайдемо, що $a_{BA}^\tau = -3{,}58\ \text{м}/c^2$. Знак вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^\tau$ протилежний вказаному на рис3.22.

Тепер з рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ одержимо

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2{,}56\ c^{-2}.$$

Відповідь: $V_B = 0{,}46$ м/с; $V_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56\ c^{-2}$.

Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають плоским або плоско-паралельним?
2. Запишіть рівняння плоско-паралельного руху тіла?
3. Як пов’язані між собою швидкість довільної точки плоскої фігури та швидкість точки, вибраної за полюс?
4. Як формулюється теорема про проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з’єднує ці точки.
5. Що називають миттєвим центром швидкостей?
6. Як визначити положення миттєвого центра швидкостей?
7. Якщо плоска фігура в даний момент часу здійснює миттєвий поступальний рух, де знаходиться миттєвий центр швидкостей.
8. Запишіть формули для визначити прискорення довільної точки плоскої фігури?
9. Що таке миттєвий центр прискорень?

ГЛАВА IV
РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 1. Рух тіла навколо нерухомої точки. Кути Ейлера. Рівняння руху.

Задача про рух твердого тіла навколо нерухомої точки поставлена в 1749 р. Л. Ейлером у зв'язку з проблемою прецесії та нутації земної осі. Такий рух часто називають ***сферичним,*** так як всі точки тіла рухаються по поверхнях сфер, спільний центр яких збігається з нерухомою точкою. Найпростішим прикладом такого руху є рух дзиґи (гіроскопа).

Розглянемо питання про описання закону руху тіла навколо нерухомої точки. Нехай з тілом незмінно зв'язана система координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 4.1). Положення цієї системи будемо визначати відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ з початком в цій же точці.

Нехай в початковий момент часу осі системи $O\xi\eta\zeta$ співпадають з відповідними осями системи $Oxyz$. Очевидно, що положення системи координат $O\xi\eta\zeta$ однозначно визначає положення тіла. Доведемо наступну теорему про переміщення тіла навколо нерухомої точки.

Теорема Ейлера. *Довільне переміщення твердого тіла навколо нерухомої точки можна здійснити трьома послідовними обертаннями тіла навколо трьох осей, які проходять через нерухому точку [3].*

Доведення. Нехай кінцеве положення тіла задане і визначається положенням системи координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 4.1). Розглянемо пряму ON перетину площин Oxy і $O\xi\eta$. Ця пряма називається *лінією вузлів*. Виберемо на цій лінії ON додатний напрямок так, щоби найкоротший перехід від осі Oz до осі $O\zeta$ відбувався проти напрямку ходу стрілки годинника, якщо дивитися зі сторони додатного напрямку лінії вузлів.

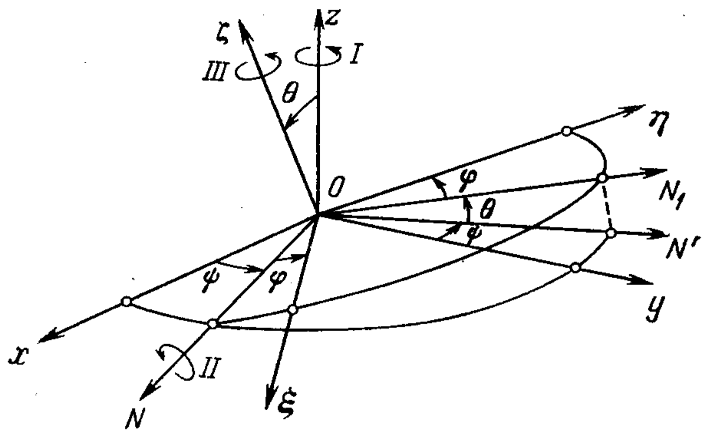


Рис. 4.1

Перший поворот на кут ψ (кут між додатними напрямками осі Ox і лінією вузлів ON) здійснюємо навколо осі $Oz.$ Після першого повороту вісь $O\xi$, яка в початковий момент співпадала з віссю Ox, буде співпадати з лінією вузлів ON, а вісь $O\eta$ — з прямою ON'.

Другий поворот на кут θ здійснюємо навколо лінії вузлів. Після другого повороту площина $O\xi\eta$ суміститься з свої кінцевим положенням. Вісь $O\xi$ і дальше буде співпадати з лінією вузлів $ON,$ а вісь $O\eta$ — з прямою ON_1. Вісь $O\zeta$ суміститься зі своїм кінцевим положенням.

Третій останній поворот здійснюємо навколо осі $O\zeta$ на кут φ. Після третього повороту осі рухомої системи координат займуть своє кінцеве положення. Терема доведена.

Із сказаного вище видно, що кути $\psi,\ \theta$ і φ визначають положення тіла, яке рухається навколо нерухомої точки. Ці кути (кути Ейлера) називаються:

ψ – кут прецесії;

θ — кут нутації;

φ — кут власного обертання.

Очевидно, що кожному моменту часу відповідає визначене положення тіла і відповідні значення кутів Ейлера. Значить кути Ейлера є функціями часу

$$\psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{4.1}$$

Ці функціональні залежності визначають закон руху тіла і називаються *рівняннями руху твердого тіла навколо нерухомої точки*.

Визначимо направляючі косинуси осей $O\xi\eta\zeta$ через кути Ейлера.

Позначимо одиничний вектор лінії вузлів через $\vec{n}$, одиничні координатні вектори осей Oz і $O\zeta$ − через $\vec{k}$ і $\vec{k}_1$ відповідно. Побудуємо також два допоміжних координатних тріедри: $\vec{n}, \vec{n}', \vec{k}$ і $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{k}_1$, орієнтованих як праві системи координат (рис.4.2), причому вектор $\vec{n}'$ лежить в площині Oxy, а вектор $\vec{n}_1$ − в площині $O\xi\eta$. Тоді одиничні координатні вектори осей Ox, $Oy, O\xi, O\eta$ можемо представити в такій формі:

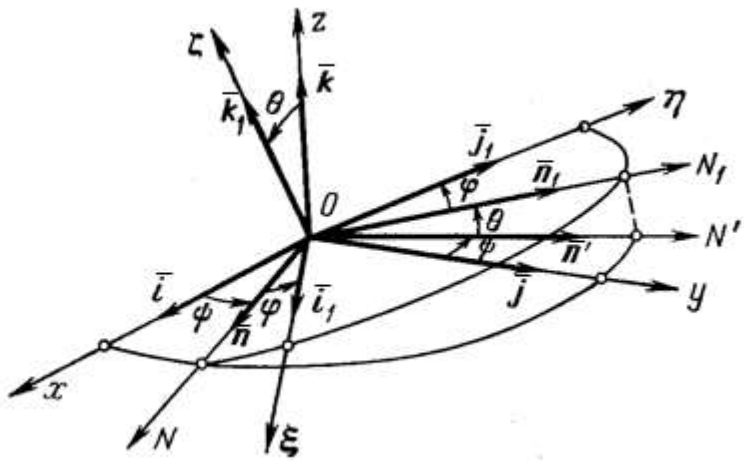


Рис.4.2

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{n}cos\psi - \vec{n}'sin\psi, & \vec{j} &= \vec{n}sin\psi + \vec{n}'cos\psi, \\ \vec{i}_1 &= \vec{n}cos\varphi + \vec{n}_1 sin\varphi, & \vec{j}_1 &= -\vec{n}sin\varphi + \vec{n}_1 cos\varphi. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для прикладу перша залежність (4.2) продемонстрована на рисунку 4.3.

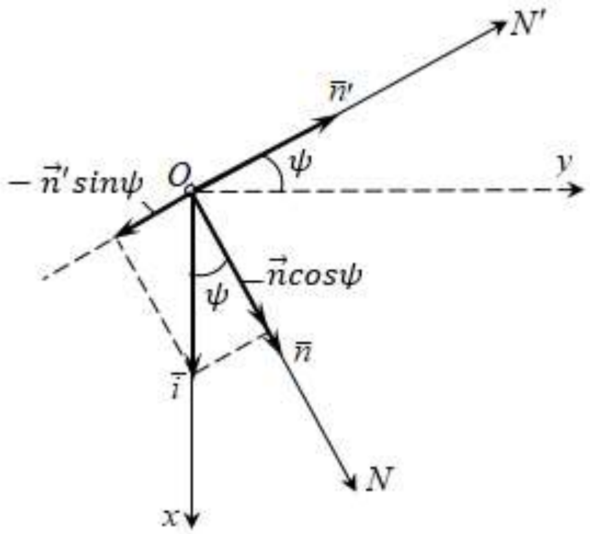


Рис.4.3

Відзначимо дальше, що мають місце очевидні співвідношення

$$\vec{n}\cdot\vec{n}=1,\ \ \vec{n}\cdot\vec{n}'=\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0,\ \ \vec{n}'\cdot\vec{n}_1=cos\theta,$$

$$\vec{n}\cdot\vec{k}=\vec{n}\cdot\vec{k}_1=0,\ \ \vec{n}'\cdot\vec{k}_1=-sin\theta,\ \ \vec{n}_1\cdot\vec{k}=sin\theta.$$

Направляючі косинуси осей $O\xi\eta\zeta$ дорівнюють скалярним добуткам відповідних одиничних координатних векторів нерухомої і рухомої систем координат. Наприклад

$$\vec{i}\cdot\vec{i}_1=cos(\widehat{x,\xi})=cos\psi cos\varphi-sin\psi sin\varphi cos\theta.$$

Остаточно знайдемо всі направляючі косинуси між координатними осями початкової і кінцевої систем координат, з яких складемо таку таблицю

Таблиця 4.1

	x	y	z
ξ	$cos\psi cos\varphi-sin\psi sin\varphi cos\theta$	$sin\psi cos\varphi+cos\psi sin\varphi cos\theta$	$sin\varphi sin\theta$
η	$-cos\psi sin\varphi-sin\psi cos\varphi cos\theta$	$-sin\psi sin\varphi+cos\psi cos\varphi cos\theta$	$cos\varphi sin\theta$
ζ	$sin\psi sin\theta$	$-cos\psi sin\theta$	$cos\theta$

Якщо ввести позначення

$$\vec{X}_0=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\ \ \vec{X}_{\text{к}}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix};$$
$$A=\begin{pmatrix}cos\psi cos\varphi-sin\psi sin\varphi cos\theta & sin\psi cos\varphi+cos\psi sin\varphi cos\theta & sin\varphi sin\theta\\ -cos\psi sin\varphi-sin\psi cos\varphi cos\theta & -sin\psi sin\varphi+cos\psi cos\varphi cos\theta & cos\varphi sin\theta\\ sin\psi sin\theta & -cos\psi sin\theta & cos\theta\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

то можна записати таку векторно-матричну рівність

$$\vec{X}_{\text{к}}=A\vec{X}_0, \tag{4.4}$$

яка задає зв'язок між координатами деякої точки тіла в початковій системі координат $Oxyz$ і в кінцевій системі координат $O\xi\eta\zeta$. Матриця A називається матрицею переходу від початкової до кінцевої систем координат. Якщо помножити зліва ліву і праву частини рівності (4.4) на обернену матрицю A^{-1}, то дістанемо векторно-матричну рівність

$$\vec{X}_0=A^{-1}\vec{X}_{\text{к}} \tag{4.5}$$

яка задає зв'язок між координатами деякої точки тіла в кінцевій системі координат $O\xi\eta\zeta$ і в початковій системі координат $Oxyz$. Можна показати [3], що матриця A ортогональна і обернена матриця A^{-1} дорівнює транспонованій $A^{-1}=A'$.

§ 2. Розподіл швидкостей в тілі, що рухається навколо нерухомої точки. Миттєва кутова швидкість.

Розглянемо розподіл лінійних швидкостей в тілі, що здійснює сферичний рух навколо нерухомої точки O. Введемо незмінно зв'язану з тілом систему координат $Ox_1x_2x_3$ з початком в нерухомій точці O (рис. 4.4).

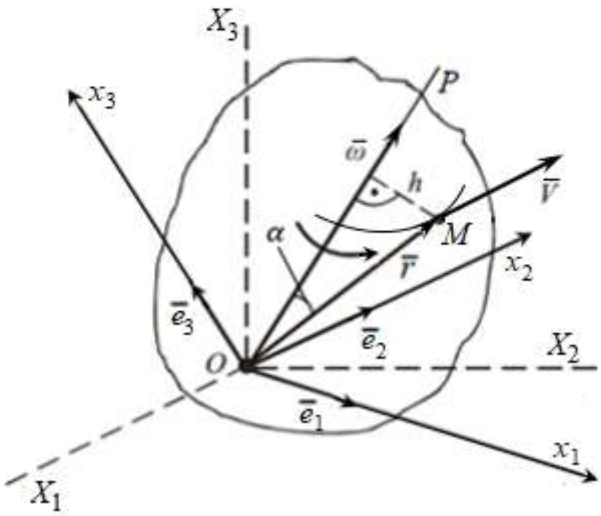


Рис. 4.4

Розглянемо деяку точку $M(x_1, x_2, x_3)$ тіла. Розклад радіуса-вектора $\vec{r}$ точки M по одиничних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ координатних осей зв'язаної з тілом системи координат має вигляд:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Щоб знайти вектор швидкості точки *M*, потрібно продиференціювати радіус-вектор $\vec{r}$ по часу, прийнявши до уваги, що координати x_1, x_2, x_3 точки *M* не залежать від часу, а координатні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ залежать. Знайдемо

$$\vec{V} = x_1\frac{d\vec{e}_1}{dt} + x_2\frac{d\vec{e}_2}{dt} + x_3\frac{d\vec{e}_3}{dt}.$$

Введемо позначення

$$\omega_{jk} = \frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_k. \tag{4.6}$$

Так як

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

і вектори $\vec{e}_i$ і $\dfrac{d\vec{e}_i}{dt}$ ортогональні, то

$$\omega_{ii} = \frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_i = 0, \qquad \frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_k = -\frac{d\vec{e}_k}{dt} \cdot \vec{e}_j = \omega_{jk} = -\omega_{kj}.$$

Покладемо дальше

$$\omega_1 = \omega_{23} = -\omega_{32} = \frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3, \qquad \omega_2 = \omega_{31} = -\omega_{13} = \frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1,$$
$$\omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2. \tag{4.7}$$

Знайдемо проекції вектора швидкості $\vec{V}$ на осі $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \vec{V} \cdot \vec{e}_1 = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \\ V_2 &= \vec{V} \cdot \vec{e}_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \\ V_3 &= \vec{V} \cdot \vec{e}_{31} = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Величини ω_i можна ототожнити з компонентами деякого вектора $\vec{\omega}$. Тоді можна записати

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{4.9}$$

Із співвідношень (4.7) видно, що вектор $\vec{\omega}$ однаковий для всіх точок тіла.

Рівність (4.9) – відома з попереднього формула Ейлера. Вона визначає розподіл швидкостей в тілі з однією нерухомою точкою. Вектор $\vec{\omega}$ називається *вектором миттєвої кутової швидкості тіла*.

§ 3. Миттєва вісь обертання. Миттєвий обертовий рух.

Миттєвою віссю обертання називається зв'язана з тілом пряма, всі точки якої мають в даний момент часу рівні нулю швидкості. Прискорення точок цієї прямої можуть відрізнятися від нуля. Доведемо, що в тілі з нерухомою точкою існує миттєва вісь обертання. Якщо в формулі (4.9) покласти $\vec{V} = 0$, то знайдемо

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \tag{4.10}$$

Звідки на основі (4.8)

$$\frac{x_1}{\omega_1} = \frac{x_2}{\omega_2} = \frac{x_3}{\omega_3}. \tag{4.11}$$

Отримані рівняння (4.11) визначають пряму, яка проходить через початок координат, суміщений з нерухомою точкою тіла. Ця пряма є геометричним місцем точок, швидкість яких в даний момент часу дорівнює нулю, тобто вона і є миттєвою віссю обертання.

Можна довести, що миттєвий розподіл швидкостей відповідає миттєвому обертанню тіла навколо осі, яка визначається рівняннями (4.11). Інакше кажучи, миттєвий розподіл швидкостей не відрізняється від розподілу швидкостей при обертовому русі навколо нерухомої осі. З рівнянь (4.9), (4.10) випливає, що введений вектор миттєвої кутової швидкості направлений вздовж миттєвої осі і він є ковзним вектором. Отже при миттєвому обертовому русі тіла миттєвий розподіл швидкостей відповідає обертовому руху навколо миттєвої осі обертання, а розподіл прискорень може не відповідати.

Таким чином швидкості точок тіла при його сферичному русі визначаються формулою Ейлера (4.9), де $\vec{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості; $\vec{r}$ – радіус-вектор розглядуваної точки *M* відносно нерухомої точки *O* (рис. 4.4). Модуль швидкості

$$V = \omega r sin\alpha = \omega h, \tag{4.12}$$

де h – відстань від точки *M* тіла до миттєвої осі обертання *OP*.

Диференціюючи вираз (4.9) за часом, одержимо таку формулу для визначення прискорення точки тіла

§ 4. Теорема Ейлера-Д'аламбера

Характер руху тіла з однією нерухомою точкою встановлює також така **теорема Ейлера-Д'аламбера**: *будь-яке елементарне переміщення тіла навколо нерухомої точки можна здійснити одним поворотом навколо відповідним чином вибраної осі обертання, яка проходить через цю точку.*

Доведення. Опишемо навколо нерухомої точки O сферу довільного радіуса. Положення тіла з нерухомою точкою повністю визначається положенням двох прямих OA і OB, що проходять через точку O. Нехай ці прямі перетинають поверхню сфери S в точках A і B (рис. 4.5).

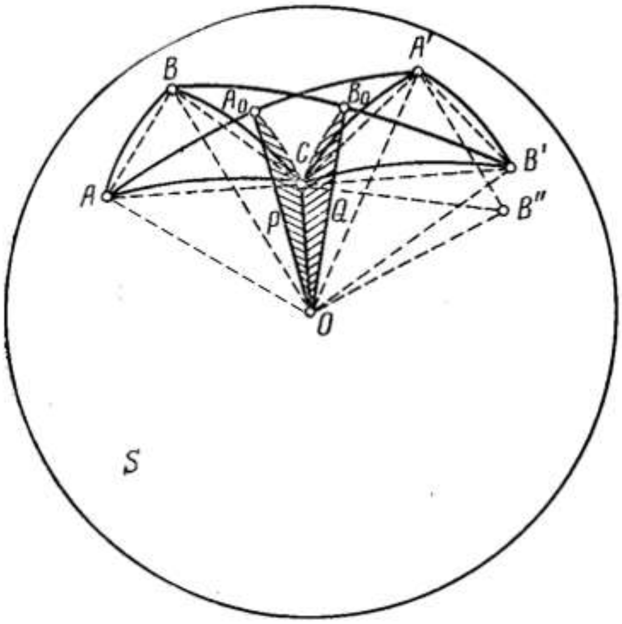


Рис. 4.5

Припустимо, що тіло перемістилося в нове положення, яке характеризується новими положеннями OA' і OB'прямих OA і OB. Площини кутів AOA' і BOB' перетинають сферу S по дугах великих кіл. Розглянемо дуги AA' і BB' кіл, які відповідають цим кутам. Через бісектрису OA_0 кута AOA' проведемо площину P, перпендикулярну до площини цього кута. Так само через бісектрису OB_0 кута BOB' проведемо площину Q, перпендикулярну до площини цього кута. Очевидно, що дуга AA_0 дорівнює дузі A_0A' і дуга BB_0 дорівнює дузі B_0B'. На основі елементарних міркувань робимо висновок, що довільна пряма площини P утворює однакові кути з прямими OA' і OA', а довільна пряма площини Q утворює однакові кути з прямими OB і OB'.

Допустимо, що площини P і Q перетинаються по прямій OC і доведемо, що ця пряма – шукана вісь обертання.

Розглянемо трьохгранні кути $OABC$ і $OA'B'C'$ із спільним ребром OC. Доведемо, що ці кути можна сумістити поворотом навколо спільного ребра OC. Цим і буде доведено, що пряма $OC -$ шукана вісь обертання.

Із приведених вище міркувань видно, що $\angle AOC = \angle A'OC,\ \angle BOC = \angle B'OC$ і $\angle AOB = \angle A'OB'$. Значить дуги великих кіл, що відповідають цим кутам, теж рівні дуга AA_0 дорівнює дузі A_0A', дуга BB_0 дорівнює дузі B_0B' і дуга AB дорівнює дузі $A'B'$. Крім того, будуть рівні і відповідні хорди, що стягують ці дуги

$$AC = A'C, \qquad BC = B'C \text{ і } AB = A'B'.$$

Повернемо трьохгранний кут $OABC$ навколо ребра OC так, щоби точка A сумістилася з точкою A'. Тоді точка B суміститься з точкою B'. Значить трьохгранний кут $OABC$ одним поворотом навколо ребра OC сумістився з трьохгранним кутом $OA'B'C'$.

Розглядаючи переміщення тіла за нескінченно малий проміжок часу і застосовуючи теорему Ейлера-Д'аламбера, ми знову прийдемо до висновку про існування миттєвої осі обертання.

§ 5. Додавання кутових швидкостей. Кінематичні формули Ейлера.

Формули (4.6), (4.7) і наслідки з них вичерпують властивості вектора кутової швидкості. Як наступний наслідок з них випливає правило *додавання кутових швидкостей*. Кутові швидкості, як вектори, додаються за правилом паралелограма.

Так як кутові швидкості належать до ковзних векторів, правило паралелограма можна застосовувати для їх додавання лише тоді, коли відповідні їм миттєві осі обертання перетинаються.

Застосуємо правило додавання кутових швидкостей для виводу так званих *кінематичних формул Ейлера*, які визначають проекції миттєвих кутових швидкостей на осі нерухомої $Oxyz$ і рухомої $O\xi\eta\zeta$ систем координат (рис. 4.2) через кути Ейлера.

Розкладемо вектор $\vec{\omega}$ по одиничних координатних векторах $\vec{k}, \vec{n}, \vec{k}_1$ осей $Oz, ON,$ і $O\zeta$

$$\vec{\omega} = \vec{k}\omega_z + \vec{n}\omega_N + \vec{k}_1\omega_\zeta. \tag{4.13}$$

Застосуємо формулу $\omega = \dot{\varphi}$. Знайдемо: $\omega_z = \dot{\psi},\ \omega_N = \dot{\theta},\ \omega_\zeta = \dot{\varphi}$. Отже формула (4.13) прийме вигляд

$$\vec{\omega} = \vec{k}\dot{\psi} + \vec{n}\dot{\theta} + \vec{k}_1\dot{\varphi}. \tag{4.14}$$

Тепер знайдемо проекції миттєвої кутової швидкості на осі $O\xi\eta\zeta$. Одиничні вектори цих осей (див. рис. 4.2) $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$. Одержимо

$$\omega_\xi = \vec{\omega} \cdot \vec{i}_1 = \dot{\psi}\vec{i}_1 \cdot \vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}_1 \cdot \vec{n},$$

$$\omega_\eta = \vec{\omega} \cdot \vec{j}_1 = \dot{\psi}\,\vec{j}_1 \cdot \vec{k} + \dot{\theta}\vec{j}_1 \cdot \vec{n},$$

$$\omega_\zeta = \vec{\omega} \cdot \vec{k}_1 = \dot{\psi}\,\vec{k}_1 \cdot \vec{k} + \dot{\theta}\vec{k}_1 \cdot \vec{n} + \dot{\varphi}.$$

Крім того маємо

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{k} = (\vec{j}_1 \times \vec{k}_1) \cdot \vec{k} = (\vec{k}_1 \times \vec{k}) \cdot \vec{j}_1 = -\vec{n} \cdot \vec{j}_1 sin\theta = sin\varphi sin\theta,$$

$$\vec{j}_1 \cdot \vec{k} = (\vec{k}_1 \times \vec{i}_1) \cdot \vec{k} = (\vec{k} \times \vec{k}_1) \cdot \vec{i}_1 = \vec{n} \cdot \vec{i}_1 sin\theta = cos\varphi sin\theta,$$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{n} = 0.$$

Отже

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} sin\varphi sin\theta + \dot{\theta} cos\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} cos\varphi sin\theta - \dot{\theta} sin\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Аналогічно можна знайти проекції $\vec{\omega}$ на осі системи $Oxyz$. Одиничні вектори цих осей відповідно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 4.2). Знайдемо

$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \vec{i} = \dot{\theta}\vec{i} \cdot \vec{n} + \dot{\varphi}\vec{i} \cdot \vec{k}_1,$$

$$\omega_y = \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \dot{\theta}\vec{j} \cdot \vec{n} + \dot{\varphi}\vec{j} \cdot \vec{k}_1,$$

$$\omega_z = \vec{\omega} \cdot \vec{k} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\vec{k} \cdot \vec{k}_1.$$

Дальше

$$\vec{i}\cdot\vec{k}_1 = (\vec{j}\times\vec{k})\cdot\vec{k}_1 = (\vec{k}\times\vec{k}_1)\cdot\vec{j} = \vec{n}\cdot\,\vec{j}sin\theta = sin\psi sin\theta,$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k}_1 = (\vec{k}\times\vec{i})\cdot\vec{k}_1 = (\vec{k}_1\times\vec{k})\cdot\,\vec{i} = -\vec{n}\cdot\,\vec{i}sin\theta = -cos\psi sin\theta.$$

На цій основі

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta}cos\psi + \dot{\varphi}sin\psi sin\theta,\\ \omega_y &= \dot{\theta}sin\psi - \dot{\varphi}cos\psi sin\theta,\\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}cos\theta.\end{aligned} \qquad (4.16)$$

Формули (4.15) і (4.16) називаються *кінематичними формулами Ейлера*.
Скориставшись формулами (4.15) або (4.16), можна знайти модуль миттєвої кутової швидкості:

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}cos\theta}. \qquad (4.17)$$

Таким чином, маючи рівняння руху (4.1), можна обчислити проекції вектора миттєвої кутової швидкості на осі довільної системи координат. Дальше застосовуючи формули (4.8), можна знайти компоненти лінійної швидкості довільної точки тіла. Отже питання про розподіл лінійних швидкостей в тілі з нерухомою точкою вичерпане.

*§ 6. Розподіл п*рискорень в тілі, яке обертається навколо нерухомої точки

Диференціюючи вираз (4.9) за часом, одержимо формулу для визначення прискорення точки тіла

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (4.18)$$

Тут

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} - \text{вектор кутового прискорення.}$$

Нагадаємо, що вектор $\vec{\omega}$ кутової швидкості направлений вздовж миттєвої осі обертання OP у напрямку, звідки видно обертання тіла проти ходу стрілки годинника стрілки (рис. 4.6). Напрямок вектора $\vec{\omega}$ як і положення миттєвої осі обертання з часом змінюється, і кінець A цього вектора описує в просторі деяку криву, яка є годографом вектора $\vec{\omega}$.

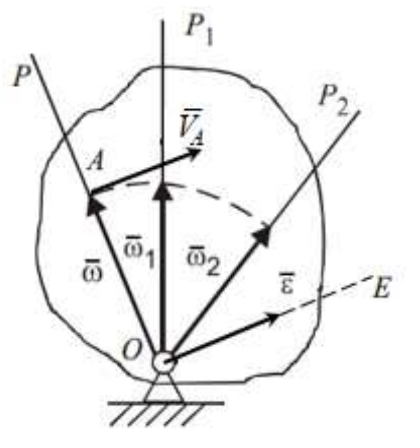


Рис. 4.6

Вектор миттєвого кутового прискорення, як похідна по часу від вектора $\vec{\omega}$, дорівнює швидкості точки A кінця вектора $\vec{\omega}$. Направлений він за дотичною до годографа вектора $\vec{\omega}$, паралельно швидкості точки A (рис. 4.6). Якщо обертання здійснюється з постійною за величино миттєвою кутовою швидкістю, тобто вектор $\vec{\omega}$ змінюється тільки за напрямком, то вектор $\vec{\varepsilon}$ перпендикулярний до вектора $\vec{\omega}$. Вектор миттєвого кутового прискорення прикладають, як правило, в нерухомій точці O (рис. 4.6). Вектор $\vec{\varepsilon}$ разом з вектором $\vec{\omega}$ є кінематичними характеристиками руху тіла з однією нерухомою точкою.

Так як $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ в формулі є швидкість точки M (рис. 4.7),

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

То формула (4.18) запишеться так

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (4.19)$$

Отже прискорення точки тіла при його обертанні навколо нерухомої точки складається з двох прискорень: так званого обертального прискорення

$$\vec{a}_{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

і доосьового прискорення

$$\vec{a}_{ос} = \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Обертальне прискорення $\vec{a}_{об}$ направлене перпендикулярно до площини векторів $\vec{\varepsilon}, \vec{r}$ (рис. 4.7) і за модулем

$$a_{об} = \varepsilon r sin\beta = \varepsilon h_1,$$

де h_1 – відстань від точки M до вектора кутового прискорення. Вектор $\vec{a}_{oc}$ перпендикулярний одночасно $\vec{V}$ та $\vec{\omega}$ і направлений до миттєвої осі обертання (рис. 4.7). За величиною

$$a_{oc} = \omega V sin 90° = \omega V = \omega^2 h,$$

де $h = MK$ – відстань від точки M до миттєвої осі обертання.

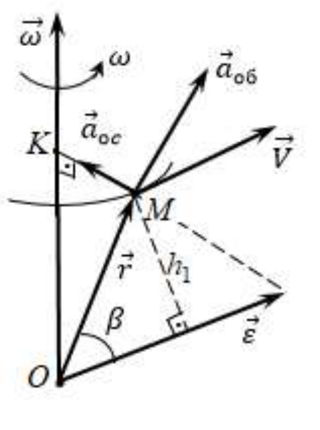


Рис. 4.7

Модуль повного прискорення точки в цьому випадку обчислюють за формулою

$$a = \sqrt{a_{об}^2 + a_{ос}^2 + 2|a_{об}| \cdot a_{ос} \cdot cos(\widehat{\vec{a}_{об}, \vec{a}_{ос}})}. \qquad (4.20)$$

§ 7. Загальний випадок руху вільного твердого тіла

Розглянемо рух вільного твердого тіла.

Для того, щоб визначити положення вільного твердого тіла, введемо нерухому систему координат $O_1x_1y_1z_1$ і рухому $Oxyz$, незмінно зв'язану з тілом (рис. 4.8). Початок O рухомої системи координат будемо називати полюсом. Крім цих двох систем введемо систему $Ox_1'y_1'z_1'$ з осями, відповідно паралельними до осей нерухомої системи $O_1x_1y_1z_1$. Ця система рухається поступально і її рух повністю визначається рухом полюса O.

Положення вільного твердого тіла однозначно визначається положенням рухомої системи координат $Oxyz$. Отже, параметри, які визначають положення цієї системи, одночасно визначають положення вільного твердого тіла.

Параметрами, які визначають положення системи координат $Oxyz$, є координати x_{10}, y_{10}, z_{10} початку O і кути Ейлера ψ, θ, φ (рис. 4.8). Останні встановлюють напрямки осей рухомої системи координат в просторі. Таким чином, *положення вільного твердого тіла характеризується шістьма параметрами*. В зв'язку з цим кажуть, що *вільне тверде тіло має шість степенів вільності*.

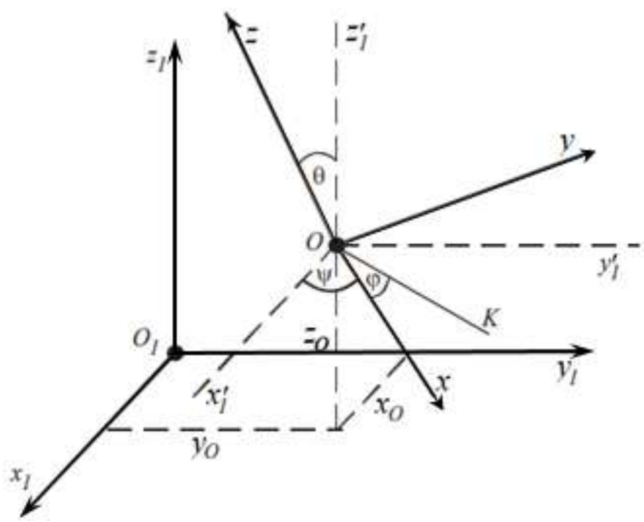


Рис. 4.8

Кожному моменту часу відповідає відповідна сукупність шести вказаних параметрів. Значить вони є функціями часу:

$$\begin{aligned} x_{10} &= f_1(t), \quad & y_{10} &= f_2(t), \quad z_{10} = f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), \quad & \theta &= f_5(t), \quad \varphi = f_6(t). \end{aligned} \qquad (4.21)$$

Ці функціональні залежності називаються *рівняннями руху вільного твердого тіла*. Вони визначають закон руху вільного твердого тіла в просторі. Перші три рівняння визначають рух полюса O і водночас – поступальний рух системи координат $Ox_1'y_1'z_1'$, а інші три – миттєвий обертальний рух тіла навколо полюса O.

Отже на основі рівнянь руху (4.21) можна стверджувати, що: *рух вільного твердого тіла в кожний момент часу можна нескінченною кількістю способів розкласти на два рухи*: поступальний, який визначається рухом довільної фіксованої точки тіла – полюса і обертальний рух навколо полюса.

На основі теорії руху тіла навколо нерухомої точки можна стверджувати, що друга частина руху зводиться до миттєвого обертання тіла навколо осі, що проходить через полюс. Звичайно, цю вісь не можна назвати миттєвою віссю, якщо з цим терміном зв'язувати представлення про геометричне місце точок, швидкості яких в даний момент часу дорівнює нулю. Точки осі обертання, яка проходить через полюс, мають однакову поступальну швидкість, яка дорівнює швидкості полюса O.

При зміні положення в тілі полюса O кути Ейлера не змінюється. Значить не змінюються ні кутова швидкість обертової частини руху твердого тіла, ні кутове прискорення. Поступальна частина руху вільного твердого тіла суттєво залежить від вибору полюса.

§ 8. Розподіл лінійних швидкостей і прискорень у вільному твердому тілі

Розглянемо розподіл лінійних швидкостей у вільному твердому тілі. Визначимо лінійну швидкість довільної точки B тіла, яке рухається відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 4.9). Виберемо точку O тіла за полюс.

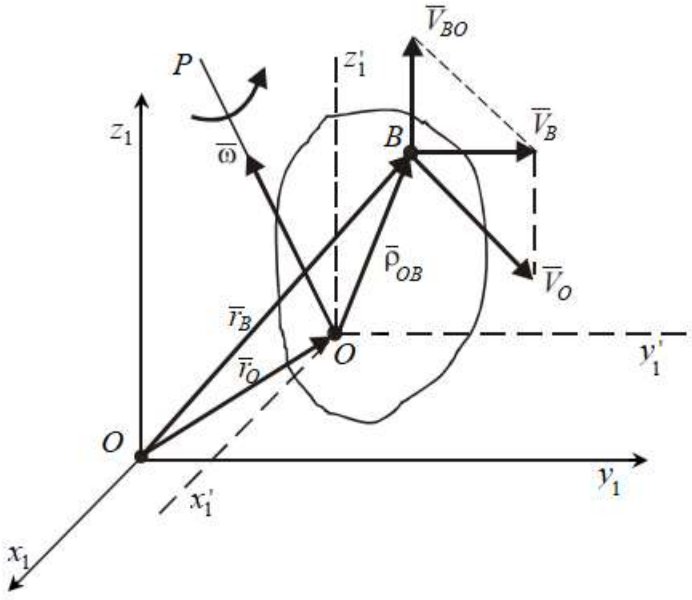


Рис. 4.9

Тоді в довільний момент часу справедлива залежність (рис. 4.9)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_O + \vec{\rho}_{OB},$$

Радіус-вектор $\vec{\rho}_{OB}$ точки B відносно полюса O – постійний за модулем вектор. Абсолютна швидкість точки B дорівнює

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_{OB}}{dt},$$

де $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{V}_O$ – швидкість полюса O.

Розглянемо похідну $\frac{d\vec{\rho}_{OB}}{dt}$. Ця похідна визначає зміну вектора $\vec{\rho}_{OB}$ відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$, або бистроту його зміни відносно системи координат $Ox_1'y_1'z_1'$, яка рухається поступально разом з полюсом O.

Дійсно, поступальний рух системи координат $Ox_1'y_1'z_1'$ не надає вектору $\vec{r}_{OB}$ додаткових відносних змін. Але бистрота зміни вектора $\vec{\rho}_{OB}$ відносно системи координат $Ox_1'y_1'z_1'$ є результатом його обертального руху навколо точки O. На основі формули Ейлера знайдемо

$$\frac{d\vec{\rho}_{OB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OB} = \vec{V}_{BO},$$

де $\vec{V}_{BO} -$ швидкість точки B тіла при його обертанні навколо миттєвої осі, що проходить через полюс. Таким чином

$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{V}_{BO} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OB}. \tag{4.22}$$

Знайдемо прискорення точки B вільного тіла. Для цього продиференціюємо рівність (4.22):

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho}_{OB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}_{OB}}{dt} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OB}),$$

де $\vec{a}_O$ – прискорення полюса O ; $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{OB} = \vec{a}_{BO}^{\text{об}}$ – обертальне прискорення; $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OB}) = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BO} = \vec{a}_{BO}^{\text{ос}}$ – доосьове прискорення.

Отже повне прискорення точки вільного тіла визначається залежністю

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}^{\text{об}} + \vec{a}_{BO}^{\text{ос}} = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}. \tag{4.23}$$

Векторна сума обертального та доосьового прискорень – прискорення миттєвого обертового руху точки навколо рухомої осі, що проходить через полюс O

$$\vec{a}_{BO} = \vec{a}_{BO}^{\text{об}} + \vec{a}_{BO}^{\text{ос}}.$$

§ 9. Приклади розв'язання задач кінематики сферичного руху тіла

Приклад 4.1

Конус висотою $h = 4$ см і радіусом основи $r = 3$ см, котиться без ковзання по площині, маючи нерухому вершину в точці O (рис. 1). Знайти кутову швидкість конуса, координати точки, яка викреслює годограф кутової швидкості, і кутове прискорення конуса, якщо швидкість центра основи конуса $V_C = 48\ \text{см/с} = \text{const}$.

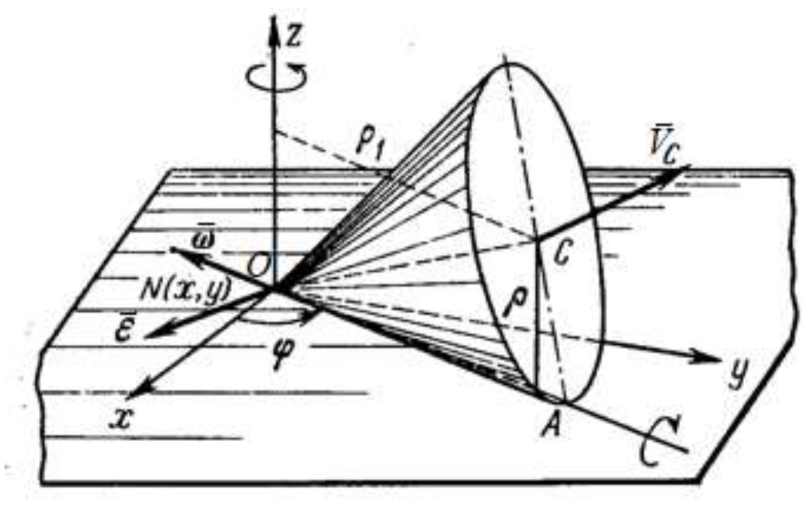


Рис.4.10

Розв'язання. Так як конус котиться без ковзання по нерухомій площині, то миттєва вісь направлена вздовж твірної конуса OA. Маючи напрямок швидкості основи конуса C можемо визначити напрямок обертання конуса навколо миттєвої осі і напрямок вектора миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ (рис.4.10). Миттєвий радіус обертання ρ точки C знайдемо з прямокутного трикутника OCA, в якому $\rho -$ висота, опущена на гіпотенузу OA. Знаходимо

$$\frac{\rho}{h} = \frac{r}{OA} \to \rho = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ см.}$$

Так як $V_C = \omega \cdot \rho$ можемо знайти миттєву кутову швидкість

$$\omega = \frac{V_C}{\rho} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Для того, щоб знайти рівняння годографа вектора $\vec{\omega}$, потрібно спочатку знайти кут φ між миттєвою віссю і віссю Ox. Якщо позначити кутову швидкість обертання миттєвої осі навколо осі z через ω_z, то $\varphi = \omega_z t$. Тут ми використали той факт, що кутова швидкість ω_z постійна, так як швидкість точки C постійна, а також те, що в початковий момент часу миттєва вісь співпадала з віссю Ox.

Радіус обертання точки C навколо осі Oz $\rho_1 = \sqrt{h^2 - \rho^2} = 3{,}2$ см. Тому

$$\omega_z = \frac{V_C}{\rho_1} = 15 \text{ с}^{-1} \text{ і } \varphi = 15t.$$

Тепер знаходимо рівняння годографа вектора $\vec{\omega}$

$$x_N = \omega_x = -20\cos 15\mathrm{t}, \quad y_N = \omega_y = -20 sin 15t, \quad z_N = 0.$$

Тут $N(x, y, 0) -$ точка, яка викреслює годограф вектора кутової швидкості. Виключивши з параметричних рівнянь годографа параметр t, отримаємо рівняння в явному вигляді

$$x_N^2 + y_N^2 = 400 = \omega^2.$$

Отже годографом є коло з центром в початку координат і з радіусом $R = \omega$.

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon} = {d\vec{\omega}}/{dt}$. Отже вектор $\vec{\varepsilon}$ направлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$ і за величиною дорівнює швидкості точки N, тобто

$$\varepsilon = \omega_z \cdot \omega = 300 \text{ с}^{-2}.$$

Внаслідок того, що модуль вектора миттєвої кутової швидкості є постійною величиноб, вектор $\vec{\varepsilon}$ перпендикулярний до вектора $\vec{\omega}$ і направлений в напрямку обертання ω_z (рис. 4.10).

Приклад 4.2

Конічне зубчасте колесо 1 радіусом R обертається з постійною кутовою швидкістю ω_1. Зубчасте колесо 2 приводиться в рух за допомогою кривошипа, який має кутову швидкість $\omega_2 = {3}/{2}\,\omega_1$ і його обертання здійснюється в цьому ж напрямку, що й колеса 1. Визначити миттєву кутову швидкість і кутове прискорення колеса 2, а також швидкість і прискорення точки C цього колеса, яка діаметрально протилежна точці дотику A, якщо кут $\alpha = 60^{\circ}$, кут $\delta = 30^{\circ}$, а осі коліс перетинаються в точці O.

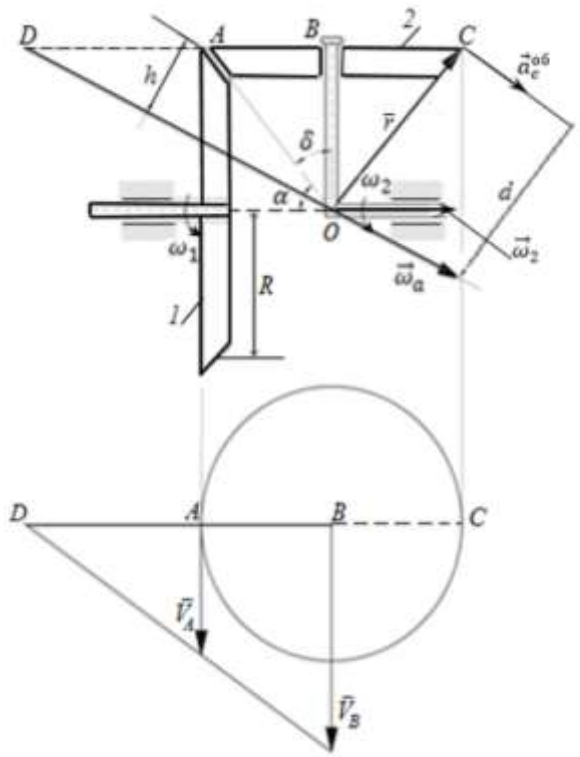


Рис.4.11

Розв'язання. Зубчасте конічне колесо 2 здійснює рух твердого тіла з однією нерухомою точкою. Такою точкою є точка O. Відомо, що в кожний момент часу таке тіло здійснює миттєвий обертовий рух навколо миттєвої осі обертання, яка проходить через точку O. Для знаходження цієї осі потрібно знайти таку точку на цьому колесі (або на зв'язаній з ним рухомій площині), швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Рух колеса 2 повністю характеризується рухом відрізка ABC. Зв'яжемо з цим відрізком нескінченну пряму і вивчимо її рух в даний момент часу. Так як в точці A колеса 1 і 2 перебувають в зубчастому зачепленні, то швидкість точки A на ободі колеса 2 дорівнює швидкості такої ж точки на ободі колеса 1, тобто

$$v_A = R\omega_1.$$

Точка B належить кривошипу BO і її швидкість

$$v_B = R\omega_2 = R \cdot \frac{3}{2}\omega_1 = \frac{3}{2}v_A.$$

Вектори швидкостей цих точок паралельні і направлені так, як показано на рис 4.11. Отже пряма, яка зв'язана з відрізком ABC, здійснює в даний момент часу миттєвий обертальний рух навколо точки D, положення якої визначаємо з умови

$$\frac{v_A}{AD} = \frac{v_B}{AD + AB},$$

звідки знайдемо

$$AD = 2AB = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином миттєвою віссю обертання для колеса 2 в даний момент часу є вісь DO. Швидкість будь-якої точки колеса 2 в даний момент часу дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості колеса 2 на відстань цієї точки до миттєвої осі обертання. Отже для точки A отримаємо

$$v_A = \omega_a \cdot h = \frac{\omega_a R}{\sqrt{3}},$$

звідки знаходимо миттєву кутову швидкість колеса 2

$$\omega_a = \frac{\sqrt{3} v_A}{R} = \sqrt{3}\omega_1.$$

Такий самий результат отримаємо, якщо використаємо точку B.

Вектор $\vec{\omega}_a$ миттєвої кутової швидкості колеса 2 направлений вздовж миттєвої осі обертання так, як показано на рис.2, тобто дивлячись з його кінця ми будемо бачити обертання колеса 2 навколо миттєвої осі в напрямку проти стрілки годинника.

Вектор кутового прискорення колеса 2

$$\vec{\varepsilon}_a = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt}.$$

Так як вектор $\vec{\omega}_a$ постійної величини, то його зміна з часом дорівнює швидкості його кінця за рахунок обертання цього вектора з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі обертання кривошипа, тобто

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_a.$$

$$\varepsilon_a = \omega_2 \cdot \omega_a \cdot \sin(\widehat{\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_a}) = \frac{3}{2}\omega_1 \cdot \sqrt{3}\omega_1 \cdot sin30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1^2.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_a$ направлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}_a$, тобто він перпендикулярний до вектора $\vec{\omega}_a$. Якщо його прикласти в точці O, то він буде направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_a$, тобто до площини рисунка і направлений від нас. Якщо дивитися з кінця цього вектора, то ми будемо бачити найкоротший поворот від вектора $\vec{\omega}_2$ до вектора $\vec{\omega}_a$ в напрямку проти стрілки годинника.

Швидкість точки C колеса 2 дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань цієї точки до миттєвої осі обертання

$$v_C = \omega_a \cdot d = \sqrt{3}\omega_1 \cdot \frac{4R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 2R\omega_1.$$

Прискорення точки A дорівнює геометричній сумі доосьового і обертового прискорень

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{\text{ос}} + \vec{a}_C^{\text{об}}.$$

Доосьове прискорення за величиною дорівнює добутку квадрата миттєвої кутової швидкості на відстань цієї точки до миттєвої осі обертання

$$a_C^{\text{ос}} = \omega_a^2 \cdot d = 3\omega_1^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}R\omega_1^2.$$

Направлене це прискорення вздовж CO до миттєвої осі обертання.

Обертове прискорення дорівнює

$$\vec{a}_C^{\text{об}} = \vec{\varepsilon}_a \times \vec{r}.$$

Так як вектори $\vec{\varepsilon}_a$ і $\vec{r}$ взаємно перпендикулярні, то

$$a_C^{\text{об}} = \varepsilon_a \cdot d = \frac{3}{2} R\omega_1^2.$$

Направлене прискорення $\vec{a}_C^{\text{об}}$ перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\varepsilon}_a$ і $\vec{r}$ в ту сторону, дивлячись звідки ми будемо бачити найкоротший поворот вектора $\vec{\varepsilon}_a$ до вектора $\vec{r}$ в напрямку проти стрілки годинника. Отже цей вектор паралельний вектору $\overline{\omega}_a$. Таким чином вектори $\vec{a}_C^{\text{ос}}$ і $\vec{a}_C^{\text{об}}$ взаємно перпендикулярні і лежать в одній площині. Повне прискорення точки C дорівнює

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\text{ос}})^2 + \left(a_C^{\text{об}}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{2}\, R\omega_1^2.$$

Питання для самоконтролю

1. Який рух тіла називається сферичним?
2. Назвіть кількість незалежних параметрів, необхідних для визначення положення тіла з однією нерухомою точкою.
3. Запишіть кінематичні формули Ейлера.
4. Теорема Ейлера-Д'аламбера про елементарне переміщення тіла з однією нерухомою точкою.
5. Що таке миттєва вісь обертання, яку швидкість мають точки цієї осі?
6. Опишіть кутову швидкість тіла під час його сферичного руху.
7. Як визначити вектор кутового прискорення тіла під час його сферичного руху, чим він характеризується?
8. Як визначити швидкості точок тіла, яке здійснює сферичний рух?
9. Як визначити прискорення точок тіла, яке здійснює сферичний рух?
10. Обертальне і доосьове прискорення, їх взаємне розміщення.
11. Як визначити модуль прискорення точок тіла під час його сферичного руху?
12. Скільки ступенів свободи має будь яке тіло, яке вільно переміщується в просторі?
13. Запишіть складові, на які можна розкласти рух вільного твердого тіла?
14. Кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла.
15. Як визначити швидкості точок вільного твердого тіла?
16. Як визначити прискорення точок вільного твердого тіла?

ГЛАВА V
СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

§ 1. Відносний, переносний та абсолютний рухи точки. Абсолютна та відносна похідні від вектора

Механічні явища, які відбуваються в просторі, по різному фіксуються в різних координатних системах. Спостерігачі, зв'язані з різними системами координат, будуть по різному сприймати одне і те ж об'єктивне механічне явище. Тому головним питанням складного руху є встановлення зв'язку між кінематичними величинами, які характеризують одне і те ж механічне явище в двох різних координатних системах, котрі мають взаємний відносний рух. Кінематичні характеристики цих взаємних рухів координатних систем потрібно вважати відомими. Одну з цих систем будемо умовно називати *нерухомою системою*. Іншу, відповідно, будемо називати *рухомою*. Умовність цих термінів очевидна, так як обидві системи рухаються в просторі відносно інших систем координат.

Рух точки відносно деякої системи координат, яка рухається відносно іншої нерухомої координатної системи, називається складним рухом точки.

Рух точки відносно умовно нерухомої системи координат називається *абсолютним*.

Рух точки відносно системи координат, яка в свою чергу рухається відносно умовно нерухомої, називається *відносним*. Наприклад, нехай точка рухається по деякому тілу A, яке рухається відносно нерухомої системи координат. Якщо зв'яжемо з цим тілом деяку систему координат, яка буде рухатися разом з цим тілом, то рух точки відносно тіла A буде відносним (рис. 5.1). Нерухому систему відліку $O_1x_1y_1z_1$ зв'яжемо з умовно нерухомим тілом, наприклад з Землею. Зв'язану з тілом рухому систему координат $Oxyz$ виберемо з початком в деякій точці O тіла (рис. 5.1).

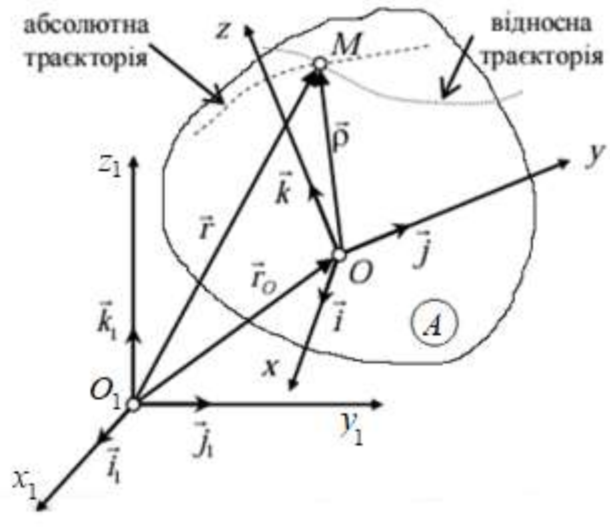


Рис. 5.1

Рівняння абсолютного руху точки M відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$ можна записати так

$$x_1 = x_1(t), \qquad y_1 = y_1(t), \qquad z_1 = z_1(t). \tag{5.1}$$

Рівняння відносного руху точки M в системі $Oxyz$ мають вигляд

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{5.2}$$

Введемо поняття *переносного* руху. *Переносним рухом* точки M називається рух тієї точки координатної сітки рухомої системи координат $Oxyz$, через яку в даний момент часу проходить точка M. Інакше кажучи це є рух тієї точки тіла A, через яку в даний момент часу проходить точка наша M. Часто кажуть, що переносний рух точки M – це рух тієї точки тіла A, яка в даний момент часу переносить точку M.

Відповідно до основних понять кінематики будемо розрізняти: абсолютну, відносну і переносну траєкторії точки М, її абсолютну, відносну і переносну швидкість, абсолютне, відносне і переносне прискорення.

Щоб більш наглядно пояснити основні поняття складного руху точки, приведемо такий приклад. Розглянемо, наприклад, рух пасажира, який прогулюється по палубі судна, відносно двох спостерігачів, один з яких стоїть нерухомо на березі моря, а другий стоїть на палубі судна. Цим спостерігачам відповідають дві системи координат. Першу з них, зв'язану з берегом, будемо вважати нерухомою, а другу, зв'язану з судном – рухомою. Рух пасажира відносно нерухомої системи координат, зв'язаної з берегом, буде абсолютним, рух пасажира відносно рухомої системи координат, зв'язаної з судном – відносним. Переносним рухом пасажира буде рух тих частин палуби, на які він опирається в даний момент часу.

Будемо надалі позначати абсолютні швидкість і прискорення $\vec{V}_a$ і $\vec{a}_a$, відносні швидкість і прискорення $\vec{V}_r$ і $\vec{a}_r$ і переносні швидкість і прискорення $\vec{V}_e$ та $\vec{a}_e$.

Рівняння (5.1) і (5.2) визначають у параметричній формі відповідно абсолютну та відносну траєкторії. Якщо рівняння (5.1) і (5.2) відомі, то проекції абсолютної та відносної швидкостей визначаються відповідно як перші похідні за часом наведених функцій, а другі похідні за часом від цих функцій визначають проекції абсолютного та відносного прискорень.

Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів.

Для вирішення цієї задачі потрібно розглянути деякі додаткові поняття, які дозволяють побудувати математичний апарат, необхідний для дослідження кількісних співвідношень цього розділу механіки.

Припустимо, що в деякій точці простору відбувається механічне явище, яке характеризується змінним вектором $\vec{b}$. Це явище фіксується в двох системах координат, одну з яких $O_1x_1y_1z_1$ будемо вважати нерухомою (рис. 5.2). Бистроту зміни вектора $\vec{b}$ відносно нерухомої системи координат будемо називати *абсолютною похідною* вектора $\vec{b}$ по часу. Бистроту зміни вектора $\vec{b}$ відносно рухомої системи координат $Oxyz$ будемо називати *відносною похідною* вектора $\vec{b}$ по часу. Наша задача полягає в тому, щоб встановити залежності між абсолютною та відносною похідними вектора $\vec{b}$. Відносну похідну вектора $\vec{b}$ іноді називають *локальною* або *місцевою* похідною.

Розкладемо вектора $\vec{b}$ по координатних векторах рухомої системи координат (рис. 5.2)

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}, \tag{5.3}$$

де b_x, b_y, b_z– проекції вектора $\vec{b}$ на відповідні осі рухомої системи.

Розглянемо абсолютну похідну вектора $\vec{b}$. Згідно визначення абсолютної похідної маємо

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{db_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{db_z}{dt}\vec{k} + b_x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + b_y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + b_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{5.4}$$

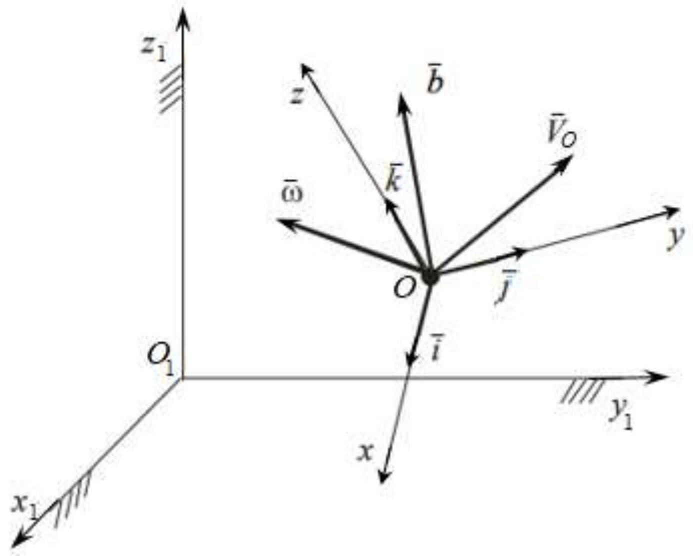


Рис. 5.2

Перші три складових цього рівняння характеризують бистроту зміни вектора $\vec{b}$ відносно системи координат $Oxyz$ (при незмінних ортах $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) і являють собою відносну похідну:

$$\frac{d'\vec{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{db_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{db_z}{dt}\vec{k}. \tag{5.5}$$

Останні три члени в правій частині рівності (5.4) характеризують додаткову зміну вектора $\vec{b}$ відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$, тобто бистроту зміни, яка залежить від руху системи координат $Oxyz$ відносно $O_1x_1y_1z_1$. Розглянемо детальніше ці члени.

Загальний рух координатного базиса системи $Oxyz$ складається з поступальної і миттєвої обертової частин. Зміна координатного базиса $Oxyz$ системи залежить тільки від обертової частини її загального руху. Ця частина руху, як відомо, зводиться до миттєвого обертання навколо осі, що проходить через початок координат системи $Oxyz$.

На основі формули Ейлера (2.16) маємо

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\imath}; \ \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\jmath}; \ \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}, \tag{5.6}$$

тобто кожна з цих похідних – це швидкість миттєвого обертового руху точки, для якої радіусом-вектором є відповідний координатний вектор.

Отже сума трьох останніх складових рівняння (5.4) запишеться так:

$$b_x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + b_y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + b_z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\imath}b_x + \vec{\jmath}b_y + \vec{k}b_z\right) = \vec{\omega} \times \vec{b}. \tag{5.7}$$

Підставляючи (5.5) і (5.7) в (5.4), одержимо:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}. \tag{5.8}$$

Формулу (5.8) називають формулою Бура. Вона має такий зміст: *абсолютна похідна довільного вектора за часом дорівнює сумі локальної похідної та векторного добутку вектора $\vec{\omega}$ обертання рухомої системи координат на диференційований вектор*.

§ 2. Теорема про додавання швидкостей при складному русі точки

Теорема. *Абсолютна швидкість* $\vec{V}_a$ *точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної* $\vec{V}_r$ *та переносної* $\vec{V}_e$ *швидкостей.*

Доведення. Нехай точка *M* рухається відносно системи координат $Oxyz$ і разом з нею відносно системи $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 5.3).

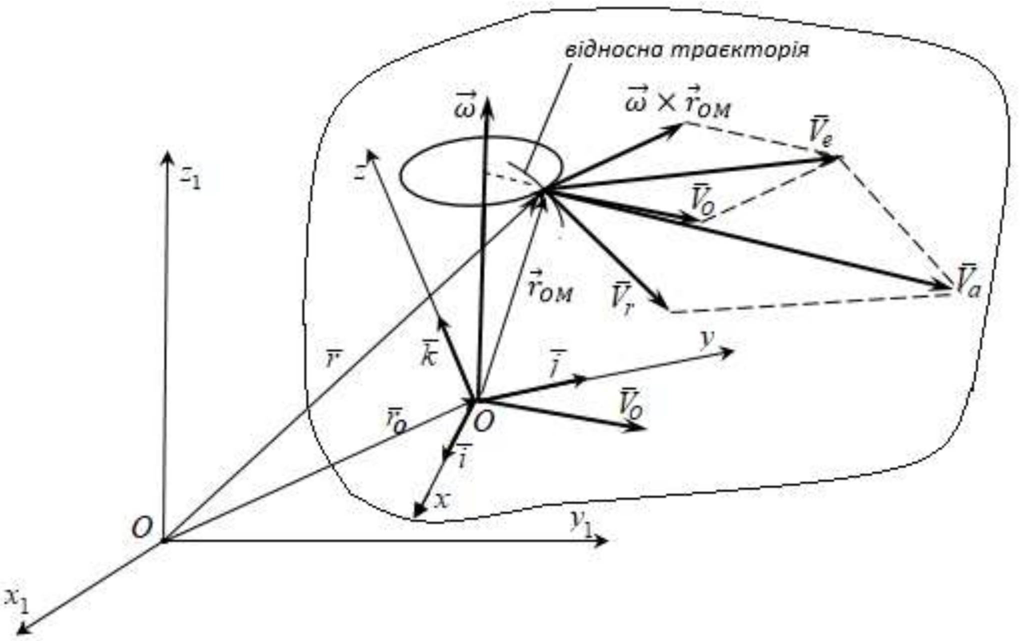


Рис. 5.3

Положення точки *M* відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ визначається радіус-вектором $\vec{r}$. Маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{r}_{OM}. \tag{5.9}$$

Вектор $\vec{r}_O$ зв'язаний з нерухомою системою координат, а вектор $\vec{r}_{OM}$ − з рухомою.

Абсолютна швидкість точки М визначається абсолютною похідною $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Абсолютну похідну від вектора $\vec{r}_{OM}$ виразимо через відносну похідну цього ж вектора. Отже, застосовуючи формулу (5.8), знайдемо

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM} + \frac{d'\vec{r}_{OM}}{dt}. \tag{5.10}$$

Абсолютна швидкість $\vec{V}_a$ називається також швидкістю складного руху точки *M*.

Порівнюючи формулу (5.10) з рівністю (4.22), приходимо до висновку, що сума

$$\vec{V}_e = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}, \tag{5.11}$$

є швидкістю точки координатної сітки, незмінно зв'язаної з системою координат $Oxyz$, в якій в даний момент часу знаходиться точка *M*, рух якої ми вивчаємо. Значить $\vec{V}_e$ − переносна швидкість точки *M* (рис. 5.3).

Вектор $\frac{d'\vec{r}_{OM}}{dt}$ характеризує швидкість змінення радіуса-вектора $\vec{r}_{OM}$ точки *M* відносно системи координат $Oxyz$. Отже він є відносною швидкістю точки М.

$$\vec{V}_r = \frac{d'\vec{r}_{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{5.12}$$

Підставляючи (5.11 і (5.12) в (5.10), отримаємо:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{5.13}$$

Рівність (5.13) виражає теорему додавання швидкостей: *абсолютна швидкість точки М дорівнює геометричній сумі переносної та відносної швидкостей*.

Модуль абсолютної швидкості точки визначається за формулою

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\vec{V}_e||\vec{V}_r|cos\alpha}, \tag{5.14}$$

де α – кут між векторами $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$.

§3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Питання про визначення абсолютного прискорення розв'язується значно складніше, ніж задача визначення абсолютної швидкості. Розглядаючи навіть найпростіші випадки складного руху, можна переконатися в тому, що відносне і переносне прискорення ще не повністю визначають абсолютне прискорення. Лише в тих випадках, коли рухома система координат рухається поступально, абсолютне прискорення визначається як сума переносного і відносного. Якщо ж переносний рух відрізняється від поступального, то появляється додаткова складова абсолютного прискорення, яка враховує зміну відносної швидкості за рахунок переносного руху і зміну переносної швидкості за рахунок відносного руху.

Теорема Коріоліса. *Абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі переносного прискорення, відносного прискорення і додаткового, або коріолісового, прискорення.*

Як було показано в *§2* абсолютна швидкість визначається так

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM} + \vec{V}_r$$

Знайдемо абсолютне прискорення. Маємо

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_e}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d\vec{V}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{OM}}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt}. \tag{5.15}$$

Всі похідні, які входять в останнє співвідношення, є абсолютними похідними. Виразимо деякі з них через відносні похідні за формулою (5.8), для того, щоб виділити в правій частині рівності (5.15) ті члени, в які входять відносна та відносне прискорення. Маємо

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{OM}}{dt} = \frac{d'\vec{r}_{OM}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}, \\ \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d'\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Підставимо значення (5.16) в рівність (5.15). Приймаючи до уваги, що

$$\frac{d\vec{V}_O}{dt} = \vec{a}_O, \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$$

знайдемо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}) + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_r). \qquad (5.17)$$

Дослідимо отриманий вираз абсолютного прискорення точки *М*. Перші три члени в (5.17) – переносне прискорення

$$\vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}). \qquad (5.18)$$

Дійсно, вираз, який стоїть в правій частині формули (5.18), це прискорення цієї точки координатної сітки системи координат $Oxyz$, в якій в даний момент часу знаходиться точка *М*. Значить ця сума і є переносним прискорення.

Дальше в правій частині (5.17) стоїть відносне прискорення $\vec{a}_r$. Нарешті останній член – додаткове, або *коріолісове прискорення*:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \qquad (5.19)$$

Тут $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}$, тобто ми ввели індекс «е», щоб підкреслити зв'язок $\vec{\omega}$ з переносним рухом.

Отже формулу (5.17), яка виражає теорему Коріоліса, скорочено можна записати так

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \qquad (5.20)$$

тобто: *абсолютне прискорення точки, яка перебуває в складному русі, дорівнює геометричній сумі переносного, відносного і прискорення Коріоліса.*

Зауважимо, що якщо виписати окремо вирази для абсолютної похідної векторів відносної і переносної швидкостей, то дістанемо

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r,$$

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_e + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r.$$

Звідси видно, що одна частина прискорення Коріоліса отрималася внаслідок зміни відносної швидкості за рахунок переносного руху, а друга – внаслідок зміни переносної швидкості за рахунок відносного руху. Ці обидві частини виявилися однаковими і в сумі вони утворюють прискорення Коріоліса.

§ 4. Визначення модуля і напряму прискорення Коріоліса. Правило Жуковського

Прискорення Коріоліса дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості та відносної лінійної швидкості точки (5.19).

Модуль прискорення Коріоліса визначається формулою

$$a_C = 2\omega_e \cdot V_r \cdot sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right), \qquad (5.21)$$

З останньої формули) видно, що прискорення Коріоліса буде дорівнювати нулю в трьох випадках:

- коли $\omega_e = 0$, тобто, коли переносний рух є поступальним або тоді, коли в даний момент часу переносна кутова швидкість перетворюється в нуль;
- в ті моменти часу, коли $V_r = 0$;
- коли $sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right) = 0$, тобто коли вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ колінеарні.

Напрямок прискорення Коріоліса визначається напрямком векторного добутку векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$, тобто прискорення Коріоліса направлене перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$, у тому напрямку, звідки видно, що для того, щоб сумістити вектор $\vec{\omega}_e$ з вектором $\vec{V}_r$, вектор $\vec{\omega}_e$ потрібно повертати на менший кут в напрямку проти ходу стрілки годинника. (рис. 5.4).

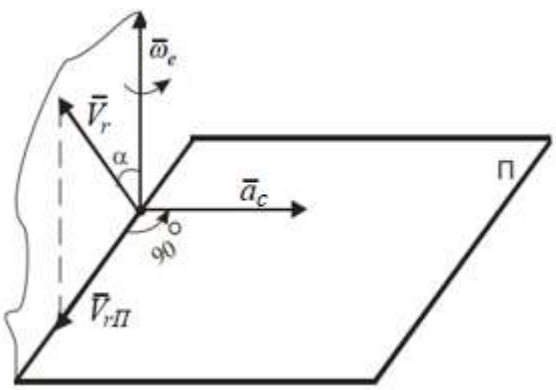


Рис. 5.4

За правилом Жуковського *для знаходження напрямку прискорення Коріоліса необхідно спроектувати вектор відносної швидкості* $\vec{V}_r$ *на перпендикулярну до осі переносного обертання площину П, а потім повернути цю проекцію* $\vec{V}_{r\Pi}$ *на кут* $90°$ *у напрямку переносного обертання* (див. рис. 5.4).

§ 5. Деякі практичні наслідки дії прискорення Коріоліса.

Вплив прискорення Коріоліса, яке виникає внаслідок обертального руху Землі навколо її осі, відображається на різноманітних явищах, які спостерігаються на земній поверхні.

Розглянемо, наприклад, точку M, яка рухається вздовж меридіана в північній півкулі з швидкістю $\vec{V}_r$ (рис. 5.5). Якщо з Землею зв'язати систему координат $Oxyz$, то переносний рух зв'язаний з обертальним рухом цієї системи координат навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$. Отже вектор прискорення Коріоліса точки M направлений на схід по дотичній до круга широти. Якщо точка М буде знаходитися на екваторі, то прискорення Коріоліса зникне, так як там вектори $\vec{V}_r$ і $\vec{\omega}_e$ колінеарні. Якщо точка буде рухатися вздовж цього ж меридіана з півночі на південь в південній півкулі, то прискорення Коріоліса буде направлене на захід.

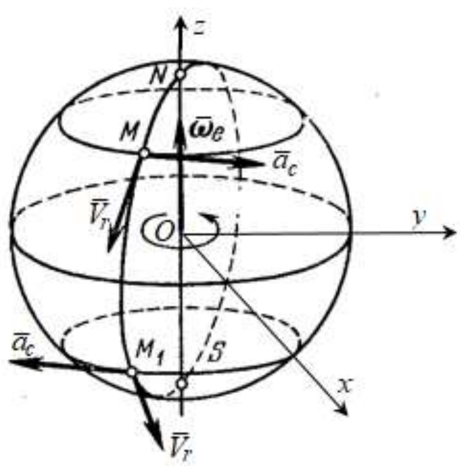


Рис. 5.5

Припустимо тепер, що точка *M* це частинка води в річці, яка тече з півночі на південь в північній півкулі. З фізики, а далі в динаміці, ми побачимо, що прискорення викликаються деякими силами. Значить наявність прискорень Коріоліса частинок води пояснюється наявністю сил, прикладених до цих частинок і направлених в північній півкулі на схід. Ці сили виникають внаслідок взаємодії між Землею і частинками води в річці. Але відомо (третій закон Ньютона), що кожній дії відповідає рівна за величиною і протилежно направлена протидія.

Таким чином, частинки води діють на русло силами, направленими на захід. Внаслідок цього ріки, які течуть з півночі на південь в північній півкулі, розмивають свій правий берег. Очевидно, що в південній півкулі розмивають свій лівий берег.

Аналогічно пояснюється і напрямок пасатів (вітри постійного напрямку) біля екватора. Маси холодного повітря течуть з півночі на південь, утворюючи величезний атмосферний потік, який як ріка, відхиляється в північній півкулі на захід. Тому спостерігачу, який знаходиться біля екватора, здається, що в північній півкулі пасати мають північно-східний напрямок. В південній півкулі для нього пасати мають південно східний напрямок.

§ 6. Приклади розв'язання задач на складний рух точки

При розв'язанні задач кінематики складного руху точки важливо правильно визначити розподіл абсолютного руху точки на відносний та переносний. Часто для встановлення виду відносного руху точки подумки зупиняють переносний рух (рух тіла, по якому рухається точка), а для встановлення характеру переносного руху подумки зупиняють відносний рух точки.

Кінематичні характеристики переносного руху потрібно визначити за правилами знаходження аналогічних характеристик точок твердого тіла.

Приклад 5.1

На дротяне коло радіуса 10 см надіто колечко *M*; через нього проходить стрижень *OA*, який рівномірно обертається навколо точки *O*, що лежить на тому самому колі; кутова швидкість стрижня така, що він обертається на прямий кут за 5 с. Визначити швидкість і прискорення колечка *M* (рис. 5.6).

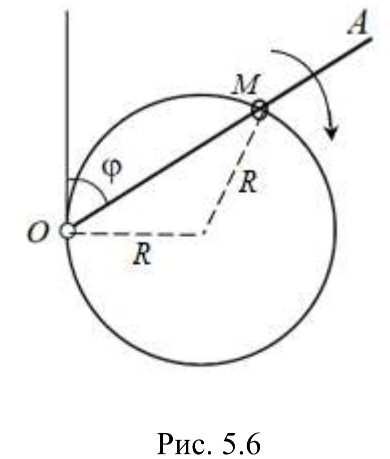


Рис. 5.6

Розв'язання. Якщо зв'яжемо систему координат із стрижнем *OA,* то рух колечка *M* відносно цієї рухомої системи координат, тобто відносно стрижня *OA,* буде відносним. Рух стрижня *OA* по відношенню до колечка *M* буде переносним. Таким чином відносний рух колечка *M* є прямолінійний рух вздовж стрижня *OA*. Переносний рух колечка *M* є рух тієї точки на стрижні *OA,* з якою в даний момент часу співпадає колечко. Отже це обертовий навколо точки *O*.

Переносний рух обертовий з постійною кутовою швидкістю ω_e. Отже закон цього руху $\varphi = \omega t$. Так як в умові задачі сказано, що стержень повернеться на кут $\pi/2$ за 5 секунд, то

$$\pi/_2 = 5\omega \rightarrow \omega = \pi/_{10}\,\text{с}^{-1}.$$

Знайдемо закон відносного руху колечка

$$s = OM = 2Rsin\varphi = 2Rsin\,\pi t/_{10}.$$

Відносна швидкість колечка

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 2\pi cos\,\pi t/_{10}\ \text{см}/_\text{с}.$$

Направлений вектор відносної швидкості вздовж стрижня: від точки *M* до точки *A*, якщо $0 \leq t \leq 5$ і в протилежному напрямку, якщо $5 \leq t \leq 10$ (рис. 5.7).

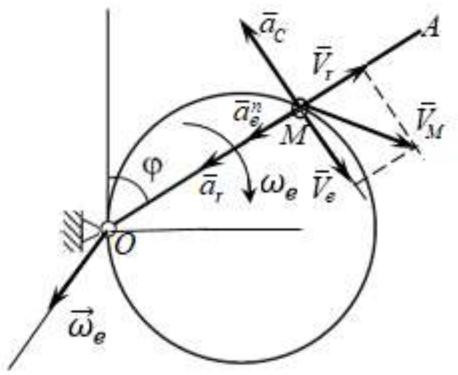


Рис. 5.7

Переносна швидкість точки *M*

$$V_e = \omega_e \cdot OM = 2\pi sin\,\pi t/_{10}.$$

Направлений вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярно до стрижня в напрямку його обертання (рис. 5.7).

Абсолютна швидкість кільця $\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. Так як вектори відносної і переносної швидкостей взаємно перпендикулярні, то

$$V_M = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 2\pi\ \text{см}/_\text{с}.$$

Абсолютне прискорення кільця

$$\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Відносне прискорення

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = -\frac{\pi^2}{5} sin\,\pi t/_{10}.$$

Направлене відносне прискорення вздовж стрижня від точки *M* до точки *O*.

Переносне прискорення точки *M* складається з дотичного і нормального. Так як переносний рух є обертовий рух з постійною кутовою швидкістю ω_e, дотичне переносне прискорення дорівнює

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM = 0.$$

Нормальне переносне прискорення

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 2R\frac{\pi^2}{100} \cdot sin\,{}^{\pi t}/_{10} = \frac{\pi^2}{5} sin\,{}^{\pi t}/_{10}.$$

Направлене переносне нормальне прискорення від точки *M* до точки *O* (рис. 5.7).
Прискорення Коріоліса точки *M* дорівнює (кут між векторами $\vec{\omega}_e$ $і$ $\vec{V}_r$ дорівнює ${}^{\pi}/_{2}$)

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r \sin 90° = \frac{2\pi^2}{5} cos\,{}^{\pi t}/_{10}.$$

Направлений вектор $\vec{a}_c$ перпендикулярно до площини, в якій розміщені вектори $\vec{\omega}_e$ $і$ $\vec{V}_r$ в протилежному напрямку до $\vec{V}_e$ (рис. 5.7). Абсолютне прискорення точки *M* дорівнює

$$a_M = \sqrt{(a_c)^2 + (a_e^n + |a_r|)^2} = \sqrt{\frac{4\pi^4}{25} cos^2\left({}^{\pi t}/_{10}\right) + \frac{4\pi^4}{25} sin^2\left({}^{\pi t}/_{10}\right)} = \frac{2\pi^2}{5}\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Приклад 5.2

На візку A, який рухається із стану спокою в горизонтальному напрямку вправо з постійним прискоренням $a_A = 0{,}492$ м/с^2 (рис. 5.8), розміщено електродвигун, ротор якого обертається за законом $\varphi = t^2$ радіан. Радіус ротора $R = 0{,}2$м. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки *M*, яка лежить на ободі ротора, у момент часу $t = 1c$, якщо в цей момент точка *M* знаходиться в положенні, показаному на рисунку 5.8.

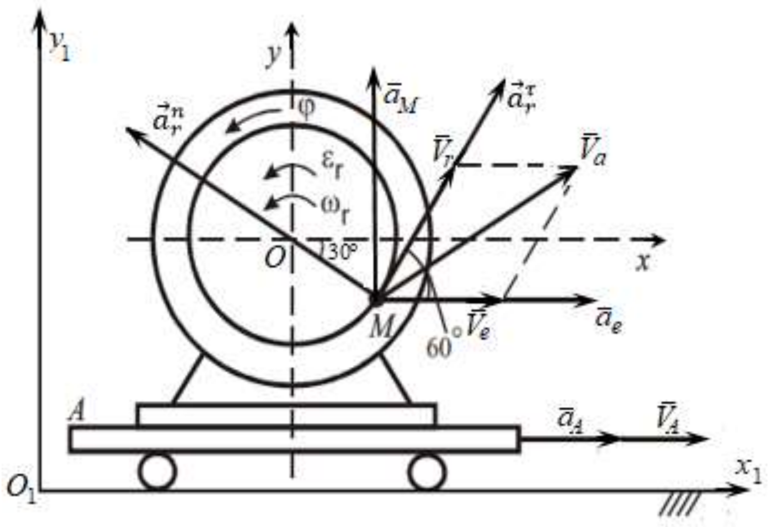


Рис. 5.8

Розв'язання. Точка корпуса двигуна, з якою в даний момент часу співпадає точка *M* ободу ротора, визначає переносний рух точки *M*. Отже поступальний рух візка є переносним, а обертання ротора навколо його осі є відносним. Виберемо нерухому систему відліку $O_1x_1y_1$, а рухому систему Oxy зв'яжемо з рухомим візком. Абсолютним буде рух точки *M* по відношенню до нерухомої системи $O_1x_1y_1$. Абсолютну швидкість точки *M* визначимо за залежністю (5.13)

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Переносна швидкість точки *M* дорівнює швидкості візка в його поступальному прямолінійному рівноприскореному русі. Якщо позначити постійне прискорення візка a_A, то швидкість візка буде

$$V_A = a_A \cdot t + \text{C}.$$

Так, як початкова швидкість візка рівна нулю, то постійна *C* дорівнює нулю і $V_A = a_A \cdot t$. При $t = 1c$ знайдемо $V_A = V_e = 0{,}492 \cdot 1 = 0{,}492\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Вектор $\vec{V_e}$ направлений паралельно осі Ox_1 вправо. Відносну швидкість знайдемо як швидкість точки *M* при обертанні ротора з кутовою швидкістю $\omega_r = \dot{\varphi} = 2t$. При $t = 1c$ кутова швидкість ротора $\omega_r = 2c^{-1}$. Тоді відносна швидкість $V_r = \omega_r \cdot R = 0{,}4\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Вектор $\vec{V_r}$ направлений перпендикулярно до *OM* в напрямку обертання ротора.

Модуль абсолютної швидкості точки *M* визначимо за залежністю (5.14):

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2\left|\vec{V_e}\right|\left|\vec{V_r}\right| cos\alpha}.$$

Враховуючи, що кут між векторами $\vec{V_e}$ і $\vec{V_r}$ становить 60°, одержимо

$$V_a = \sqrt{0{,}492^2 + 0{,}4^2 + 2 \cdot 0{,}492 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}866} = \ 0{,}77\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

Оскільки переносний рух поступальний, прискорення Коріоліса точки М відсутнє і абсолютне прискорення точки *M* дорівнює

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e. \qquad (5.22)$$

Переносне прискорення дорівнює прискоренню візка, тобто $a_e = a_A = 0{,}492\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Так як рух візка прискорений, то напрям вектора $\vec{a}_e$ співпадає з напрямком $\vec{V_e}$.

Відносне прискорення точки *M* при обертанні ротора має дві складові:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n.$$

Модулі цих складових визначаємо за формулами, за якими визначаються дотичне a_τ та нормальне a_n прискорення точки тіла, яке обертається:

$$a_r^\tau = \varepsilon_r \cdot R, \qquad a_r^n = \omega_r^2 \cdot R.$$

Тут $\varepsilon_r = \dfrac{d\omega_r}{dt} = 2c^{-1}$, тому дотичне прискорення точки *M* в її відносному русі буде мати значення

$$a_r^\tau = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Оскільки знаки ω і ε однакові (обертання прискорене), та вектори $\vec{a}_r^\tau$ і $\vec{V_r}$ будуть направлені в одному напрямку. Нормальне прискорення точки у відносному русі дорівнює $a_r^n = 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Вектор $\vec{a}_r^n$ направлений від точки *M* до центра *O* обертання ротора.

Отже вектор абсолютного прискорення точки М дорівнює

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e. \qquad (5.23)$$

Для того, щоб знайти величину абсолютного прискорення точки *M*, спроектуємо ліву і праву частини векторної рівності (5.23) на осі рухомої системи координат:

$$a_{ax} = a_e + a_r^\tau cos60° - a_r^n cos30° = 0{,}492 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}866 = 0;$$

$$a_{ay} = a_r^\tau sin60° + a_r^n sin30° = 0{,}4 \cdot 0{,}866 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}746\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Оскільки проекція вектора абсолютного прискорення на вісь x дорівнює нулю, то вектор $\vec{a}_a$ в даний момент часу направлений вертикально вгору і за величиною дорівнює $0{,}746\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$.

Приклад 5.3

Пластина *D* (рис. 5.9) обертається навколо нерухомої осі O_1z_1 за законом $\varphi_e = 0{,}9t^2 - 8t^3$, рад. По пластині вздовж прямолінійного жолоба рухається точка *M* відповідно закону $s = OM = 16 - 8cos(3\pi t)$, см.

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки *M* у момент часу $t = {}^2/_9\ c$.

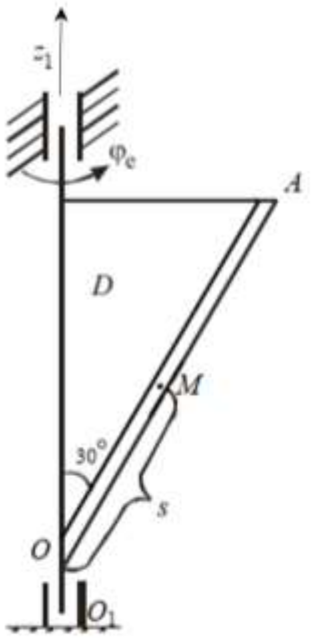


Рис. 5.9

Розв'язання. Будемо вважати, що в розрахунковий момент часу площина креслення співпадає з площиною пластини *D*. Положення точки *M* на пластині *D* при $t = {}^2/_9\ c$ визначається відстанню

$$s_1 = 16 - 8cos\left(3\pi\frac{2}{9}\right) = 16 + 4 = 20\text{см}.$$

Якщо зв'язати рухому систему координат Ox з жолобом *OA,* то рух точки *M* відносно жолоба буде відносним. Це прямолінійний рух, який здійснюється за законом $x = s = 16 - 8cos(3\pi t)$.

Відносна швидкість:

$$V_r = \frac{dx}{dt} = 24sin(3\pi t).$$

При $t = {}^2/_9\ c$ маємо: $V_r = 12\sqrt{3}\pi = 65{,}3\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$.

Вектор $\vec{V}_r$ (рис. 5.10, а) направлений у бік зростання s.

Переносний рух точки M це рух тієї точки жолоба, з якою в даний момент часу співпадає рухома точка M. Це рух обертовий навколо осі O_1z_1 за законом $\varphi_e = 0{,}9t^2 - 8t^3$.

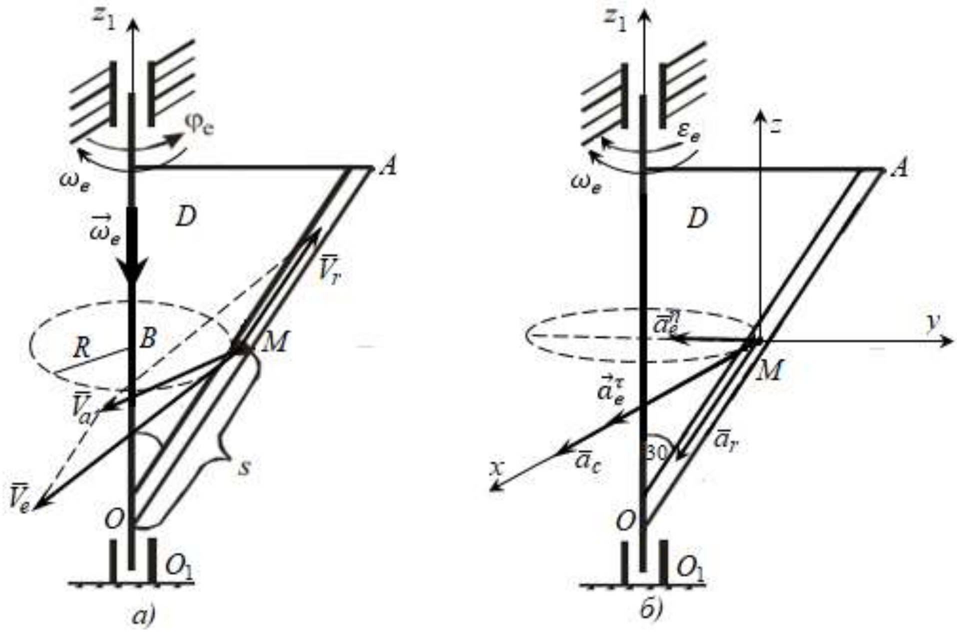


Рис. 5.10

Переносна швидкість:

$$V_e = R\omega_e,$$

де $R = s_1 sin30° = 20 \cdot 0{,}5 = 10$см $-$ радіус кола, яке описує та точка жолоба, з якою в дану мить співпадає точка M, а $\omega_e = \dfrac{d\varphi_e}{dt} = \ 1{,}8t - 27t^2 -$ кутова швидкість тіла.

При $t = {}^{2}/_{9}\, c$ маємо $\omega_e = -0{,}93c^{-1}$. Остаточно $V_e = \ 10 \cdot 0{,}93 = 9{,}3\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}}$.

Так як ω_e в даний момент часу виявилося від'ємним, то в цей момент трикутник обертається навколо осі Oz в протилежному до напрямку відліку кута φ_e напрямку. Тому вектор $\vec{\omega}_e$ направлений вздовж осі O_1z_1 вниз (див. рис. 5.10, а). Вектор переносної швидкості $\vec{V}_e$ направлений по дотичній до кола радіуса R в бік обертання тіла.

За теоремою про додавання швидкостей при складному русі точки знайдемо абсолютну швидкість точки M з формулою:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Оскільки вектори $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$ взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M дорівнює:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 65{,}9\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}}.$$

Згідно з теоремою Коріоліса абсолютне прискорення точки дорівнює:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Так як переносний рух обертовий, остання формула запишеться так:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_c. \qquad (5.24)$$

Величина відносного дотичного прискорення рівна:

$$a_r = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi^2 cos3\pi t.$$

При $t = {}^2/_9\, c$ маємо $a_r = 72\pi^2 cos\, {}^{2\pi}/_3 = -355\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}$.

Від’ємний знак a_r свідчить, що вектор $\vec{a}_r$ направлений в сторону від’ємних значень s (див. рис. 5.10, б).

Переносне дотичне прискорення:

$$a_e^\tau = R\varepsilon_e,$$

де ε_e – кутове прискорення тіла *D*.

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 1{,}8 - 54t.$$

При $t = {}^2/_9\, c$: $\varepsilon_e = -10{,}2\text{с}^{-2}$. Однакові знаки ε_e і ω_e свідчать про те, що обертання тіла *D* прискорене.

Отже модуль переносного дотичного прискорення:

$$a_e^\tau = 10 \cdot 10{,}2 = 102\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Направлений вектор $\vec{a}_e^\tau$ в напрямку обертання тіла *D*, тобто в то й же бік, що і вектор $\vec{V}_e$.

Переносне нормальне прискорення:

$$a_e^n = R\omega_e^2 = 8{,}7\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Вектор $\vec{a}_e^n$ направлений до осі обертання тіла *D*, тобто до центра *A* кола радіуса *R*.

Прискорення Коріоліса:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r).$$

$$a_C = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \cdot sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right).$$

Так як $sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}\right) = sin150° = 0{,}5$, то

$$a_C = 61\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Направлений вектор $\vec{a}_c$ перпендикулярно до площини трикутника *D* у тому напрямку, що і вектори $\vec{V}_e$ і $\vec{a}_e^\tau$.

Для знаходження модуля абсолютного прискорення використаємо метод проекцій. Для цього введемо прямокутну систему координат $Mxyz$ з початком в точці *M* (рис. 5.10 б) і спроектуємо ліві і праві частини векторної рівності (1) на ці осі:

$$a_x = a_e^\tau + a_C = 163\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}\,;$$

$$a_y = -a_e^n - a_r cos60° = -186\, {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}\,;$$

$$a_z = -a_r cos30° = -308 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 395 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Приклад 5.4

Робоче колесо компресора з прямолінійними каналами рівномірно обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі O, перпендикулярної до площини рисунка. Повітря тече по каналу з постійною відносною швидкістю V_r. Знайти проекції на осі координат абсолютної швидкості і прискорення для частинок повітря, які знаходяться в точці С каналу АВ при таких даних: канал АВ нахилений до радіуса під кутом 45°, $OC = 0{,}5$ м; $\omega = 4\pi\ c^{-1}, V_r = 2\ \text{м}/\text{с}$.

Розв'язання. Для того, щоб визначити абсолютну швидкість $\vec{V}_a$ частинки повітря, потрібно спочатку знайти її переносну швидкість, яка є швидкістю точки C каналу компресора (тобто тієї точки каналу, з якою в даний момент часу співпадає частинка повітря). Ця швидкість перпендикулярна до ОС, її напрямок показаний на рис. 5.11, причому $V_e = \omega \cdot OC = 2\pi\ \text{м}/\text{с}$.

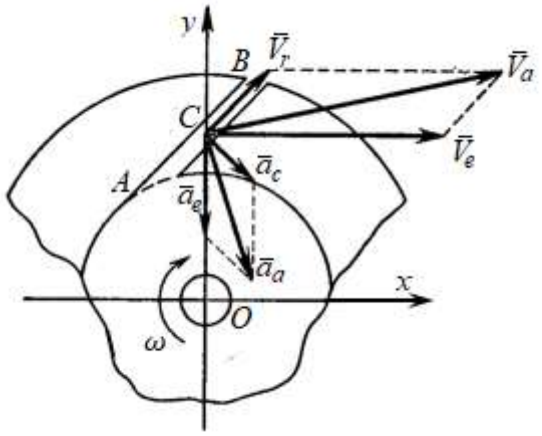


Рис. 5.11

Тепер безпосередньо знаходимо проекції абсолютної швидкості на осі Ox і Oy (рис. 5.11):

$$V_{ax} = V_r \cos 45° + V_e = \left(\sqrt{2} + 2\pi\right)\ \text{м}/\text{с},$$

$$V_{ay} = V_r \sin 45° \approx 1{,}4\ \text{м}/\text{с}.$$

Тепер, застосовуючи теорему Коріоліса, знайдемо абсолютне прискорення.

Так як відносний рух за умовою задачі рівномірний і прямолінійний, відносне прискорення $a_r = 0$. Переносним прискоренням $\vec{a}_e$ є прискорення точки С каналу компресора, тобто нормальне прискорення (рис. 5.11) ($\varepsilon_e = 0$)

$$a_e = \omega^2 \cdot OC = 8\pi^2\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Прискорення Коріоліса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$. Воно лежить в площині рисунка і направлене по перпендикуляру до AB. Модуль коріолісового прискорення

$$a_c = 2\omega_e V_r = 16\pi\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Тепер знаходимо проекції абсолютного прискорення на осі Ox і Oy.

$$a_x = a_c \cos 45° = 8\pi\sqrt{2} \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2},$$

$$a_y = -a_e - a_c \cos 45° \approx -114{,}5 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Питання для самоконтролю

1 Що називають складним рухом точки? Який рух точки називають відносним, абсолютним і переносним ?
2 Абсолютна, відносна і переносна швидкість точки. Як вони пов'язані між собою?
3 Як визначити модуль абсолютної швидкості точки, якщо відомі вектори переносної і відносної швидкості та кут між ними?
4 Як визначити абсолютне прискорення точки у загальному випадку складного руху точки?
5 Як знайти прискорення Коріоліса точки? Запишіть векторний вираз для прискорення Коріоліса.
6 За якою формулою можна знайти модуль прискорення Коріоліса точки. Коли прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
7 Як направлений вектор прискорення Коріоліса? Правило Жуковського для визначення напрямку прискорення Коріоліса.
8 Які причини появи прискорення Коріоліса точки, що характеризує це прискорення?
9 Як визначити абсолютне прискорення точки у випадку поступального переносного руху?

ГЛАВА VI
СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

В найпростішому випадку розглядають додавання двох рухів твердого тіла, один з яких є переносним, а другий – відносним. *Відносним рухом* твердого тіла, в найпростішому випадку це поступальний або обертовий, відносно рухомої системи координат, яка рухається відносно іншої нерухомої системи координат. *Переносним рухом* твердого тіла називають його рух, теж в найпростішому випадку поступальний або обертовий, разом з рухомою системою координат в розглядуваний момент часу відносно нерухомої. *Складним рухом* твердого тіла називають його рух відносно нерухомої системи координат.

Побудова складного руху з переносного і відносного в найпростішому випадку, або декількох переносних і відносних в загальному випадку, називають *додаванням рухів* твердого тіла. Обернений процес називають *розкладанням руху* твердого тіла на складові рухи.

Плоско-паралельний рух і рух вільного твердого тіла вважають вже складними. В загальному випадку переносний і відносний рухи твердого тіла можуть бути будь-якими складними рухами твердого тіла.

При розгляді складного руху твердого тіла, який складається з декількох рухів, розглядають додавання його рухів не за кінцевий проміжок часу, а в розглядуваний момент часу, тобто в дійсності розглядають додавання лінійних і кутових швидкостей. Для обчислення прискорень точок тіла потрібно використовувати формули для складного руху точки або формули для прискорень того руху твердого тіла, який утворюється в результаті додавання рухів.

§ 1. Додавання поступальних рухів твердого тіла

Допустимо, що деяке тіло рухається поступально з швидкістю $\vec{V}_1$ відносно системи координат $Oxyz$, а ця система в свою чергу рухається поступально з швидкістю $\vec{V}_2$ відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 6.1). Очевидно, що абсолютний рух твердого тіла буде також поступальним.

Так як відносні швидкості всіх точок тіла однакові і переносні швидкості всіх точок також однакові, ми можемо безпосередньо застосувати теорему про додавання швидкостей. Так само просто розв'язується в цьому випадку питання про додавання прискорень, так як відносні прискорення всіх точок однакові і переносні прискорення всіх точок також однакові.

Отже в результаті додавання поступальних рухів утворюється поступальний рух зі швидкістю, що дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів і прискоренням, яке теж дорівнює сумі прискорень складових рухів.

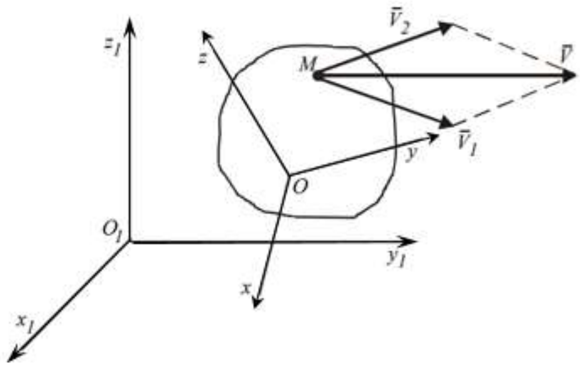


Рис. 6.1

Очевидно, що сукупність декількох поступальних рухів тіла зводиться до результуючого поступального руху із абсолютною швидкістю, яка дорівнює геометричній сумі швидкостей складових рухів, і абсолютним прискоренням, яке дорівнює геометричній сумі прискорень складових рухів

$$\vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \vec{V}_k, \quad \vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k \tag{6.1}$$

§ 2. Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються

Нехай тіло обертається навколо осі Az_1 з кутовою швидкістю ω_r. Вісь Az_1 в свою чергу обертається з кутовою швидкістю ω_e навколо осі Bz_2 (рис. 6.2). Обертовий рух навколо осі Az_1 − відносний, а навколо осі Bz_2 − переносний. Осі Az_1 і Bz_2 перетинаються в точці O.

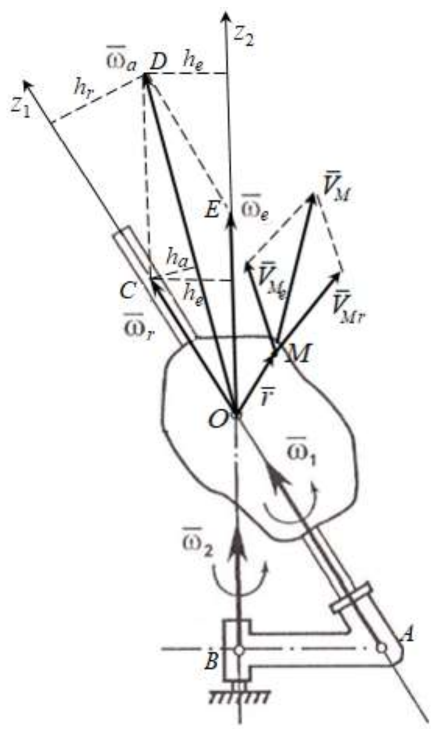


Рис. 6.2

Доведемо *теорему про додавання кутових швидкостей*:

В результаті додавання двох миттєвих обертових рухів навколо осей, що перетинаються, виникає абсолютний миттєвий обертовий рух навколо осі, яка проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань. Абсолютна миттєва кутова швидкість дорівнює векторній сумі кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Абсолютна лінійна швидкість точки *O* в даний момент часу дорівнює нулю. Значить, абсолютний рух зводиться до обертання навколо миттєвої осі, яка проходить через точку *O*. Для того, щоб знайти положення миттєвої осі обертання, необхідно, крім точки *O*, знайти ще одну точку, абсолютна лінійна швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Для цього побудуємо на відрізках, які зображають вектори $\vec{\omega}_r$ і $\vec{\omega}_e$, паралелограм $OCDE$ і доведемо, що абсолютна швидкість точки тіла, яка співпадає з точкою *D*, дорівнює в даний момент часу нулю. Застосуємо теорему про додавання швидкостей і теорему про швидкості кінців відрізка прямої, незмінно зв'язаної з тілом.

Переносна і відносна швидкості точки *D* направлені перпендикулярно до площі паралелограма $OCDE$. Точка *D* лежить між осями *OC* і *OE*, значить лінійні швидкості переносного і відносного рухів в цій точці направлені в протилежні сторони.

Розглянемо модулі $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$. Знайдемо

$$V_e = \omega_e h_e = S_{OCDE}, \qquad V_r = \omega_r h_r = S_{OCDE}.$$

Значить $V_e = V_r$.

Таким чином ми прийшли до висновку, що точка *D* має нульову абсолютну швидкість. Значить миттєва вісь обертання проходить через точку *D*.

Знайдемо абсолютну миттєву швидкість. Для цього розглянемо лінійну швидкість точки *C*. Маємо

$$V_C = \omega_e h_e = S_{OCDE}.$$

Вектор швидкості точки *C* направлений перпендикулярно до площини паралелограма $OCDE$ відповідно до напрямку обертання навколо осі *OE*. Приймаючи до уваги напрямок швидкості точки *C*, можна стверджувати, що абсолютна кутова швидкість направлена вздовж прямої *OD* від точки *O* до точки *D*. Тепер обчислимо V_C як модуль лінійної швидкості обертового руху навколо миттєвої осі *OD*. Знайдемо $V_C = S_{OCDE} = \omega_a h_a$. Значить

$$\omega_a = \frac{S_{OCDE}}{h_a} = OD.$$

Із всього сказаного видно, що вектор миттєвої кутової швидкості за величиною і напрямком дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на відрізках, які зображають кутові швидкості переносного і відносного рухів. Значить

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \tag{6.2}$$

Теорема про додавання кутових швидкостей поширюється на випадок довільної кількості кутових швидкостей навколо осей, що перетинаються в одній точці. Абсолютна миттєва кутова швидкість руху дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей складових рухів:

$$(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n) \sim \vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\omega}_k. \tag{6.3}$$

§ 3. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей

Розглянемо складний рух тіла, який є результатом двох миттєвих обертань навколо паралельних осей (рис. 6.3). В цьому випадку всі точки тіла переміщаються в площинах, паралельних одній нерухомій площині. Отже, результуючий рух тіла буде плоско-паралельним відносно площини, перпендикулярної до осей обертання.

Так як плоский рух твердого тіла в кожний момент часу можна розглядати як обертовий рух плоскої фігури навколо миттєвого центра обертання, то і складний обертовий рух тіла навколо паралельних осей можна представити одним обертальним руху навколо миттєвої осі обертання.

У залежності від величини кутових швидкостей складових обертань та їх напрямків розрізняють три можливі випадки такого складного руху.

1. Складові обертання направлені в один бік.

При однаково направлених складових обертаннях (рис. 6.3, а) відносним буде обертання навколо осі O_1z_1 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, а переносним – відносно осі O_2z_2 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$.

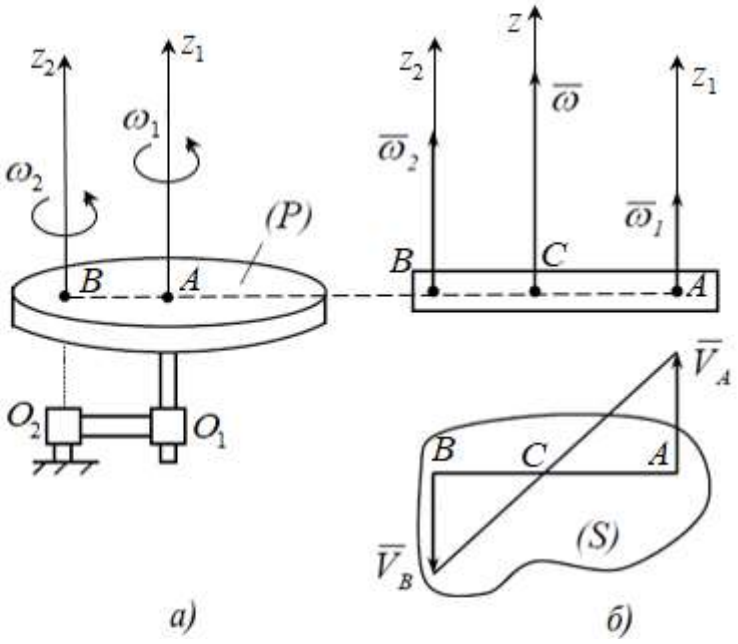


Рис. 6.3

Розглянемо рух плоскої фігури S, яка рухається в перпендикулярній до векторів складових обертань площині (рис. 6.3 б). Швидкості точок A і B плоскої фігури дорівнюють $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$. Направлені вектори $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ перпендикулярно до відрізка AB в протилежних напрямках. Миттєвий центр швидкостей C знаходиться на перетині лінії AB та лінії, проведеної через кінці векторів $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ (див. рис. 6.3, б). Через цю точку пройде миттєва вісь обертання Cz, навколо якої в результуючому русі буде обертатись тіло з деякою миттєвою кутовою швидкістю ω. Ця вісь паралельна осям відносного і переносного обертань, так як вектор миттєвої кутової швидкості результуючого обертання повинен бути перпендикулярним до площини руху плоскої фігури. Знайдемо швидкості точок A і B плоскої фігури в результуючому обертовому русі навколо миттєвої осі Cz:

$$V_B = \omega \cdot BC, \qquad V_A = \omega \cdot AC.$$

Враховуючи значення швидкостей точок A і B, які ми отримали раніше, дістанемо

$$\omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BC, \quad \omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AC.$$

Якщо додати ліві і праві частини отриманих рівностей і врахувати, що $AC + BC = AB$, то знайдемо

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (6.4)$$

Крім того маємо

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega}{AB}, \quad \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB},$$

звідки

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{Ac} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (6.5)$$

Направлений вектор кутової швидкості результуючого руху в цю ж сторону, що й вектори кутових швидкостей складових рухів, тобто

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \qquad (6.6)$$

Отже *система двох миттєвих обертань навколо паралельних осей зводиться до миттєвого обертового руху навколо миттєвої осі, яка паралельна до осей переносного і відносного обертових рухів. Ця миттєва вісь ділить відстань між осями переносного і відносного обертань внутрішнім чином у відношенні, обернено пропорціональному величинам кутових швидкостей переносного і відносного рухів. Миттєва кутова швидкість результуючого руху дорівнює векторній сумі кутових швидкостей переносного і відносного рухів.*

2. Складові обертання направлені в протилежні сторони.

Нехай відносний і переносний обертальні рухи відбуваються навколо паралельних осей і вектори кутових швидкостей цих обертань протилежні за напрямком і різні за величиною (наприклад $\omega_1 > \omega_2$) (рис. 6.4, а). Проводячи аналогічні міркування, як і в попередньому випадку, можна показати, що результуючий рух буде обертовий навколо миттєвої осі Cz, яка у цьому випадку знаходиться не між осями Az_1 і Bz_2, а розташована зовні зі сторони осі складового обертання з більшою кутовою швидкістю. Можна також показати, що

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \qquad (6.7)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{Ac} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (6.8)$$

Направлений вектор кутової швидкості результуючого руху в ту сторону, в яку направлений вектор більшої за модулем кутової швидкості складового руху, тобто знову має місце векторна формула (6.6).

Таким чином, *система двох протилежно направлених миттєвих обертань твердого тіла навколо паралельних осей з різними за величиною кутовими швидкостями зводиться до миттєвого обертового руху навколо миттєвої осі, яка паралельна до осей переносного і відносного обертових рухів. Ця миттєва вісь ділить відстань між осями переносного і відносного обертань зовнішнім чином на відрізки, обернено пропорціональні величинам складових кутових швидкостей. Величина абсолютної кутової швидкості дорівнює різниці складових кутових швидкостей і вектор абсолютної кутової швидкості направлений в напрямку більшої за модулем кутової швидкості складового руху.*

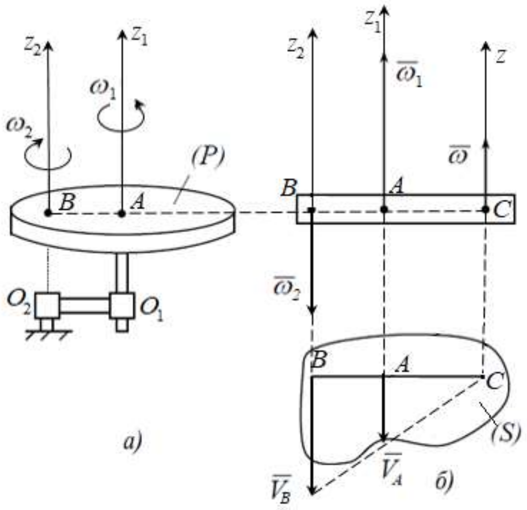


Рис. 6.4

3. Пара обертань.

Парою обертань називають такий рух, коли відносний і переносний обертальні рухи відбуваються навколо паралельних осей з рівними за величиною кутовими швидкостями у протилежних напрямках (рис. 6.5) ($\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$). Сукупність векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ в цьому випадку створюють пару кутових швидкостей (за аналогією з парою сил у статиці). У цьому випадку маємо $V_A = \omega_2 \cdot AB$ і $V_B = \omega_1 \cdot AB$, тобто $\vec{V}_A$=$\vec{V}_B$. Отже миттєвий центр швидкостей плоскої фігури знаходиться в нескінченності і всі точки тіла в даний момент часу мають однакові за величиною і напрямком швидкості. Таким чином результуючий рух тіла буде поступальним, і вектори швидкостей всіх точок направлені перпендикулярно до площини векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ відповідно до напрямку моменту пари сил у статиці. Отже *пара обертань еквівалентна поступальному руху зі швидкістю $\vec{V}$, яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей цих обертань.*

Із цього положення можна зробити висновок, що поступальний рух твердого тіла еквівалентний парі обертань, у якій момент кутових швидкостей цих обертань дорівнює поступальній швидкості тіла.

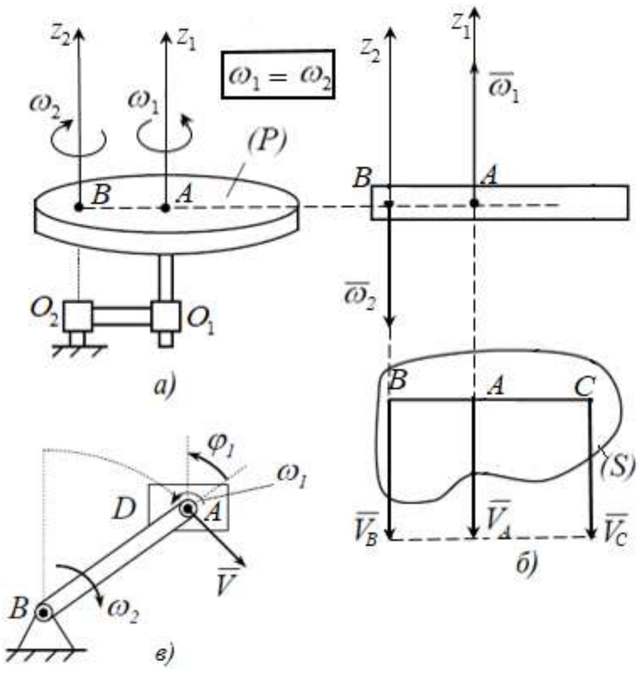


Рис. 6.5

§ 4. Додавання поступального і обертального рухів

Аналізуючи розглянуті випадки складного руху можна дійти висновку, що векторне додавання кутових швидкостей обертань і швидкостей поступальних рухів відбувається за такими ж законами, як і складання векторів сил та пар сил в статиці.

Дійсно, дії з поступальними швидкостями і парами обертань аналогічні діям з моментами пар сил в статиці. Складання кутових швидкостей обертання навколо осей, які перетинаються, аналогічне складанню векторів збіжних систем сил в статиці.

Можна сподіватися, що ці аналогії підтвердяться також при додаванні поступальних та обертальних рухів тіла (рис. 6.6). Покажемо, що приведення сукупності поступального і обертального рухів тіла до результуючого руху буде аналогічним приведенню до простішого вигляду сукупності головного вектора і головного моменту просторової системи сил в статиці.

Як в статиці в залежності від напрямків векторів головного вектора і головного моменту системи, так і в кінематиці, в залежності від напрямків векторів кутової швидкості обертання та поступальної швидкості, можливі три випадки подальшого приведення до простішого стану.

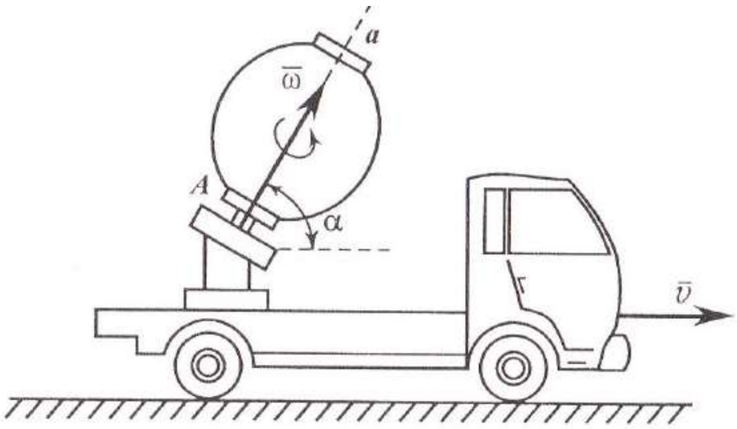


Рис. 6.6

У першому випадку, коли тіло рухається поступально із швидкістю $\vec{V}$ відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ і водночас обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі Az рухомої системи координат так, що вісь обертання перпендикулярна вектору $\vec{V}$ поступальної швидкості (рис. 6.7), результуючий рух тіла буде плоскопаралельним. Замінимо вектор $\vec{V}$ поступальної швидкості парою обертань ($\vec{\omega}', \vec{\omega}''$), причому приймемо $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, і $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. Тоді вектор $\vec{\omega}'$ пройде вздовж осі Pz', яка паралельна осі Az і розміщена на відстані

$$AP = \frac{V}{\omega}.$$

Відкинувши обертання з кутовими швидкостями $\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}''$, які при складанні дають нуль, встановимо, що при сукупності обертального і поступального рухів тіла у випадку перпендикулярності осі обертання до вектора поступальної швидкості результуючий рух тіла буде обертальним з тією ж кутовою швидкістю. Вісь результуючого обертання залишиться паралельною осі складового обертання і зміститься від неї на відстань, яка дорівнює швидкості поступального руху, поділеній на кутову швидкість тіла.

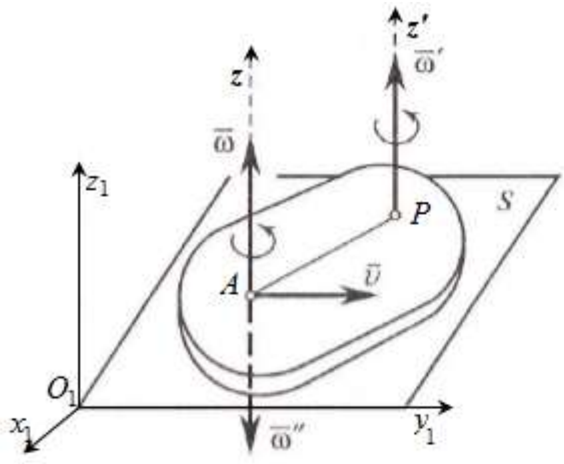


Рис. 6.7

Якщо вісь обертання паралельна напрямку поступальної швидкості (рис. 6.8), тобто коли $\vec{\omega} \parallel \vec{V}$, то такий рух тіла називають гвинтовим або кінематичним гвинтом.

Вісь Az, за якою направлені вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}$, називають віссю гвинта. Коли вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}$ направлені в одному напрямку, гвинт буде правим, якщо в протилежних – лівим. Відстань h, яку проходить будь-яка точка тіла, що лежить на осі гвинта, за час одного оберту, називають кроком гвинта. Якщо тіло рухається поступально з постійною швидкістю $\vec{V}$ ($V = const$) і обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = const$, то крок h гвинта буде постійним і визначиться залежністю

$$h = VT = \frac{2\pi V}{\omega},$$

де $T = \frac{2\pi}{\omega} -$ час одного обороту тіла у гвинтовому русі. При постійному кроці h довільна точка M тіла, яка не належить осі гвинта, буде рухатись гвинтовою лінією зі швидкістю

$$V_M = \sqrt{V^2 + (\omega R)^2},$$

де R – відстань точки M від осі гвинта.

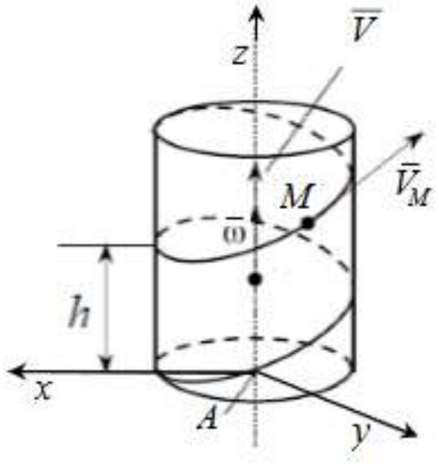


Рис. 6.8

Розглянемо також випадок, коли швидкість поступального руху $\vec{V}$ направлена під деяким кутом α до вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ обертального руху (рис. 6.9, а). Розкладемо швидкість $\vec{V}$ на складові (рис. 6.9, б)

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}'' \qquad (V' = Vcos\alpha, \qquad V'' = Vsin\alpha\,).$$

Швидкість $\vec{V}''$ можна замінити парою кутових швидкостей ($\vec{\omega}', \vec{\omega}''$), причому покладемо

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}, \qquad \text{і} \qquad \vec{\omega}'' = -\vec{\omega}.$$

Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}''$ можна відкинути, так як вони в сумі дають нуль. Відстань AC знайдемо за формулою

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{Vsin\alpha}{\omega}.$$

Отже у тіла залишається обертання з кутовою швидкістю $\vec{\omega}'$ і поступальний рух із швидкістю $\vec{V}'$. Таким чином, розподіл швидкостей точок тіла в даний момент часу буде таким же, як при гвинтовому русі з поступальною швидкістю $V' = Vcos\alpha$ (рис. 6.9, в) і кутовою швидкістю $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ навколо осі Cz' гвинта, зміщеної від початкового положення на відстань $AC = \frac{Vsin\alpha}{\omega}$.

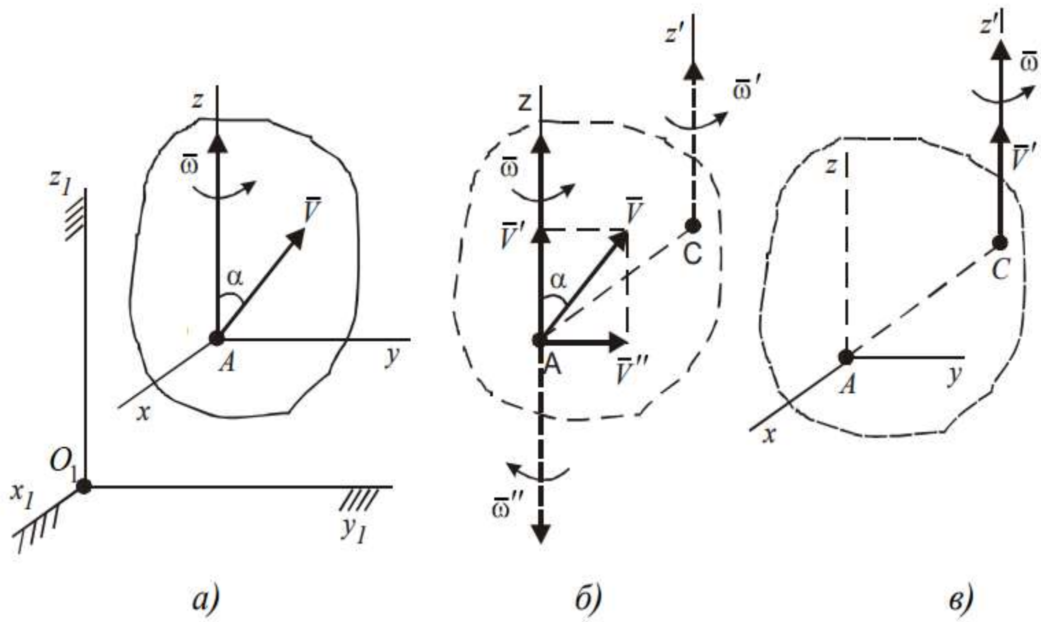


Рис. 6.9

§ 5. Приклади розв’язання задач кінематики складного руху тіла

Приклад 6.1

Планетарний редуктор з конічними шестернями (рис. 6.10) передає обертання з валу I на вал II. Визначити кількість обертів за хвилину валу II і кількість обертів за хвилину в абсолютному і відносному обертаннях сателітів 3, якщо радіуси конічних коліс $r_1 = r_2 =$ 80мм, радіус сателітів $r_3 = 60$ мм, а вал I має $n_1 = 600\,\frac{\text{об}}{\text{хв}}$.

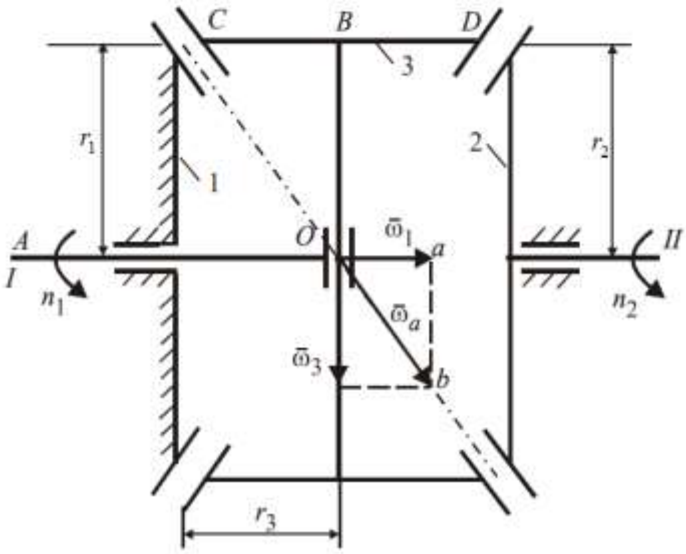


Рис. 6.10

Розв'язання. У даному механізмі сателіти 3 здійснюють складний рух, при якому відносним буде обертання шестерні 3 навколо своєї осі *OB* з кутовою швидкістю ω_3, а переносним – обертання разом з віссю *OB* навколо осі *OA* з кутовою швидкістю ω_1, пропорціональною $n_1\ \frac{\text{об}}{\text{хв}}$. У цьому випадку має місце складний обертальний рух шестерні 3 навколо осей, що перетинаються, тому, згідно з (6.3), абсолютна кутова швидкість ω_a шестерні 3 навколо миттєвої осі обертання *OC*, яка проходить через точку *O* перетину осей складових обертань та через нерухому точку *C*, визначиться залежністю

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3,$$

де $\vec{\omega}_3$ – відносна кутова швидкість шестерні 3.

Побудувавши векторну рівність додавання кутових швидкостей, розглянемо подібні трикутники Oab і OBC і одержимо:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{OB}{BC} = \frac{r_1}{r_3}, \text{або } \frac{n_3}{n_1} = \frac{r_1}{r_3},$$

де n_3 – кількість обертів за хвилину шестерні 3 у відносному русі.

Звідки маємо $n_3 = n_1 \cdot \frac{r_1}{r_3} = 800 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$. Кількість обертів сателіта 3 в абсолютному русі:

$$n_a = \sqrt{n_1^2 + n_3^2} = 1000 \frac{\text{об}}{\text{хв}},$$

а абсолютна кутова швидкість:

$$\omega_a = \frac{\pi n_a}{30} = 104{,}7 \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення кутової швидкості валу II визначимо швидкість точки *D*. Швидкість точки *B* шестерні 3 дорівнює

$$V_B = \frac{\pi n_1}{30} r_1, \quad \text{тоді} \quad V_D = 2V_B = \frac{2\pi n_1}{30} r_1.$$

ЗАле швидкість точки *D* шестерні 2 дорівнює

$$V_D = \frac{\pi n_2}{30} r_2.$$

Отже, враховуючи, що $r_1 = r_2$, одержимо:

$$n_2 = 2n_1 = 1200 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Яким буде рух у результаті додавання кількох обертових рухів тіла навколо осей, що перетинаються в одній точці? Як визначається кутова швидкість результуючого руху?
2. Як додаються поступальні рухи твердого тіла?
3. Яким буде складний рух твердого тіла при додаванні обертань навколо паралельних осей?
4. Як визначити кутову швидкість тіла у випадку його обертань навколо двох паралельних осей в одному і в різних напрямках?
5. Що таке пара обертань тіла, її властивості?
6. Яка аналогія зі статикою методів аналізу складного руху тіла?
7. До чого призводить поєднання поступального й обертального руху, коли напрямок поступального руху перпендикулярний до осі обертання тіла?
8. Що таке гвинтовий рух твердого тіла?

Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.
2. Іскрицький В.М., Подлєсний С.В., Водолазська О.Г., Єрфорт Ю.О. Т-33 Теоретична механіка. Статика і кінематика: Навчальний посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2007.
3. Лобас Л.Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка: Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас, Людм.Г. Лобас. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 406 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальний посібник

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА І КІНЕМАТИКА

Комп’ютерне макетування та верстка Н. Б. Коваль

Формат 60x90/16. Обл. вид. арк. 7.36 Наклад 10 прим. Зам. № 3720.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.