УДК 531.381

Дмитро Лещенко, д.ф.-м.н., проф.; Тетяна Козаченко, к.ф.-м.н., доц.
Одеська державна академія будівництва та архітектури, Україна

ЕВОЛЮЦІЯ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА З ТОЧКОВОЮ МАСОЮ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Анотація. Досліджується задача про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою точковою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'яззю за наявності в'язкого тертя.
Ключові слова: тверде тіло, середовище з опором, точкова маса.

Dmytro Leshchenko, Ph.D., Prof.; Tetiana Kozachenko, Ph.D., Assoc. Prof.

PERTURBED MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A POINT MASS IN A RESISTIVE MEDIUM

Abstract. We study the problem of the motion in a resistive medium of a dynamically symmetric rigid body carrying a movable point mass, connected with the body by an elastic coupling in the presence of viscous friction.
Keywords: rigid body, resistive medium, point mass.

Розвиток досліджень задач динаміки твердих тіл навколо його центра мас йде в напрямку врахування того факту, що ці тіла не є ідеально твердими, а досить близькими до ідеальних моделей. Необхідність аналізу впливу різних неідеальностей обумовлена зростанням вимог до точності розв'язань практичних задач космонавтики, гіроскопії, тощо. Вплив неідеальностей може бути виявленим за допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки (усереднення, сингулярних збурень та ін.). Він зводиться до наявності додаткових збурюючих моментів в рівняннях руху Ейлера деякого фіктивного твердого тіла. В [1] одержано векторне рівняння, яке описує зміну вектора $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ в системі координат, пов'язаної з тілом. Функція $\bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$ є поліномом, що містить четвертий і п'ятий степені $\bar{\boldsymbol{\omega}}$.

Ряд робіт присвячено аналізу різних проблем динаміки космічних апаратів, що містять внутрішні маси. Вивчались питання стійкості та нестійкості, а також проблеми керування та стабілізації рухів. В космічному польоті іноді виникає потреба заглушити хаотичне обертання, яке виникає з будь яких причин. Для цього використовують переміщення рухомих мас.

Розглядаються обертальні рухи динамічно симетричного тіла з рухомою точковою масою, яка прикріплена в'язкопружним демпфером до точки на осі симетрії (в недеформованому стані) [1, 2], в середовищі з опором. Будемо вважати, що моменти сил опору є лінійними та дисипативними [1, 3]:

$$M_1^r = -\varepsilon I_1 p,\ \ M_2^r = -\varepsilon I_1 q,\ \ M_3^r = -\varepsilon I_3 r,\ \ I_1, I_3 > 0, \tag{1}$$

де I_1, I_3 – деякі постійні коефіцієнти пропорційності, які залежать від властивостей середовища та форми тіла. З урахуванням (1) наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1-3]

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + \left(C - A\right)qr = -\varepsilon I_1 p + Lqr + Spr^4, \\ &A\dot{q} + \left(A - C\right)pr = -\varepsilon I_1 q - Lpr + Sqr^4, \\ &C\dot{r} = -\varepsilon I_3\, r - AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2). \end{aligned} \tag{2}$$

де p, q, r – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ на зв'язані осі, $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A, A, C)$ – тензор інерції незбуреного тіла. Коефіцієнти L, S в (2) виражаються через параметри системи наступним чином:

$$L = m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C\left(A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2\right), \qquad S = m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4}. \qquad (3)$$

Коефіцієнти L, S характеризують збурюючі моменти сил, які обумовлені наявністю в'язкопружного елемента, m – маса рухомої точки, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно; c – жорсткість (коефіцієнт пружності), δ – коефіцієнт в'язкості демпфера.

Досліджується випадок потужного демпфера, коли коефіцієнти Ω, λ зв'язані нерівностями [1, 2]:

$$\Omega^2 \gg \lambda\omega \gg \omega^2 . \qquad (4)$$

Умова (4) дозволяє ввести малий параметр в (3) і вважати вказані збурюючі моменти малими з метою застосування асимптотичного метода усереднення. Крім того, нерівності (4) дозволяють нехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання і врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла. Будемо вважати, що $\Omega^2 \gg \varepsilon$, $\lambda\Omega^{-4} \sim \varepsilon$.

Здійснюючи ряд перетворень систему (1) приведемо до системи повільних змінних x, y наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -2x\left[\varepsilon I_1 A^{-1} - SA^{-1} y^2\right], \qquad \frac{dy}{dt} = -2y\left[\varepsilon I_3 C^{-1} + AC^{-2} Sxy\right]. \qquad (5)$$

Система (5) проінтегрована чисельно за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та параметрів $\rho = 1$, $m = 1$, $\lambda = 98$, $\Omega = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $I_3 = 1.0$ та при різних значеннях A, C, I_1. Чисельний розв'язок системи отримано в математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності.

Змінні $x = a^2$ та $y = r^2$, що є квадратами екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла, спадають асимптотично наближаючись до нуля. У випадку виконання співвідношення $A/C = I_1/I_3$, система (5) має єдиний розв'язок $x = y$. При виконані нерівності $A/C > I_1/I_3$ змінна y швидше прагне до нуля ніж x. Якщо ж $A/C < I_1/I_3$ навпаки, змінна x спадає швидше ніж y.

Також характер спадання величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла залежить від співвідношення між моментами інерції. При зростанні величини A/C (при однакових інших параметрах) спадання змінних x та y відбувається повільніше. Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, які можуть бути використаними, при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас.

Перелік посилань

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, Cham, 2017.

2. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными массами. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. №4. С.33–44.

3. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором. Механіка та математичні методи. 2021. Т. 3. № 2. С. 6–17.