УДК 539.3

Борис Шелестовський, к.ф-м.н., доц.; Тетяна Пиндус
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, З ІЗОТРОПНИМ ПРУЖНИМ ШАРОМ

Анотація. Розв'язано контактну задачу термопружності про тиск циліндричного штампа, що обертається, на ізотропний шар. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, знаходження температури та напруженого стану зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які зображаються температурні поля та напруження в шарі.
Ключові слова: штамп, шар, температура, контактні напруження.

Borys Shelestovskyi, Ph.D., Assoc. Prof.; Tetyana Pyndus

CONTACT INTERACTION OF THE ROTATING PUNCH WITH ISOTROPIC ELASTIC LAYER

Abstract. The contact task of thermal elasticity of the rotating cylinder punch stress on the isotropic layer has been solved. Using the integral Hanckel's transformation and the Fourier's method the temperature and stressed state are found by determination of some constants from the system of linear algebraic equations, due to which the temperature fields and the stresses in the layer are presented.
Key words: punch, layer, temperature, contact stress.

Розглянемо жорсткий циліндричний шар з плоскою основою довжиною L і радіусом R, який втискується силою P в ізотропний шар товщиною h, що лежить на шарі. Штамп обертається з постійною швидкістю ω навколо осі симетрії і внаслідок тертя на площадці контакту виділяється тепло, кількість якого пропорційна коефіцієнту тертя K_0, швидкості ωr і контактному напруженню $\sigma_z(r)$.

Теплові потоки, які виникають при цьому, направлені всередину шару і штампа. Зовні площадка контакту поверхня шару вільна від зовнішніх зусиль, а на площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz}=0$, а $\tau_{r\varphi}$ пропорційні напруженню $\sigma_z(r)$. На верхньому торці штампа і на вільній поверхні шару підтримується нульова температура, а бічна поверхня циліндра теплоізольована. На нижній поверхні шару вертикальні перміщення і дотичні напруження рівні нулю.

Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r,φ,z з площиною $z=0$, яка співпадає з поверхнею шару, і віссю *oz*, спрямованою всередину штампу по його осі симетрії. Всі величини (напруження, переміщення, температура, пружні постійні, коефіцієнти теплопровідності і лінійного температурного розширення), які відносяться до шару, позначимо верхнім індексом (1), аналогічні величини для циліндричної області записуються без верхніх індексів. Таким чином, запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах:

$$T=0 \quad \left(0\le r\le R, z=L\right). \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0 \ \ (r=R,\ 0\le L). \tag{2}$$

$$\lambda_z^1\frac{\partial T^1}{\partial z}-\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}=\omega K_0 r\sigma_z\left(r\right)/J, \quad \lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}=h_0\left(T-T^1\right)\left(z=0,\ 0\le r\le R\right). \tag{3}$$

$$T^1 = 0 \quad \left(z = 0, R \le r < \infty\right). \tag{4}$$

$$u_z^1 = -\varepsilon \quad \left(z = 0, \ \le r \le R\right). \tag{5}$$

$$\tau_{rz}^1 = 0 \ \left(z = 0, \ R \le r < \infty\right). \tag{6}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} = K_H T^1, \ u_z^1 = 0, \ \tau_{rz}^1 = 0 \ \left(z = -h, \ 0 \le r < \infty\right). \tag{7}$$

Тут λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплопровідності, h_0 – контактна провідність; ε – величина вертикального переміщення штампа, J – механічний еквівалент тепла.

Відомо [1], що в термопружному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла визначаються із рівнянь:

$$\nabla^2\varphi = \alpha_T\left(1+\sigma\right)T/\left(1-\sigma\right), \ \ \nabla^2 T = 0, \tag{8}$$

а температурні напруження і переміщення виражаються за формулами:

$$u_z^0 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \ \sigma_z^0 = -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right), \ \tau_{rz}^0 = 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \tag{9}$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення, μ, σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Розв'язок рівняння теплопровідності для шару отримаємо у вигляді інтеграла

$$T^1 = \int_0^\infty\left(\varphi_1\left(\alpha\right)e^{\alpha\xi} + \varphi_2\left(\alpha\right)e^{-\alpha\xi}\right)J_0\left(\alpha\rho\right)d\alpha, \tag{10}$$

де $\varphi_1\left(\alpha\right), \ \varphi_2\left(\alpha\right)$ – невідомі функції, $\rho = r/R; \zeta = z/R$. $J_0\left(\alpha\rho\right)$ – функція Бесселя першого роду від дійсного аргумента.

Температурне поле у циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок виглядає так:

$$\begin{gathered} T\left(r,z\right) = A_0 z + B_0 + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0\left(\beta_\kappa r\right)\left(A_\kappa sh\beta_\kappa z + B_\kappa ch\beta_\kappa z\right) + \\ + \sum_{\kappa=1}^{\infty} I_0\left(\gamma_\kappa r\right)\left(C_\kappa \sin\gamma_\kappa z + D_\kappa \cos\gamma_\kappa z\right), \beta_\kappa = \mu_\kappa / R, \ \ \gamma_\kappa = \kappa\pi / R, \end{gathered} \tag{11}$$

де $A_\kappa, B_\kappa, C_\kappa, D_\kappa$ – довільні постійні, $I_0\left(\gamma_\kappa r\right)$ – функція Бесселя I-го роду уявного аргументу, $\beta_\kappa, \gamma_\kappa$ – власні числа, що визначаються з граничних умов, μ_κ – корені рівняння $J_1\left(\mu\right) = 0$.

Враховуючи $\frac{\partial T^1}{\partial z} - K_H T^1 = 0$;

$$T^1 = \int_0^\infty \varphi_1\left(\alpha\right)\left[e^{\alpha\xi} + P_1\left(\alpha\right)e^{\alpha\xi}\right]I_0\left(\alpha\rho\right)d\alpha. \quad P_1\left(\alpha\right) = \frac{\alpha - \kappa_H}{\alpha + \kappa_H}e^{-2\alpha h}. \tag{12}$$

Функція $\varphi\left(\rho,\xi\right)$, з врахуванням (12), отримується з першого рівняння (8).

$$\varphi\left(\rho,\xi\right) = \frac{1+\delta^1}{2\left(1+\delta^1\right)}\alpha_T\xi\int_0^\infty\frac{\varphi_1\left(\alpha\right)}{\alpha}\left(e^{\alpha\xi} + P_1\left(\alpha\right)e^{-\alpha\xi}\right)J_0\left(\alpha\rho\right)d\alpha \tag{13}$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулами (9). Маючи формули температурних напружень і переміщень, можна розв'язати задачу при механічних граничних умовах. Для цього необхідно до величин, обчислених згідно з формулами (9), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [2].
Таким чином, для визначення переміщень і напружень в ізотропному шарі маємо наступні формули:

$$\sigma_{zz}^{1}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha\left\{\left[(1-2\nu)C-B-\alpha zD\right]sh\,\alpha z+\left[(1-2\nu)D-A-\alpha zC\right]ch\alpha z\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha+$$
$$+\frac{\left(1+\delta^1\right)}{\left(1-\delta^1\right)}\mu\cdot\alpha_T\int_0^\infty \alpha^z\varphi(\alpha)\left[(1+\xi\alpha)e^{\alpha\xi}+\mathrm{P}_1(\alpha)(1-\xi\alpha)e^{-\alpha\xi}\right]J_0(\alpha\rho)\,d\alpha\,. \quad (14)$$

$$\sigma_{rz}^{1}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha\left\{(2\nu C+B+\alpha zD)ch\alpha z+(2\nu D+A+\alpha zC)sh\alpha z\right\}J_1(\alpha\rho)\,d\alpha-$$
$$-\frac{1+\delta^1}{1-\delta^1}\mu\alpha_T\int_0^\infty \alpha\varphi_1(\alpha)\left[(1+\alpha\xi)e^{\alpha\xi}+\mathrm{P}_1(\alpha)(1-\alpha\xi)e^{-\alpha\xi}\right]J_1(\alpha\rho)\,d\alpha\,. \quad (15)$$

$$U_z^1=\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left\{\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha zD(\alpha)\right]ch\alpha z+\right.$$
$$\left.+\left[2(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha z\,C(\alpha)\right]sh\alpha z\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha+ \quad (16)$$
$$+\frac{1+\delta^1}{2\left(1-\delta^1\right)}\alpha_T\int_0^\infty \varphi_1(\alpha)\left[(1+\alpha\xi)e^{\alpha\xi}+\mathrm{P}_1(\alpha)(1-\alpha\xi)e^{\alpha\xi}\right]I_0(\alpha\rho)\,d\alpha\,.$$

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (11) необхідно покласти $D_0=0,\ D_к=0,\ C_к=0\left(к=\overline{1,\infty}\right)$. Гранична умова (1) з урахуванням ортогональності функцій Бесселя приводить до таких співвідношень між постійними $B_0, B_к$, і $A_0, A_к\left(к=\overline{1,\infty}\right)$;

$$B_0=-A_0\ell R,\quad B_n=-A_n th\mu_n\ell,\quad \ell=L/R\,. \quad (17)$$

Задовольнивши граничні умови (3), (4) з врахуванням (17) одержимо систему інтегральних співвідношень, що зв'язують функцію $\varphi_1(\alpha)$ з коефіцієнтами $A_к\left(к=\overline{0,\infty}\right)$ і напруженням $\sigma_z^1(\rho)(\rho<1)$.

$$\frac{\lambda_z^1}{R}\int_0^\infty \alpha\varphi_1(\alpha)\left(1-\mathrm{P}_1(\alpha)\right)d\alpha-\frac{\lambda z}{R}\left[A_0\cdot R+\sum_{к=1}^{\infty}\mu_к J_0(\mu_к\rho)\cdot A_к\right]=\omega K_0\rho R\sigma_z^1(\rho)/j\,,\quad 0\le\rho<1;$$
$$\int_0^\infty \varphi_1(\alpha)\cdot\mathrm{P}_2(\alpha)J_0(\alpha\rho)\,d\alpha=-A_0\cdot R\left(\ell+\frac{\lambda z}{h_0\cdot R}\right)-\sum_{к=1}^{\infty}J_0(\mu_к\rho)\left(th\mu_к\ell+\frac{\mu_к\lambda_z}{Rh_0}\right)A_к,\ 0\le\rho<1; \quad (18)$$
$$\int_0^\infty \varphi_1(\alpha)\cdot\mathrm{P}_2(\alpha)J_0(\alpha\rho)\,d\alpha=0,\quad \rho>1\,.$$

Задовольняючи другу граничну умову (6) та другу і третю граничну умову (7), функції $A(\alpha), B(\alpha), D(\alpha)$ виразимо через $C(\alpha)$.

$$B(\alpha) = -2\nu C(\alpha) + P_3(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha),$$

$$A(\alpha) = \left[2(1-\nu)cth\alpha + \frac{4\nu(1-\nu)}{\alpha h} - \alpha h\right]C(\alpha) + P_4(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha),$$

$$D(\alpha) = \frac{2(\nu-1)}{\alpha h}C(\alpha) + P_5(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha).$$

Вимагаючи виконання граничних умов для напружень і переміщень на поверхнях шару, прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $C(\alpha)$ і $\varphi_1(\alpha)$, через які зображаються компоненти напружено-деформівного стану в шарі

$$\int_0^\infty C(\alpha)J_0(\alpha\rho)d\alpha = -\frac{\varepsilon}{R} - \frac{1}{2}\sigma_2\alpha_T^1\int_0^\infty \varphi_1(\alpha)\cdot F_1(\alpha)J_0(\alpha\rho)d\alpha, \quad 0 \le \rho < 1; \tag{19}$$

$$\int_0^\infty \alpha\left[-\frac{2\mu}{1-2\nu}F_2(\alpha)\cdot C(\alpha) + \mu\sigma_2\alpha_T\alpha\cdot\varphi_1(\alpha)\mathrm{P}_2(\alpha)\right]J_0(\alpha\rho)d\alpha = 0, \quad \rho > 1.$$

Використовуючи методику [3], систему інтегральних рівнянь зведемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих X_κ та Y_κ $\left(\kappa = \overline{0, N}\right)$.

Для визначення контактних напружень під штампом отримано наступні вирази:

$$\sigma_{zz}(\rho,0) = \sigma_{zz}^{(P)}(\rho,0) + \sigma_{zz}^{(T)}(\rho,0), \qquad \sigma_{zz}^{(P)}(\rho,0) = -\frac{P}{2\pi R^z}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^z}}\left[Z_0^{(1)} + \frac{1}{\rho}\sum_{\kappa=1}^{N_1} Z_\kappa^{(1)}T_{2\kappa+1}(\rho)\right],$$

$$\sigma_{zz}^{(T)} = \alpha_T T_0\frac{1}{\sqrt{1-\rho^z}}\left[Z_0^{(2)} + \frac{1}{\rho}\sum_{\kappa=1}^{N_1} Z_\kappa^{(z)}T_{z\kappa+1}(\rho)\right],$$

де $T_{2\kappa+1}(\rho)$ – функція Чебишева; $\sigma_{zz}^{(\rho)}(\rho,0)$ – силова складова напружень; $\sigma_{zz}^{(T)}(\rho,0)$ – температурна складова напружень в шарі.

Висновки. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля до рівняння теплопровідності для шару та метод Фур'є для циліндра, розв'зок задачі про знаходження температури та напруженого стану зведено до визначення коєфіцієнтів розкладу в ряд по функціях Чебишева температури та напружень із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Аналіз показує, що збільшення товщини шару приводить до зменшення силової складової контактних напружень, а умови тепло обіміну суттєво впливають на їх температурну складову.

Перелік посилань

1. Коваленко А.Д. Основи термопружності. – К: Наук. думка, 1979 – 304с.

2. Грилицький Д.В., Кізима Я.М. Осесиметричні контактні задачі теорії пружності і термопружності – Львів: Вищ.шк., 1981 – 136с.

3. Б. Окрепкий. Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск штампа, що обертається, на пружний півпростір при неідеальному тепловому контакті. Б. Окрепкий, М. Шелестовська // Вісник ТДТУ.–2002.–Т7, №1. – С.5-11.