УДК 536.2

Михайло Михайлишин, к.ф-м.н., доц.; Володимир Михайлишин
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Анотація: В роботі отримано початково-крайову задачу теплопровідності для тонких пласти і оболонок в припущенні про поліноміальний розподіл температури за товщиною довільного порядку.
Ключові слова: теплопровідність, пластина, оболонка, початково-крайова задача

Mykhailo Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof.; Volodymyr Mykhailyshyn

EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY OF THIN SHELLS

Abstract. In the work, the initial-boundary value problem of thermal conductivity for thin layers and shells is obtained under the assumption of a polynomial distribution of temperature along the thickness of an arbitrary order.
Keywords: thermal conductivity, plate, shell, initial boundary value problem

Дослідження напружено-деформованого стану тонких елементів конструкцій, які працюють в умовах інтенсивного нерівномірного нагріву, потребує попереднього визначення температурного поля. Однією з проблем, які при цьому виникають, є приведення трьохмірної задачі теплопровідності до деякої двохмірної задачі теплопровідності для тонких пластин і оболонок. Більшість авторів використовують припущення про постійність температури за товщиною, або про лінійний розподіл температури по товщині. Ці припущення не завжди оправдуються. Особливо великі похибки при визначенні температурного поля появляються в початкові моменти інтенсивного одностороннього нагріву, як це має місце, наприклад, при індукційному наплавленні.

Приведення просторової задачі теплопровідності до двохмірної проводилося багатьма авторами при використанні різних припущень. В роботі [1] використовується операторний метод в комплексі з методом усереднення температури по товщині стінки. Отримані наближені рівняння, які відповідають лінійному і кубічному розподілу температури по товщині оболонки. В роботі [2] зміна температури за товщиною оболонки апроксимується поліномами довільного порядку. Визначення температурного поля зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь відносно деяких інтегральних за товщиною характеристик температурного поля. Ці рівняння не враховують термопружного розсіювання енергії і внутрішніх джерел тепла, що важливо в задачах індукційного нагріву.

Використаємо рівняння теплопровідності в криволінійних координатах [1]

$$\Delta_1 t - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial e}{\partial \tau} - \frac{W_0}{\lambda}, \tag{1}$$

де

$$\Delta_1 = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\right)\right],$$
$$H_1 = A(1 + k_1\gamma), \qquad H_2 = B(1 + k_2\gamma),\ H_3 = 1, \qquad -\frac{h}{2} \le \gamma \le \frac{h}{2}, \tag{2}$$

$\lambda, a = \frac{\lambda}{c_v}$ – коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності,
$e(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ – об'ємне розширення,

γ_t − коефіцієнт тнрмопружного розсіювання, $W_0(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ − густина джерел тепла.

Розписуючи останній член в операторі Δ_1 і нехтуючи членами $k_1\gamma$ і $k_2\gamma$ порівняно з одиницею, після деяких перетворень рівняння (1) приведеться до вигляду

$$\Delta t - k^2 t + \frac{\partial^2 t}{\partial\gamma^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial e}{\partial\tau} - \frac{W_0}{\lambda}, \tag{3}$$

де

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right], \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{4}$$

Шукаємо рјзв’язок рівняння (3) у вигляді [2]

$$t(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = \sum_{l=0}^{m} T_l(\alpha,\beta,\tau)\,\gamma^l. \tag{5}$$

Введемо позначення

$$\theta_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t\gamma^p d\gamma, \; E_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e\gamma^p d\gamma, \;\; W_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W_0\gamma^p d\gamma. \tag{6}$$

Помножимо рівняння (3) на $\gamma^p d\gamma$ і проінтегруємо по товщині оболонки. Після доволі громіздких перетворень отримаємо

$$\begin{gathered}\Delta\theta_p - k^2\theta_p + p(p-1)\theta_{p-2} - \\ -\frac{1}{2AB}\left(\frac{h}{2}\right)^p\left\{\frac{B}{A}\frac{\partial h}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial t_+}{\partial\alpha} + (-1)^p\frac{\partial t_-}{\partial\alpha}\right] + \frac{A}{B}\frac{\partial h}{\partial\beta}\left[\frac{\partial t_+}{\partial\beta} + (-1)^p\frac{\partial t_-}{\partial\beta}\right]\right\} + \\ +\left(\frac{h}{2}\right)^p\left[\frac{\partial t_+}{\partial\gamma} - (-1)^p\frac{\partial t_-}{\partial\gamma}\right] - p\left(\frac{h}{2}\right)^{p-1}\left[t_+ - (-1)^{p-1}t_-\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta_p}{\partial\tau} = \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_p}{\partial\tau} - \frac{W_p}{\lambda}\end{gathered} \tag{7}$$

Тут позначено $t_+ = t\left({}^h/_2\right)$, $t_- = t\left(-{}^h/_2\right)$.

Нехай на лицьових поверхнях $\gamma = \pm{}^h/_2$ виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha_-(t - t_c^-) \text{ при } \gamma = -{}^h/_2, \\ &\frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha_+(t - t_c^+) \text{ при } \gamma = {}^h/_2.\end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи умови (8) можна показати, що

$$\frac{\partial t}{\partial\gamma}\left(\mp\frac{h}{2}\right) = \frac{\partial t_\mp}{\partial\gamma} = \pm\frac{\alpha_\mp A_0}{2\lambda AB}\left(t_\mp - t_c^\mp\right) \mp \frac{1}{2AB}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial t_\mp}{\partial\alpha}\frac{\partial h}{\partial\alpha} + \frac{A}{B}\frac{\partial t_\mp}{\partial\beta}\frac{\partial h}{\partial\beta}\right),$$

де позначено

$$A_0 = \sqrt{(2AB)^2 + \left(B\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(A\frac{\partial h}{\partial\beta}\right)^2}.$$

Після підстановки знайдених виразів в рівняння (7), останнє приведеться до такого виду

$$\Delta\theta_p - k^2\theta_p + p(p-1)\theta_{p-2} - \\ -\left(\frac{h}{2}\right)^{p-1}\left\{\frac{h}{2}\cdot\frac{A_0}{2\lambda AB}\left[\alpha_+(t_+ - t_c^+) + (-1)^p\alpha_-(t_- - t_c^-)\right] + p\left[t_+ - (-1)^{p-1}t_-\right]\right\} \\ -\frac{1}{a}\frac{\partial\theta_p}{\partial\tau} = \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_p}{\partial\tau} - \frac{W_p}{\lambda}. \qquad (9)$$

На контурі оболонки теж використовуємо умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha_3(t - t_{зс}).$$

Після перетворення цієї умови з врахуванням (6) дістанемо відповідні умови для функцій θ_p

$$\frac{\partial\theta_p}{\partial n} = \frac{-\alpha_3}{\lambda}\left(\theta_p - \theta_{зp}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial n}\left(\frac{h}{2}\right)^p\left[t_+ + (-1)^p t_-\right]. \qquad (10)$$

Тут позначено

$$\theta_{зp} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{зс}\gamma^p d\gamma,$$

$t_{зс}$ – температура зовнішнього середовища зі сторони контура оболонки.

Якщо в початковий момент часу виконується умова

$$t = t_0(\alpha,\beta,\gamma) \ \text{ при } \tau = 0,$$

то після перетворення вона прийме вигляд

$$\theta_p = \theta_{0p} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_0(\alpha,\beta,\gamma)\gamma^p d\gamma \quad \text{при } \tau = 0, \qquad (11)$$

Таким чином задача звелася до початково-крайової задачі (9-11) відносно температурних моментів θ_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Однак в праві частини рівнянь (9) і граничної умови (10) входять величини

$$t_\pm = t\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \sum_{l=0}^{m} T_l(\alpha,\beta,\tau)\left(\pm\frac{h}{2}\right)^l.$$

Підставляючи (5) у вираз для θ_p (6), знайдемо

$$\theta_p = \sum_{l=0}^{m} T_l\left(\frac{h}{2}\right)^{l+p+1}\cdot\frac{1 + (-1)^{l+p}}{l+p+1}. \qquad (12)$$

Обмежуючись деякою кількістю членів ряду m в (11), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої можна визначити функції $T_l(\alpha,\beta,\tau)$ через θ_p. Для прикладу, коли $m = 3$, рівняння (11) запишуться

$$\theta_0 = hT_0 + \frac{h^3}{12}T_2, \qquad \theta_1 = \frac{h^3}{12}T_1 + \frac{h^5}{80}T_3,$$
$$\theta_2 = \frac{h^3}{12}T_0 + \frac{h^5}{80}T_2, \qquad \theta_3 = \frac{h^5}{80}T_1 + \frac{h^7}{448}T_3.$$

Розв’язавши отриману систему рівнянь відносно T_l, $l = 1,2,3$, знайдемо

$$T_0 = \frac{3}{h}\left(\frac{3}{4}\theta_0 - \frac{5}{h^2}\theta_2\right), \qquad T_1 = \frac{15}{h^3}\left(5\theta_1 - \frac{28}{h^2}\theta_3\right),$$
$$T_2 = -\frac{15}{h^3}\left(\theta_0 - \frac{12}{h^2}\theta_2\right), \qquad T_3 = -\frac{140}{h^5}\left(3\theta_1 - \frac{20}{h^2}\theta_3\right). \qquad (13)$$

Враховуючи (12) і (5) дістанемо

$$t_{\pm} = t\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{h}\left(-\frac{\theta_0}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2\right) \pm \frac{5}{h^2}\left(-3\theta_1 + \frac{28}{h^2}\theta_3\right). \qquad (14)$$

Підставляючи знайдені значення в рівняння (9) і позначивши $\alpha^{\pm} = \alpha_+ \pm \alpha_-$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$\Delta\theta_0^{(j+1)} - k^2\theta_0^{(j+1)} - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta_0^{(j+1)}}{\partial\tau} - \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_0}{\partial\tau} + \frac{W_0}{\lambda} -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{3}{h}\left(-\frac{\theta_0^{(j+1)}}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2^{(j)}\right)\alpha^- + \frac{5}{h^2}\left(-3\theta_1^{(j)} + \frac{28}{h^2}\theta_3^{(j)}\right)\alpha^+ - \alpha_+ t_c^+ + \alpha_- t_c^-\right\} = 0,$$

$$\Delta\theta_1^{(j+1)} - \left(k^2 - \frac{30}{h^2}\right)\theta_1^{(j+1)} - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta_1^{(j+1)}}{\partial\tau} - \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_1}{\partial\tau} + \frac{W_1}{\lambda} -$$

$$-\frac{h}{2\lambda}\left\{\frac{3}{h}\left(-\frac{\theta_0^{(j+1)}}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2^{(j)}\right)\alpha^- + \frac{5}{h^2}\left(-3\theta_1^{(j+1)} + \frac{28}{h^2}\theta_3^{(j)}\right)\alpha^+ - \alpha_+ t_c^+ + \alpha_- t_c^-\right\} = 0,$$

$$\Delta\theta_2^{(j+1)} - \left(k^2 + \frac{60}{h^2}\right)\theta_2^{(j+1)} + 5\theta_0^{(j+1)} - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta_2^{(j+1)}}{\partial\tau} - \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_2}{\partial\tau} + \frac{W_2}{\lambda} -$$

$$-\frac{h^2}{4\lambda}\left\{\frac{3}{h}\left(-\frac{\theta_0^{(j+1)}}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2^{(j+1)}\right)\alpha^- + \frac{5}{h^2}\left(-3\theta_1^{(j+1)} + \frac{28}{h^2}\theta_3^{(j)}\right)\alpha^+ - \alpha_+ t_c^+ + \alpha_- t_c^-\right\} = 0,$$

$$\Delta\theta_3^{(j+1)} - \left(k^2 + \frac{15}{h^2}\right)\theta_3^{(j+1)} + \frac{57}{2}\theta_1^{(j+1)} - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta_3^{(j+1)}}{\partial\tau} - \frac{\gamma_t}{a}\frac{\partial E_3}{\partial\tau} + \frac{W_3}{\lambda} -$$

$$-\frac{h^3}{8\lambda}\left\{\frac{3}{h}\left(-\frac{\theta_0^{(j+1)}}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2^{(j+1)}\right)\alpha^- + \frac{5}{h^2}\left(-3\theta_1^{(j+1)} + \frac{28}{h^2}\theta_3^{(j+1)}\right)\alpha^+ - \alpha_+ t_c^+ + \alpha_- t_c^-\right\} = 0,$$

Таким чином ми отримали початково-крайову задачу для знаходження θ_p, $p = 0,1,2,3.$ Для цього потрібно розв'язати отриману систему рівнянь при граничних умовах (10) і початкових умовах (11). Враховуючи (14) граничні умови (10) запишуться так

$$\frac{\partial\theta_p^{(j+1)}}{\partial n} = \frac{-\alpha_3}{\lambda}\left(\theta_p^{(j+1)} - \theta_{зр}\right) + \frac{3}{h}\left(\frac{h}{2}\right)^p \frac{\partial h}{\partial n}\left(-\frac{\theta_0^{(j+1)}}{2} + \frac{10}{h^2}\theta_2^{(j+{}^{p}/_{2})}\right), \qquad p = 0,2;$$

$$\frac{\partial\theta_p^{(j+1)}}{\partial n} = \frac{-\alpha_3}{\lambda}\left(\theta_p^{(j+1)} - \theta_{зр}\right) + \frac{5}{h^2}\left(\frac{h}{2}\right)^p \frac{\partial h}{\partial n}\left(-3\theta_1^{(j+1)} + \frac{28}{h^2}\theta_3^{(j+{}^{(p-1)}/_{2})}\right), \qquad p = 1,3.$$

Зауважимо, що для розв'язування задачі використовується метод ітерацій. Значення функцій θ_p на нульовій ітерації приймаються рівними нулю.

Перелік посилань

1. Термопружність тонких оболонок / Я.С. Підстригач, Р.М. Швець. – К., «Наукова думка», 1978. – 344 с.

2. Теорія пружно-пластичних оболонок при неізотермічних процесах навантаження / Ю.М. Шевченко, І.В. Прохоренко. – К., «Наукова думка», 1981. –296 с.