

УДК: 539.3

Григорій Габрусєв, к.ф.-м.н., доц.; Ірина Габрусєва, к.т.н.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ОЦІНКА МІЦНОСТІ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ ПЛИТИ ПРИ ВТИСНЕННІ ІНДЕНТОРА СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Анотація. Постановку та розв'язок задачі проведено із використанням лінеаризованих співвідношень нелінійної теорії пружності. Попередньо деформовану плиту змодельовано попередньо напруженим шаром. Проаналізовано вплив форми індентора, товщини плити та її початкових деформацій на величину та характеристики контактних напружень і вертикальних переміщень на поверхні плити. Аналіз проведено для випадку стисливого (потенціал Бартенева – Хазановича) та нестисливого (потенціал гармонічного типу) тіла.

Ключові слова: попередньо деформована плита, контактні напруження, вертикальні переміщення, індентер.

Hryhorii Habrusiev, Ph.D., Assoc. Prof.; Iryna Habrusieva, Ph.D.

STRENGTH ESTIMATION OF THE PRELIMINARY STRESSED PLATE WHEN PRESSING A COMPLEX FORM INDENTER

Abstract. The formulation and solution of the problem were carried out using linearized relations of the nonlinear elasticity theory. The predeformed plate was modeled by a prestressed layer. The influence of the indenter shape, the plate thickness and its initial deformations on the magnitude and characteristics of contact stresses and vertical displacements on the plate surface was analyzed. The analysis was carried out for the case of compressible (Bartenev – Khazanovich potential) and incompressible (harmonic-type potential) solids.

Keywords: predeformed plate, contact stresses, vertical displacements, indenter

Розрахунок на міцність елементів конструкцій та деталей машин є одним із найважливіших етапів їх проектування. Мінімізація похибки розрахунку вимагає врахування максимальної кількості факторів, які впливають на контактну взаємодію тіл, зокрема наявність початкових напружень або деформацій.

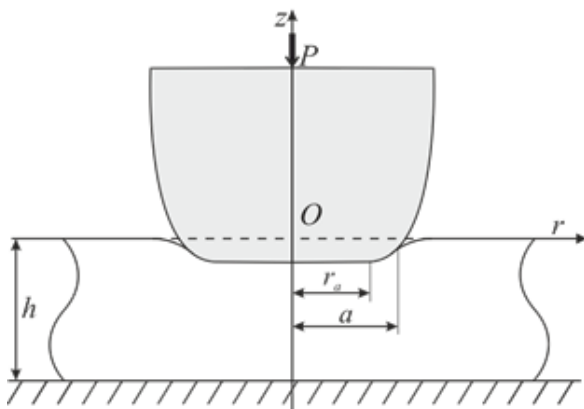


Рис. 1. Схема контакту

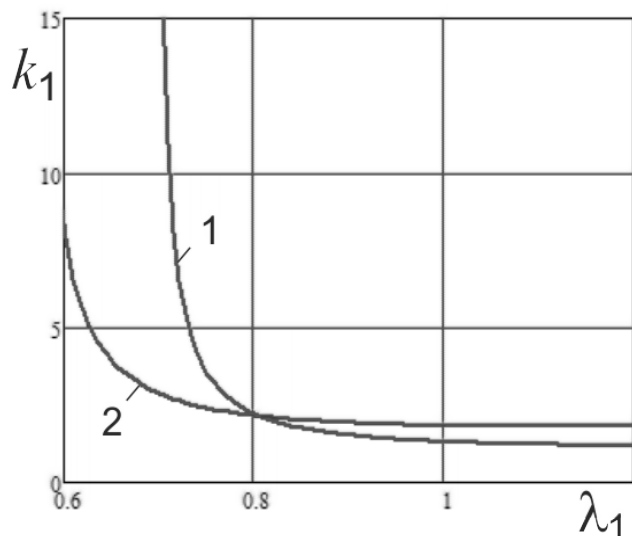


Рис. 2. Залежність k_1 від λ_1

Розглянемо задачу втиснення із постійною силою P індетора складної форми у попередньо напружену плиту, яка лежить без тертя на жорсткій основі. Індетер утворено обертаням вітки параболи та відрізка прямої, яка перпендикулярна до осі параболи та лінії дії сили, навколо лінії дії сили. Плиту будемо моделювати попередньо напруженим ізотропним шаром у рамках лінеаризованої постановки задачі теорії пружності.

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала із серединною площиною плити, а вісь Oz – із віссю симетрії індетора (рис. 1).

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, 0) &= 0, 0 \leq r < \infty; & \sigma_{rz}(r, -h) &= 0, 0 \leq r < \infty; \\ \sigma_{zz}(r, 0) &= 0, a \leq r; & u_z(r, -h) &= 0, 0 \leq r < \infty. \\ u_z(r, 0) &= f(r), 0 \leq r \leq a; \end{aligned}$$

Функція $f(r)$ описує форму індетора.

Розв'язання задачі проведено із використанням розробленої методики [1–2]. Парні інтегральні рівняння, що виникають у результаті задоволення граничних умов, розв'язано за допомогою подання шуканих функцій контактних напружень у вигляді частинної суми ряду за функціями Бесселя з невідомими коефіцієнтами a_n^* , для визначення яких будуються скінченні системи лінійних алгебричних рівнянь.

Остаточно функція розподілу контактних напружень має вигляд

$$\sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}, \quad (1)$$

а вертикальні переміщення точок граничної площини плити визначаються співвідношеннями

$$u_z(r, 0) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}, \quad (2)$$

де λ_n – додатні нулі функції $J_0(r)$, $K_n = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) dr$, $\Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr$.

Коефіцієнт k_1 , який входить до співвідношень (1) – (2), характеризує вплив початкових деформацій та залежить від структури пружного потенціалу. Зокрема, у випадку потенціалу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла)

$$k_1 = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\lambda_1^{\frac{7}{2}}}{3\lambda_1^3 - 1},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга матеріалу плити, λ_1 – параметр лінійного видовження. Останнє співвідношення прямує до нескінченності при $3\lambda_1^3 - 1 = 0$, тобто при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.693$. Значення λ_{kp} відповідає поверхневій нестійкості при рівномірному двовісному стиску. При цьому, як випливає зі (1) та (2), вертикальні переміщення точок граничних площин плити необмежено зростають, а контактні напруження відсутні. Отже, спостерігається такий механічний ефект: при наближенні

λ_1 до критичного значення λ_{kp} у плиті виникають явища «резонансного характеру», які були виявлені Олегом Миколайовичем Гузем при розв'язанні задач крихкого руйнування матеріалів з початковими напруженнями [3].

Аналогічний ефект спостерігається і у тілах із пружним потенціалом гармонічного типу (стисливі тіла), для якого

$$k_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1(2+\nu) - (1+\nu)}.$$

Для різних матеріалів критичні значення λ_{kp} є різними, оскільки залежать від ν . Зокрема, при $\nu = 0.3$ «резонансні» явища спостерігаються при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.565$.

На рис. 2 ілюструється графічна залежність k_1 від параметра лінійного видовження λ_1 для випадку наявності у плиті пружного потенціалу Бартенєва-Хазановича (крива 1) та потенціалу гармонічного типу (крива 2). З наведених графіків випливає, що вплив початкових напружень на вертикальні переміщення як для стисливих, так і для нестисливих тіл значно вищий у випадку попередніх деформацій стиску ($\lambda_1 < 1$), ніж у випадку попередніх деформацій розтягу ($\lambda_1 > 1$).

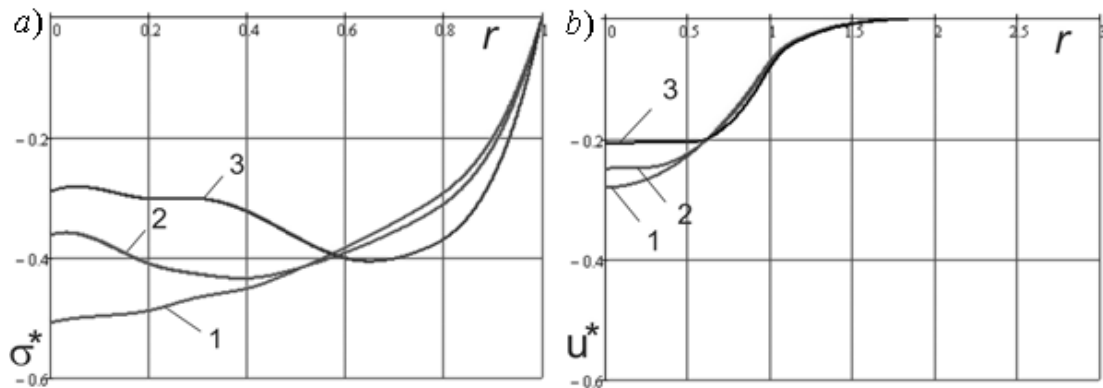


Рис. 3. Розподіл контактних напружень (а) та вертикальних переміщень (б) при різних значеннях параметра r_a

На рис. 3 наведено графіки функцій $\sigma^*(r) = \sigma_{zz}(r, 0)/P$ та $u^*(r) = u_z(r, 0)/P$ для випадку параболічного індентора, відсутності попередніх напружень у шарі $\lambda_1 = 1$, та $a = 1$ при різних значеннях параметра r_a : $r_a = 0$ – крива 1, $r_a = 0.2$ – крива 2, $r_a = 0.5$ – крива 3. Очевидно, що форма індентора суттєво впливає на рівень і характер розподілу контактних напружень. Зокрема, за відсутності плоскої частини в основі індентора, екстремальні значення контактних напружень спостерігаються в центрі контактної області. Поява ж плоскої частини призводить до зсуву екстремальних значень до краю контактної області та зменшує їх абсолютну величину.

На рис. 4 а) зображено графік функції, що описує розподіл контактних напружень для випадку тиску параболічного індентора. Графік функції, що описує вертикальні переміщення точок верхньої граничної площини шару для того ж випадку, побудовано на рис. 4 б). Пунктирна крива показує випадок тиску індентора на півпростір [2], крива 1 відповідає тиску аналогічного індентора із тією ж силою на шар товщиною $h = 0.5$, крива 2 – $h = 1$, крива 3 – $h = 2$. Як видно з малюнків уже при $h = 2$, тобто якщо товщина шару вдвічі більше радіуса контактної ділянки, розподіл контактних напружень для шару близький до відповідного розподілу для півпростору. Тобто

подальше збільшення товщини шару не призведе до істотного зменшення контактних напружень.

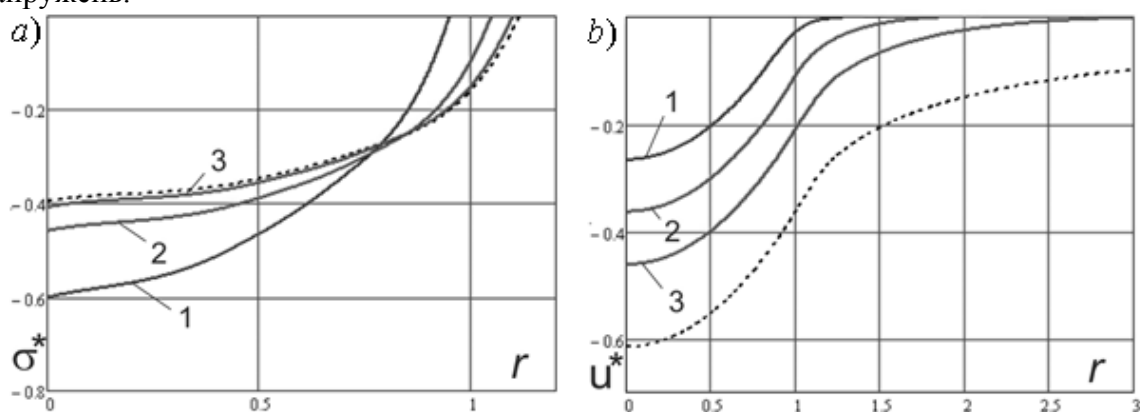


Рис. 4. Розподіл контактних напружень (а) та вертикальних переміщень (b) при різних значеннях товщини шару

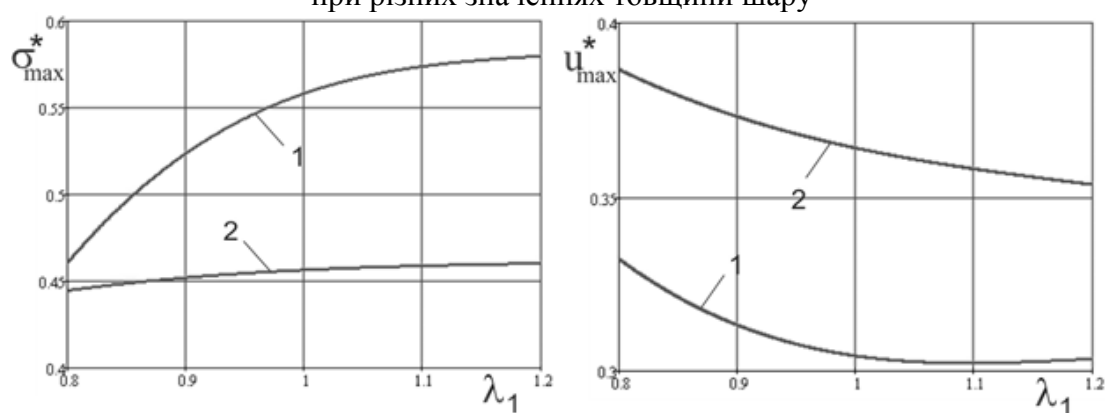


Рис. 5. Екстремальні значення контактних напружень та вертикальних переміщень

На рис. 5 проілюстровано залежність екстремальних значень контактних напружень та вертикальних переміщень точок верхньої граничної площини шару від лінійного видовження λ_1 для випарку тиску параболічного індентора. Криві 1 відповідають нестисливому шару з наявним пружним потенціалом Бартенєва-Хазановича, а криві 2 – стисливому шару з потенціалом гармонічного типу.

Наявність у шарі залишкових деформацій розтягу викликає звуження площі контакту, збільшення абсолютної величини контактних зусиль і зменшення вертикальних переміщень. Величина індукованих змін залежить від типу пружного потенціалу. Наявність у шарі залишкових деформацій стиснення, у свою чергу, викликає розширення площі контакту, зменшення абсолютної величини контактних напружень і збільшення вертикальних переміщень.

Перелік посилань

1. Габрусєва І.Ю. Контактна задача про стиснення ізотропного шару двома параболоїдальними штампами з урахуванням поля залишкових деформацій / Б.Г. Шелєстовський, І.Ю. Габрусєва // Вісник ТНТУ. – 2014. – 73.№1. – С. 44-52.

2. Habrusiev, H.V., Habrusieva, I.Y. & Shelestovskyi, B.H. Contact Interaction of a Prestrained Thick Plate with Parabolic Punch. J Math Sci 263, 129–137 (2022).

3. Гузь О. М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навч. посібник / Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. – К: Вища школа, 1995. – 304 с.