УДК 539.375
Олександр Кіпніс, к.ф-м.н.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Україна

ПЛОСКА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРО СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Анотація. З використанням апарату тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено плоску задачу про стиск кусково-однорідного напівобмеженого тіла з закріпленою спеціальним чином межею вздовж приповерхневої тріщини, розташованої на прямолінійній межі поділу середовищ. Проаналізовано втрату стійкості матеріалу в локальній області біля міжфазної тріщини як початковий етап руйнування.
Ключові слова: матеріал з покриттям, межа поділу середовищ, міжфазна тріщина, стиск вздовж тріщини, критичні навантаження

Alexander Kipnis, Ph.D.

PLANE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS ON COMPRESSION OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS HALF-PLANE WITH A FIXED EDGE ALONG AN INTERFACE CRACK

A plane problem of compression of a piecewise homogeneous semi-bounded body with a fixed edge along a near-surface crack located on the rectilinear interface is considered. The study is performed using the relations of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies. The piecewise homogeneous body model is applied, assuming that the coating material is more rigid than the base material. The loss of stability of the material in the local area near the interfacial crack is analyzed as the initial stage of fracture.
Keywords: material with coating, interface, near-surface interface crack, compression along the crack, critical loads

Вступ. Задачі для тіл, які стискаються вздовж площин розташування тріщин відносять до некласичних задач механіки руйнування через незастосовність класичних критеріїв руйнування за такої схеми навантаження. Найбільш ефективним підходом до дослідження указаних проблем є застосування апарату тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [1] із залученням відповідних критеріїв руйнування.

Так, старт руйнування *однорідного* матеріалу, що стискається вздовж тріщин асоціюється з втратою стійкості стану рівноваги матеріалу в локальній області поблизу тріщини (*локальна втрата стійкості*) [2].

Початковий етап руйнування *кусково-однорідного* конструкційного матеріалу, що стискається вздовж тріщин (зокрема таких, що розташовані на межі поділу середовищ) має комбінований характер і передбачає взаємодію різних механізмів втрати стійкості: *локальна втрата стійкості*, *внутрішня* (зумовлена внутрішньою структурою конструкційного матеріалу та стисканням вздовж межі поділу середовищ) та *приповерхнева* (зумовлена наявністю граничної поверхні тіла (для обмежених і напівобмежених тіл) і явищами, що виникають біля цієї поверхні) втрата стійкості [3].

Нижче в рамках ТЛТСДТ досліджена плоска статична задача про стиск конструкційного матеріалу вздовж тріщини, розташованої на прямолінійній межі поділу двох різних середовищ: напівобмеженого однорідного тіла (основа) та однорідного шару покриття. Межа тіла закріплена таким чином, що точки цієї межі можуть вільно зміщуватися лише в нормальному до неї напрямку. Відповідну крайову задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій із застосуванням інтегральних подань Фур'є зведено до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (і деякої додаткової умови), яка досліджується чисельно з використанням методу Бубнова-Гальоркіна. Зазначена система інтегральних рівнянь одержана в загальному випадку, коли обидва матеріли (основи і покриття) є стисливими або нестисливими високоеластичними матеріалами, для пружних потенціалів яких, згідно з термінологією [1], виконується умова *рівності коренів характеристичних рівнянь*. Визначені значення критичного відносного укорочення і критичного навантаження, які, відповідно до застосованого критерію руйнування, відповідають старту процесу руйнування конструкційного матеріалу, що досліджується.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло, що складається з півплощини $x_2 \geq 0$ (матеріал "1", основа) та смуги $-h \leq x_2 \leq 0$ (матеріал "2", покриття). Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну ненавантажену тріщину довжини $2a$ (рис. 1); поза тріщиною матеріали жорстко з'єднані між собою.

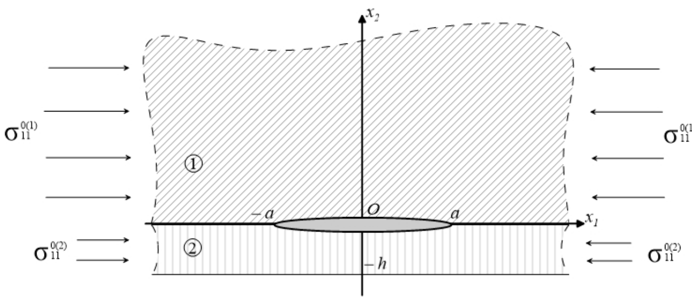

Рис. 1

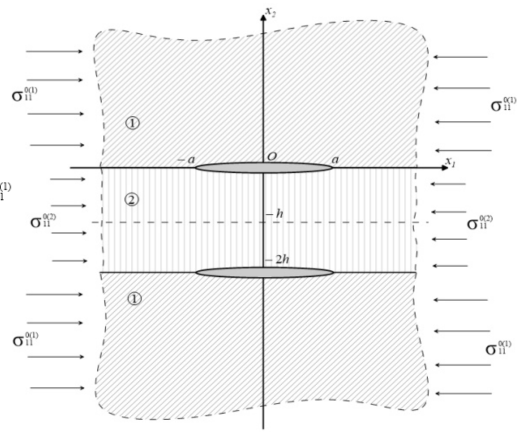

Рис. 2

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const},\ i = 1,2;\ \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)} \tag{1}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі Ox_1 для матеріалів півплощини та смуги

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}\,,\ \lambda_1 < 1\,, \tag{2}$$

де λ_1^1, λ_1^2 – коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$ відповідно (тут і далі верхнім індексом "1" (в дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу півплощини "1", а верхнім індексом "2" (в дужках) – смуги "2"; верхнім індексом "0" (без дужок) тут і надалі позначаються величини, що відносяться до початкового (докритичного, незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначаються додатковим індексом). Межа тіла $x_2 = -h$ закріплена таким чином, що точки цієї межі можуть вільно зміщуватися лише в нормальному до неї напрямку.

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1\,,\ i = 1,2\,. \tag{3}$$

Граничні умови сформульованої задачі записуються наступним чином:

$$t_{22}^{(2)} = 0,\ u_1^{(2)} = 0\ \ (x_2 = -h,\ 0 \le |x_1| < \infty);\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)},\ t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)}\ \ (x_2 = 0,\ 0 \le |x_1| < \infty);$$

$$t_{22}^{(2)} = 0,\ t_{21}^{(2)} = 0\ \ (x_2 = 0,\ |x_1| \le a);\ u_1^{(1)} = u_1^{(2)},\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}\ \ (x_2 = 0,\ |x_1| > a)\,. \tag{4}$$

Тут $t_{kl}^{(i)},\ i,k,l = 1,2$ є збуреннями компонент несиметричного тензору напружень Піоли-Кірхгофа $\tilde{t}$, $\vec{u}$ – вектор переміщень.

В описаній постановці крайова задача з умовами (4) еквівалентна задачі плоскої деформації для смуги, що жорстко з'єднана з двома півплощинам і стискається вздовж двох паралельних міжфазних тріщин (для випадку антисиметричної (згинної) форми втрати стійкості) (рис. 2). Аналогічна задача для однорідного тіла досліджена в [4]; аналогічна просторова осесиметрична задача досліджена в [5] з використанням методу скінчених різниць для низки конкретних композитних матеріалів, які, згідно з термінологією [1], відповідають випадку *нерівних коренів характеристичних рівнянь*.

Перевагою застосування підходу, що пропонується в роботі є можливість отримання результатів в *загальній формі* для широкого спектру матеріалів: стисливих і нестисливих, пружних і пружно-пластичних, ізотропних та анізотропних. При цьому, на відміну від підходів, що базуються на використанні чисельних методів скінчених різниць та скінчених елементів (див., наприклад, [5]), конкретизація моделі матеріалу відбувається лише на фінальному етапі розв'язання задачі.

Система інтегральних рівнянь задачі. Для випадку однорідного докритичного стану (1) – (3) в [1] побудовані представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції, вид яких залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння для вибраної моделі матеріалу. В даній роботі досліджується випадок, коли характеристичне рівняння для кожного з матеріалів має *рівні корені* ($n_1^1 = n_2^1 = n_1^2 = n_2^2 = n$), а самі матеріали "1" і "2" є різними, проте такими, що описується однаковими пружними потенціалами.

Представивши (з урахуванням симетрії конфігурації відносно осі Ox_2) указані невідомі гармонічні потенціальні функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 та записавши в їх термінах граничні умови задачі (4), після ряду викладок вихідна гранична задача зводиться до задачі на власні значення відносно параметра укорочення $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 < 1$ для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду [4]

$$\begin{gathered}
\int_0^1 \left[\int_0^\infty P_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} \mathrm{d}\lambda \right] f(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \\
+ \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_2(n^{-1/2}\beta\lambda)(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\lambda \right] g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0, \\
\int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} \mathrm{d}\lambda \right] f(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \\
+ \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} \mathrm{d}\lambda \right] g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \mathrm{const}, \\
\beta = h/a\,,\ 0 \le \xi < 1,\ 0 \le \eta \le 1
\end{gathered} \tag{5}$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi),\ g(\xi)$ ($P_{1,2},\ Q_{1,2}$ – відомі функції).

Константа const, яка фігурує в (5), пов'язана з додатковою умовою

$$\int_0^1 g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0\,. \tag{6}$$

Параметр λ_1 (коефіцієнт укорочення вздовж осі Ox_1) характеризує докритичний стан та складним нелінійним чином входить до ядер інтегральних рівнянь. Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь (5), доповнених умовою (6), проводиться з використанням методу Бубнова-Гальоркіна.

Аналіз результатів. В якості прикладу наведемо результати числових досліджень одержаної задачі на власні значення для випадку, коли матеріали конструкційного тіла, що розглядається, описуються пружним потенціалом Бартенєва – Хазановича (нестисливі тіла).

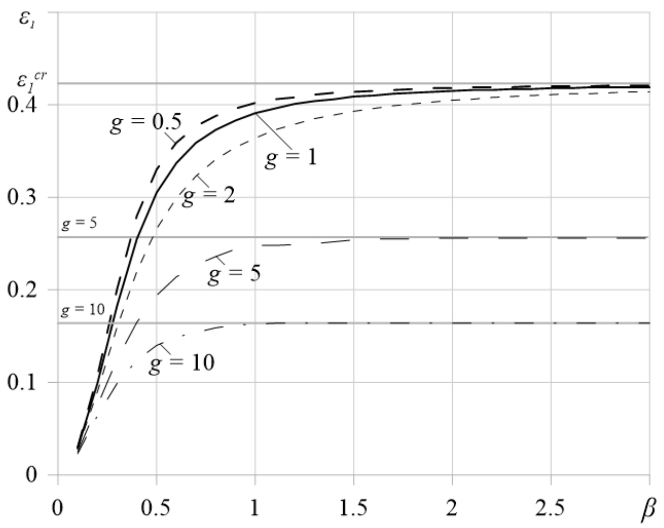

Рис. 3

На графіку рис. 3 зображено залежність значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від значення відносної ширини смуги $\beta = h/a$ для різних значень $g = \mu_2/\mu_1$ відношення жорсткості матеріалу покриття до жорсткості матеріалу основи.

Горизонтальні прямі на графіку рис. 3, відповідають значенням критичного відносного укорочення $\varepsilon_1^{st} = 1 - \lambda_1^{st}$ для *приповерхневої нестійкості кусково-однорідної півплощини* (якщо таке явище спостерігається, $g = 5;10$) при відповідному значенні g або значенням критичного відносного укорочення $\varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0.423$ для *приповерхневої нестійкості однорідної півплощини* з матеріалом з пружним потенціалом Бартенєва – Хазановича (якщо явище *приповерхневої нестійкості кусково-однорідної півплощини* не спостерігається, $g = 0.5;1;2$) при відповідному значенні g.

Перелік посилань

1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. (Неклассические проблемы механики разрушения в 4-х т., 5-и кн. Под общ. ред. А.Н. Гузя; Т.4, кн. 1).

2. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – 259, №6. – С. 1315–1318.

Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. – К.: «ЛИТЕРА», 2008. Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.

3. Гузь А. Н., Назаренко В. М., Стародубцев И. П. Плоская задача разрушения материалов с двумя параллельными трещинами при сжатии вдоль трещин. – В кн.: Проблемы механики деформируемого твердого тела / Под ред. В. Г. Зубчанинова. – Калинин: КГУ, 1986. – С. 138—151.

4. Guz I.A. Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface // Int. Appl. Mech. – 1994. – 30, N 11. – P. 841–847.