

УДК 621.326

Юрій Крутій, д.т.н., проф.; Данило Величко

Одеська державна академія будівництва та архітектури, Україна

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ СУЦІЛЬНИХ ТА КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН НА НЕОДНОРІДНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА

Анотація. Розглядається задача про вільні симетричні коливання круглих суцільних та кільцевих пластин, що опираються на неоднорідну пружну основу Вінклера. Розроблено аналітичний метод розрахунку для випадку, коли коефіцієнт постелі задається будь-якою неперервною функцією радіальної координати. Метод ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння коливань в частинних похідних. Наведено числові результати розрахунку власних частот коливань для випадку суцільної металевої круглої пластини з жорстко закріпленим контуром та лінійно-змінним коефіцієнтом постелі. Для порівняння наведено також відповідні розрахунки методом скінчених елементів.

Ключові слова: круглі пластини, неоднорідна пружна основа, вільні симетричні коливання, аналітичний метод, частоти коливань.

Yurii Krutii, Ph.D., Prof.; Danylo Velychko

ABOUT FREE OSCILLATIONS OF CIRCULAR SOLID AND ANNULAR PLATES ON AN INHOMOGENEOUS ELASTIC WINKLER FOUNDATION

Abstract. The problem of free symmetrical oscillations of circular solid and annular plates resting on an inhomogeneous elastic Winkler foundation is examined. An analytical calculation method is developed for the case when the modulus of subgrade reaction is defined by any continuous function of the radial coordinate. The method is based on the exact solution of the corresponding partial differential equation of vibration. Numerical results for the natural oscillation frequencies are computed and presented for the case of a solid metal circular plate with a rigidly fixed contour and a linearly varying modulus of subgrade reaction. For comparison, the corresponding calculations using the finite element method are also presented.

Keywords: circular plates, inhomogeneous elastic foundation, free symmetric oscillations, analytical method, oscillation frequencies.

Колівальні явища повсюдно поширені в природі і відіграють фундаментальну роль у різних механічних системах. Частота вільних коливань є фундаментальною властивістю системи і залежить виключно від її внутрішніх механічних характеристик. Точне визначення власних частот має вирішальне значення для розуміння поведінки колівальних систем. Зокрема, коли частота зовнішньої сили збігається з власною частотою системи, виникає резонанс, що призводить до значного посилення реакції системи або до її серйозних пошкоджень, а інколи до її руйнування.

Авторами досліджено задачу про симетричні коливання круглих пластин сталої циліндричної жорсткості

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

що опираються на неоднорідну пружну основу (рис. 1). Тут E – модуль Юнга, h – товщина пластини, μ – коефіцієнт Пуассона.

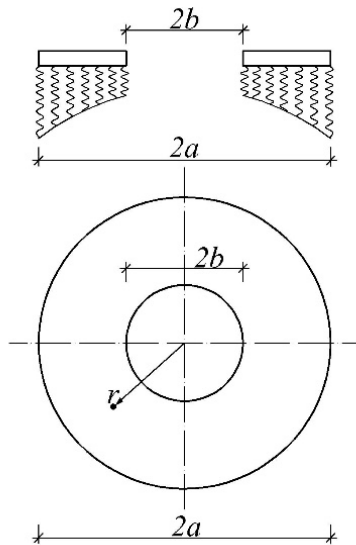


Рис. 1. Кільцева пластина на змінній пружній основі

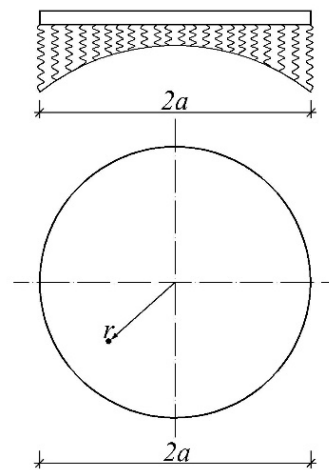


Рис. 2. Суцільна пластина на змінній пружній основі

Для пружної основи прийнято гіпотезу Вінклера, відповідно до якої сила реакції основи $R(r, t)$ на пластину та динамічний прогин $W(r, t)$ пов'язані між собою рівністю $R(r, t) = -k(r)W(r, t)$, де $k(r)$ – змінний коефіцієнт постелі.

Диференціальне рівняння коливань пластини має вигляд

$$D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] \right\} + k(r)W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

В публікації [1] отримано точний розв'язок цього рівняння. Як наслідок, в замкненій формі там наведено розрахункові формули для параметрів коливань пластини. Виходячи з точного розв'язку, авторами даної публікації розроблено аналітичний метод розрахунку на коливання круглих та кільцевих пластин, коли коефіцієнт постелі задається будь-якою неперервною функцією. Для реалізації розробленого методу створено відповідний програмний код. Тим самим, забезпечено можливість розрахунку пластин на симетричні коливання у програмному режимі.

Приклад. Наведемо результати розрахунку для суцільної пластини з жорстко закріпленим контуром. Коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом

$$k(r) = k(0) - (k(0) - k(a)) \frac{r}{a}.$$

Вихідні дані для розрахунку: $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $\mu = 0,3$; $a = 1 \text{ м}$; $h = 0,05 \text{ м}$; $k(0) = 5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$; $k(a) = 4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$.

В табл. 1 наведені результати розрахунку авторським методом (АМ) та наближеним методом скінченних елементів (МСЕ) у програмному комплексі ЛІРА-САПР. Оскільки авторський метод розрахунку ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння, отримані чисельні результати можна трактувати, як точні. Порівняння результатів дає можливість чисельно визначити похибку розрахунків методом скінченних елементів для розглянутого прикладу.

На рис. 3 представлені графіки перших п'яти симетричних форм коливань.

Таблиця 1

№ форми	Частоти коливань ω , рад/с		Розбіжність, %
	АМ	МСЕ	
1	250,334497	238,236404	4,832771
2	973,146283	926,875977	4,754712
3	2180,080984	2075,200928	4,810833
4	3870,186617	3682,196045	4,857403
5	6043,317446	5747,596191	4,893360

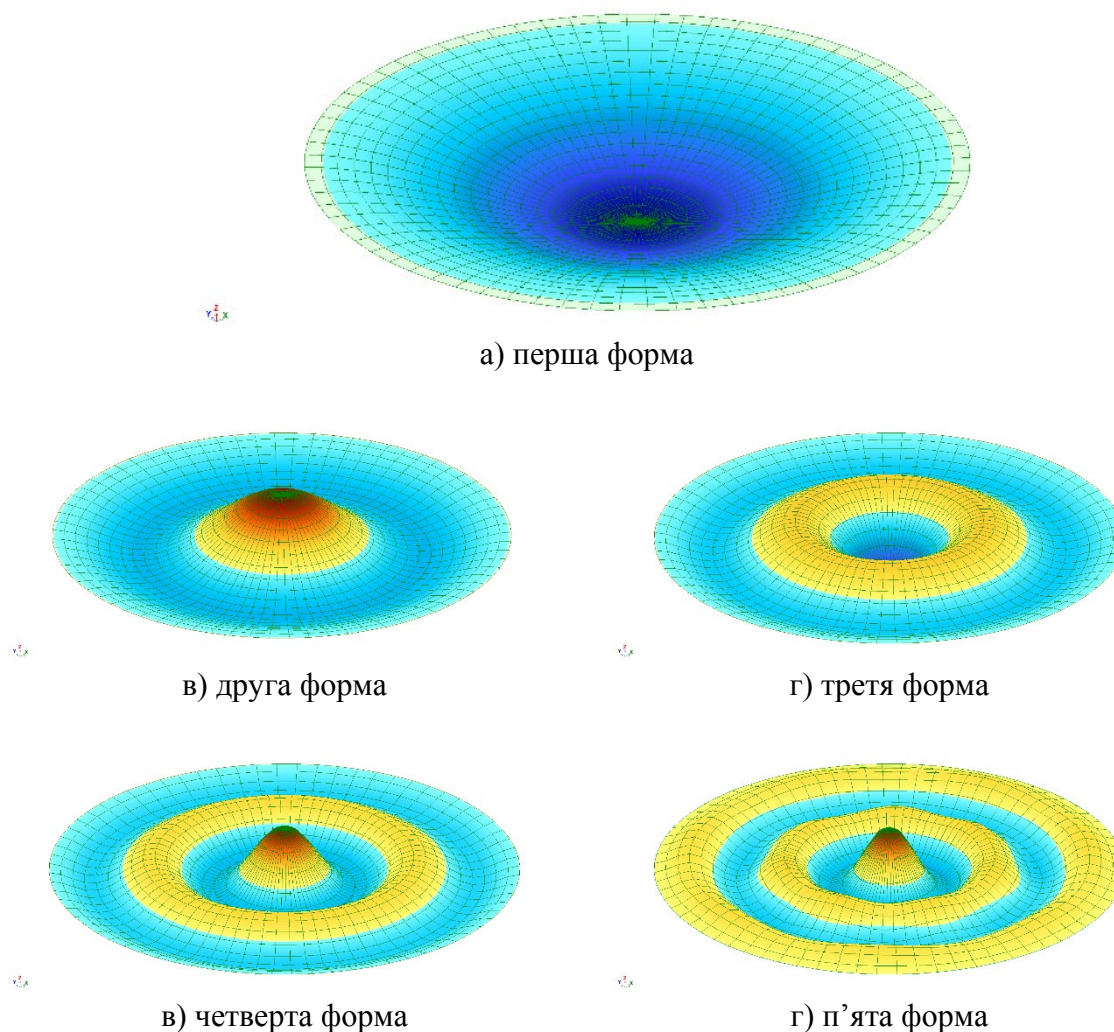


Рис. 3. Перші п'ять симетричних форм коливань

У цілому можна констатувати наявність нового аналітичного методу розрахунку на коливання суцільних та кільцевих пластин на неоднорідній суцільній пружній основі Вінклера, коли коефіцієнт постелі задається будь якою неперервною функцією.

Перелік посилань

1. Krutii, Y., Surianinov, M., Osadchiy, V., & Kolomiichuk, V. (2021). Development of analytical calculation method for axisymmetric oscillations of circular and annular plates on variable Winkler elastic foundation. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1164(1), 012056. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1164/1/012056>.