УДК 536.2

Островський О. - ст.гр. КТ-31
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Ostrovskyi O.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE ROUND MEMBRANE VIBRATION

Supervisor: Shelestovskyi B.

Ключові слова: диференціальне рівняння, мембрана
Key words: differential equations, membrane

Нехай в стані спокою мембрана займає круг радіуса q з центром в початку координат. В полярних координатах r,φ рівняння кола мембрани буде $r=q$. Відхилення точок мембрани від положення рівноваги $u(r,\varphi,t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u\,, \tag{1}$$

$$u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(r,\varphi) \tag{2}$$

та крайову умову

$$u(q,\varphi)=0\,. \tag{3}$$

Застосовуючи метод Фур'є розподілу змінних, візьмемо

$$u(r,\varphi,t)=\upsilon(r,\varphi)T(t) \tag{4}$$

і після відокремлення змінних отримаємо

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\nabla^2\upsilon}{\upsilon}=-\lambda^2\,. \tag{5}$$

Ми прирівняли відношення сталій $-\lambda^2$, бо перше з відношень (5) не залежить від полярних координат, а друге – від часу. З (5) знаходимо

$$\nabla^2\upsilon+\lambda^2\upsilon=0\,,\quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{r}\left(r\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\varphi^2}+\lambda^2\upsilon=0 \tag{6}$$

Функція υ залежить від двох полярних координат $r,\ \varphi$; продовжуючи метод розподілу змінних, беремо

$$\upsilon(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\,, \tag{7}$$

після відокремлення змінних маємо

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-\left(\frac{r^2R''+rR'}{R}+\lambda^2r^2\right)=-\mu^2\,. \tag{8}$$

Тут аналогічно до попереднього введено нову сталу μ^2. З (5) та (8) маємо такі рівняння для шуканих функцій $T,\ R,\ \Phi$.

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad \Phi'' + \mu^2\Phi = 0, \quad R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R = 0 . \tag{9}$$

Друге рівняння легко інтегрується:

$$\Phi = A^{(n)}\cos n\varphi + B^{(n)}\sin n\varphi . \tag{10}$$

Третє рівняння (9) перепишемо так:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 . \tag{11}$$

Для функції $R(r)$ отримали диференціальне рівняння Бесселя. Його загальний розв'язок

$$R(r) = C_1 I_n(\lambda r) + C_2 N_2(\lambda r), \tag{12}$$

де $I_n(r),\ N_n(r)$ функції Бесселя.

Оскільки розв'язок повинен бути скінченним, необхідно взяти $C_2 = 0$ (бо при $r \to 0$ маємо $|N_n| \to \infty$). Без обмеження шуканого розв'язку $u(r,\varphi,t)$, можна далі вважати, що $C_1 = 1$.

Так як мембрана закріплена по колу $r = q$, то

$$R(q) = I_n(\lambda q) = 0, \quad I_n(\tau) = 0(\tau = \lambda q). \tag{13}$$

власні числа

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{\tau_i^{(n)}}{q} \ (i = 1, 2...), \tag{14}$$

яким відповідають власні функції

$$R(r) = I_n\left(\lambda_i^{(n)} r\right). \tag{15}$$

Отже,

$$u_i^{(n)} = I_n\left(\lambda_i^{(n)} r\right)\left(A^{(n)}\cos n\varphi + B^{(n)}\sin n\varphi\right)\left(C_i^{(n)}\cos a\lambda_i^{(n)} t + D_i^{(n)}\sin a\lambda_i^{(n)} t\right). \tag{16}$$

Загальний розв'язок задачі про коливання круглої мембрани можна знайти методом суперпозиції

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} I_n\left(\lambda_i^{(n)} r\right)\Big[\left(\alpha_{in}\cos a\lambda_i^{(n)} t + \beta_{in}\sin a\lambda_i^{(n)} t\right)\cos n\varphi +$$
$$+\left(\gamma_{in}\cos a\lambda_i^{(n)} t + \delta_{in}\sin a\lambda_i^{(n)} t\right)\sin n\varphi . \tag{17}$$

Розглянуто випадок, коли центр мембрани відхилено при *t=0* на малу висоту *h* і відпущено без початкової швидкості

$$f(r) = h\left(1 - \frac{r}{q}\right); \quad F(r) = 0, \tag{18}$$

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_0\left(\lambda_i^{(0)} r\right)\left(\alpha_i \cos a\lambda_i^{(0)} t + \beta_i \sin a\lambda_i^{(0)} t\right), \tag{19}$$

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i I_0\left(\lambda_i^{(0)} r\right), \quad F(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i a\lambda_i^{(0)} I_0\left(\lambda_i^{(0)} r\right). \tag{20}$$