УДК 517.9
Дерев'янко В. – ст. гр. СНнм-61
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Габрусєв Г. В.

Derevianko V.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION BY THE MATHCAD ENVIRONMENT

Supervisor: Habrusiev H. V.

Ключові слова: чисельний метод, апроксимація, задача Діріхле, рівняння Лапласа.
Keywords: numerical method, approximation, Dirichlet problem, Laplace equation

Система комп'ютерної алгебри Mathcad є багатофункціональним середовищем, яке може використовуватись для вирішення широкого кола інженерних завдань. Розглянемо як приклад розв'язання за його допомогою задачі Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутній області [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$$

$$u(x,0)=u(0,y)=0;\ u(x,1)=x;\ u(1,y)=y.$$

Проведемо розбиття інтервалів обох змінних x та y із однаковим кроком 0.1. Таким чином ми отримаємо 121 вузол сітки. За бажану точність чисельного розв'язку виберемо $\varepsilon=0.001$. Задамо значення шуканої функції для нульової ітерації. У якості значень для крайніх точок сітки беремо дані із крайових умов, а для внутрішніх вузлів можна обрати довільні значення. Для відшукання наближеного розв'язку поставлену задачу можна звести до СЛАР, розв'язання якої можна провести методом ітерацій [2]. Код Mathcad програми наведено на рисунку 1.

$U(u,m,n,\varepsilon) =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.011	0.022	0.033	0.043	0.053	0.063	0.072	0.082	0.091	0.1
2	0	0.022	0.044	0.066	0.086	0.106	0.126	0.145	0.163	0.182	0.2
3	0	0.033	0.066	0.097	0.128	0.158	0.187	0.216	0.244	0.272	0.3
4	0	0.043	0.086	0.128	0.169	0.209	0.248	0.287	0.325	0.362	0.4
5	0	0.053	0.106	0.158	0.209	0.259	0.308	0.357	0.405	0.452	0.5
6	0	0.063	0.126	0.187	0.248	0.308	0.367	0.426	0.484	0.542	0.6
7	0	0.072	0.145	0.216	0.287	0.357	0.426	0.495	0.563	0.632	0.7
8	0	0.082	0.163	0.244	0.325	0.405	0.484	0.563	0.642	0.721	0.8
9	0	0.091	0.182	0.272	0.362	0.452	0.542	0.632	0.721	0.811	0.9
10	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

```
U(u,n,m,ε) := | cy ← 0
              | d_m ← 10^10
              | us ← u
              | while d_m > ε
              |   | d_m ← 0
              |   | for i ∈ 1,2..(n − 1)
              |   |   for j ∈ 1,2..(m − 1)
              |   |     | u[i,j] ← (u[(i−1),j] + us[(i+1),j] + us[i,(j+1)] + u[i,(j−1)]) / 4
              |   |     | d_m ← if(|u[i,j] − us[i,j]| < d_m, d_m, |u[i,j] − us[i,j]|)
              |   | us ← u
              |   | cy ← cy + 1
              | u
```

Рис. 1. Програма в середовищі Mathcad.

У результаті виконання програми $\mathrm{U}(u,n,m,\varepsilon)$ ми одержуємо значення шуканої функції $u(x,y)$ та будуємо її у вигляді поверхні (рисунок 2).

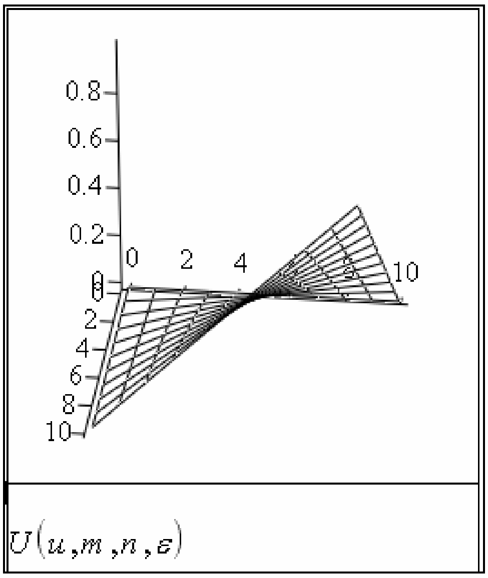

Рис. 2. Функція $u(x,y)$.

Оскільки дана схема володіє властивостями збіжності та стійкості [2], то можна легко добитись збільшення точності одержаного чисельного розв'язку (збільшуючи кількість вузлів або зменшуючи значення ε).

Література

1. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.
2. Самборська О. М. Числові методи : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. М. Самборська , Б. Г. Шелестовський. - Тернопіль : ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140 с.