

УДК 517.9

Горват М. – ст. гр. ЕТ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Horvat M.

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN THE RECTANGULAR DOMAIN

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: чисельний метод, апроксимація, задача Діріхле, рівняння Лапласа.

Keywords: numerical method, approximation, Dirichlet problem, Laplace equation

Сформулюємо задачу Діріхле для рівняння Лапласа: відшукати неперервну функцію $u(x, y)$, яка всередині прямокутної області $\Omega ((x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

а на границі області приймає задані значення

$$u(0, y) = f_1(y), \quad 0 \leq x \leq b; \quad u(a, y) = f_2(y), \quad 0 \leq x \leq b;$$

$$u(x, 0) = f_3(x), \quad 0 \leq x \leq a; \quad u(x, b) = f_4(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 – задані функції [1].

Вважатимемо функцію $u(x, y)$ неперервною також на межі області Ω , а тому $f_3(0) = f_1(0)$, $f_1(b) = f_4(0)$, $f_4(a) = f_2(b)$, $f_2(0) = f_3(a)$.

Вибравши крок $h = a/n$ по x та $l = b/m$ по y , сформуємо сітку $x_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$; $y_j = j \cdot l$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Апроксимуємо частинні похідні в кожному внутрішньому вузлі сітки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} + O(l^2)$$

та замінимо рівняння (1) рівнянням скінчених різниць

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} = 0; \quad (2)$$
$$i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Похибка переходу від рівняння (1) до (2) складає $O(h^2 + l^2)$ [2].

Отримані рівняння разом із значеннями шуканої функції у граничних вузлах утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно наближених значень

функції $u(x, y)$ у внутрішніх вузлах сітки. Якщо вибрати однакове значення кроку розбиття по x та y , тобто $h=l$, то система відносно $u_{i,j}$ матиме дещо простіший вигляд:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}); \\ u_{i,0} &= f_3(x_i), u_{i,m} = f_4(x_i), u_{0,j} = f_1(y_j), u_{n,j} = f_2(y_j); \\ i &= 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3)$$

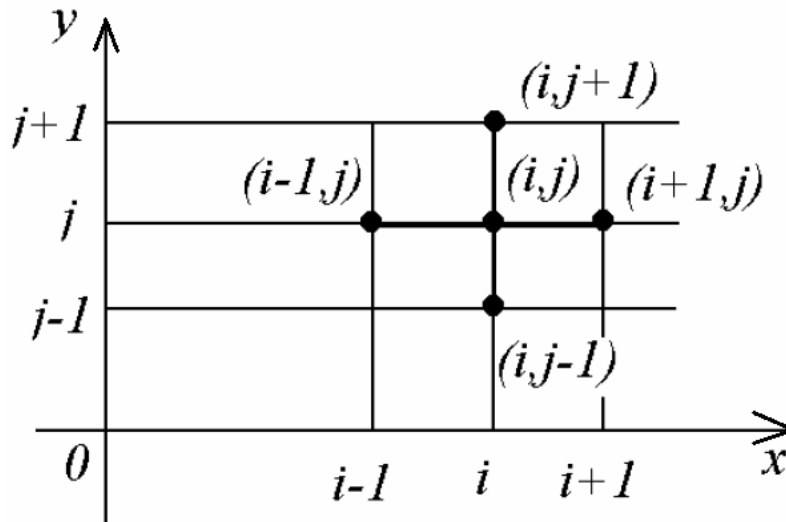


Рис. 1. Вузлова сітка

Отже, розв'язавши систему (3), ми отримаємо наближені значення функції розв'язку задачі (1). Для розв'язання системи (3) можна скористатись будь-яким чисельним методом [2]. Зокрема, можна скористатись методом Гауса-Зейделя, суть якого зводиться до побудови ітерацій виду

$$u_{i,j}^{(s+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)} + u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}).$$

Коли номер ітерації $s \rightarrow \infty$ послідовність $u_{i,j}^{(s)}$ збігається до точного розв'язку системи (3). Як умову припинення ітераційного процесу можна використовувати нерівність

$$\max |u_{i,j}^{(s+1)} - u_{i,j}^{(s)}| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Похибка розв'язку, отриманого даним методом, складається із двох: похибки апроксимації диференціального рівняння та похибки чисельного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Можна довести, що описана схема володіє властивостями збіжності та стійкості [2]. Тобто при зменшенні кроку розбиття отриманий наближений розв'язок прямує до точного, а малі пертурбації початкових даних приводять до малих змін одержаного чисельного розв'язку.

Література

1. Габрусев Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусев. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.
2. Самборська О. М. Числові методи : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. М. Самборська, Б. Г. Шелестовський. - Тернопіль : ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140 с.